Université Pierre et Marie Curie
Master 1 : Introduction au calcul stochastique pour la finance (MM065)

TD 1 : Taux d'intérêt en univers déterministe

1. Interêts simples / Intérêts composés. Définition : a) L'intérêt d'un prêt est dit simple lorsqu'il est calculé à chaque période seulement sur la base de la somme prêtée ou empruntée à l'origine.
b) L'intérêt d'un prêt est dit composé lorsqu'à la fin de chaque période l'intérêt s'ajoute au capital de début de période pour former la base de calcul de l'intérêt pour la période suivante. Le montant d'intérêt et le capital changent à chaque période

On emprunte N sur n périodes, et dans tout l'exercice, intérêt et capital seront toujours remboursés et payés à échéance (i.e. à la fin des n périodes). On note r_s le taux simple par période et r_c le taux composé.

1. Quel est le montant dû en n si les intérêts sont simples ?

2. Si les intérêts sont composés ?

3. Quelle relation doit exister entre r_s et r_c, en l'absence d'opportunité d'arbitrage et en supposant que l'on peut emprunter ou prêter selon les deux modalités ?

4. Ces taux peuvent-ils être tous les deux indépendants de n ?

5. Si les périodes associées au taux r_s sont des mois, et si n est un multiple de 12, quel est le taux simple annuel r'_s, en l'absence d'opportunité d'arbitrage et en supposant que l'on peut emprunter ou prêter en intérêts simples mensuels et annuels ?

6. Vous souhaitez effectuer un achat pour un montant de 1000 euros. Faute de disponibilités immédiates, vous décidez de financer votre achat par un crédit de durée un an. Deux solutions vous sont alors possibles :

a) votre carte de crédit vous donne la possibilité d'emprunter au taux mensuel simple de $0,5$ %,

b) votre banque vous offre une possibilité de financement au taux annuel composé de $6,1$ %.

Pour quelle méthode de financement opteriez-vous ? Que se passe-t-il si vous devez emprunter aux mêmes conditions mais sur deux ans avec remboursement du capital et des intérêt in fine ?

2. Limite continue de la capitalisation par intérêts composés.

1. Donner, pour $r \in \mathbb{R}$, et v_n suite équivalente à tn, avec $t > 0$, la limite de la suite $u_n = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{v_n}$.

2. Dans de nombreux cas, les taux d'intérêts sont associés à des longues durées, mais calculés de façon composée sur des durées beaucoup plus courtes. On parle par exemple de taux annuel r à composition mensuelle, hebdomadaire, quotidienne, ou de façon plus générale m fois par an. Cela signifie précisément que les intérêts sont composés m fois par an au taux $\frac{r}{m}$. Par exemple, un montant A investi au taux annuel r à composition mensuelle (donc $m = 12$) rapporte, au bout de respectivement 3, 7, 15 mois :

$$A\left(1+\frac{r}{12}\right)^3, A\left(1+\frac{r}{12}\right)^7, A\left(1+\frac{r}{12}\right)^{15}.$$

On dispose de 100 000 euros à investir deux ans. Vaut-il mieux l'investir au taux annuel de 4,7% calculé composé de façon annuelle, au taux annuel 4,6% composé de façon mensuelle, au taux 4,5% composé de façon hebdomadaire, ou au taux 4,4% composé de façon quotidienne (les années sont supposées avoir 365 jours) ?

3. Supposons que l'on investisse A euros au taux annuel de r à composition m fois par an, avec m très grand. Donner la valeur $V_m(t)$ du capital au bout d'un temps t (compté en années, mais non forcément entier). Quelle est sa limite lorsque $m \to +\infty$? On parle alors de *composition continue*, et r est alors le *taux continu*.

3. Taux pré-compté / Taux post-compté.
Un emprunt est à taux pré-compté si les intérêts sont payés en début de période (et non en fin comme dans le cas post-compté).
On note r_p le taux par période pré-compté et r le taux post-compté.

1. Vous voulez disposer de la somme N sur une période. Combien devez-vous emprunter au taux pré-compté ? Combien devez-vous rembourser en fin de période ? Combien quelqu'un qui possède N peut-il prêter en pré-compté ?

2. Reprendre la question 1 avec le taux post-compté.

3. En l'absence d'opportunité d'arbitrage et en supposant que l'on peut emprunter ou prêter selon les deux modalités, quelle relation doit-il y avoir entre les deux taux ?

4. Taux équivalents.
On note r_k le taux composé à capitalisation toutes les k périodes. Quelle relation doit exister entre r_k et r_{pk} si $p \in I\!N^*$?

5. Taux d'intérêts et taux de change.

Considérons une économie à deux dates et deux pays. On note par r_d le taux d'intérêt domestique, et par r_e le taux d'intérêt étranger sur la période considérée. On désigne par τ_0 et τ_1 le taux de change domestique/étranger aux dates 0 et 1, c'est à dire :

$$\tau_i \text{ unités en monnaie domestique à la date } i \quad \equiv \quad 1 \text{ unité en monnaie étrangère à la date } i\,.$$

On suppose qu'il y a parfaite mobilité des capitaux. En utilisant un raisonnement d'absence d'arbitrage, trouver une relation entre r_d, r_e, τ_0 et τ_1.

6. Taux forward, courbe de taux et zéro-coupons.

Cet exercice porte sur les taux d'intérêt ou d'emprunt à l'état, appelés *taux sans risque*, dans leur version discrète. On se place à un instant qui correspondra à la date 0 et on note, pour $0 \le k \le l$ entiers, $r_{k,l}$ la valeur actuelle le taux composé sur la période $[k, l]$ pour un placement effectué à la date k. Ce taux s'appelle le *taux forward* actuel pour la période $[k, l]$.

1. Exprimer, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, $r_{k,l}$ en fonction des $r_{i,i+1}$.

2. On note, pour $k \ge 0$, $r(k) = r_{0,k}$ le taux d'intérêt composé correspondant à un emprunt de maturité k à capitalisation par période (la fonction $k \mapsto r(k)$ est appelé *courbe des taux*). Exprimer $r_{k-1,k}$ en fonction de cette fonction. Donner le taux forward mensuel actuel (on se place début janvier 2008) pour le mois de juin 2008 si les taux d'intérêt mensuels pour des placements effectués aujourd'hui à maturités respectives fin mai 2008 et fin juin 2008 sont 0,5% et 0,6%. Pouvait-on prévoir sans calcul que ce taux serait supérieur à 0,6% ?

3. Calculer $r(k)$ dans le cas particulier où $r_{i,i+1} = r$ ne dépend pas de i.

4. On vous propose de vous donner 1 euros en k contre le paiement en j d'un montant $B(j,k)$, $j < k$. Que vaut $B(j,k)$? En déduite que connaître la fonction $k \mapsto B(0,k)$ (*courbe zéro-coupon*) est équivalent à connaître la fonction $k \mapsto r(k)$.

7. Taux instantané, courbe des taux instantanés.

Cet exercice porte sur les taux d'intérêt ou d'emprunt à l'état, appelés *taux sans risque*, dans leur version continue. On travaille ici avec les taux annuels continus, c'est à dire que dire "le taux annuel continu pour un investissement I de durée T est r" signifie que un investissement de N euros dans I de durée T rapporte Ne^{Tr} euros à la fin de l'investissement. T est compté en années, et n'est pas forcément entier, c'est l'avantage de la notion de "taux continu".

On a maintenant un repérage du temps continu. On se place à un instant qui correspondra à la date 0 et on note, pour $0 \leq t \leq t'$ (non forcément entiers), $r_{t,t'}$ la valeur actuelle le taux annuel continu sur la période $[t,t']$ pour un placement effectué à la date t. Ce taux s'appelle le *taux forward annuel continu* actuel pour la période $[t,t']$.

1. Exprimer, pour $0 \leq t \leq t' \leq t''$, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, la relation entre $r_{t,t''}$, $r_{t,t'}$ et $r_{t',t''}$.

2. On note, pour $t \geq 0$, $r(t) = r_{0,t}$ (la fonction $t \mapsto r(t)$ est appelé *courbe des taux continus*). Exprimer $r_{t,t'}$ en fonction de cette fonction. Donner le taux forward annuel continu actuel (on se place début janvier 2008) pour le mois de septembre 2008 si les taux d'intérêt annuels pour des placements effectués aujourd'hui à maturités respectives fin août 2008 et fin septembre 2008 sont 3,00% et 3,07%. Pouvait-on prévoir sans calcul que ce taux serait supérieur à 3,07% ?

3. On suppose la fonction $t \mapsto r(t)$ dérivable. Donner la limite $r_F(t)$ de $r_{t,t'}$ quand t' tend vers t, appelée *taux forward annuel instantané à maturité* t.

4. Soit $0 \leq t < t'$. On vous propose de vous donner 1 euros en t' contre le paiement en t d'un montant $B(t,t')$. Que vaut $B(t,t')$? En déduite que connaître la fonction $t \mapsto B(0,t)$ (*courbe zéro-coupon*) est équivalent à connaître la fonction $t \mapsto r(t)$.

8. Taux swap.

On considère une économie à n périodes. Le taux composé pour la période $[k-1,k]$ est r_k.

1. Soit k un entier positif. Rappeler le prix, à l'instant 0, d'un flux de N euros à recevoir à l'instant k.

2. On vous propose d'échanger les flux suivants :

a. vous recevez rN à chaque fin de période pendant n périodes, $0 < r < 1$.

b. vous payez $c_k N$ en fin de chacune des périodes $[k-1,k]$, $0 < c_k < 1$, $k = 1, \ldots, n$.

Donner l'équation que doit vérifier r pour que a. et b. soient équivalents (la solution est appelé *taux swap* du flux b).

Indication : on calculera le prix, à l'instant 0, *de chacun des deux flux.*

9. Taux actuariel.

Vous voulez disposer de N sur n périodes. Vous avez le choix entre

a. Emprunter auprès d'une banque au taux composé r_b. Dans ce cas, la banque vous demande de payer immédiatement des frais de gestion égaux à $\alpha\times$ *la somme empruntée*, $\alpha \in]0,1[$.

b. Emprunter sur le marché au taux composé r.

Calculer r qui rend a et b équivalent (c'est le *taux actuariel* associé à l'opération a.).

10. Remboursement d'emprunt.

1. Soit u_n une suite de réels telle qu'il existe $\lambda, \mu, b \in I\!R^*$, avec $\lambda \neq \mu$,tels que pour tout n,

$$u_{n+1} = \lambda u_n + b\mu^n.$$

Exprimer u_n en fonction de n et u_0 (on pourra diviser la formule précédente par λ^{n+1}).

2. On considère un prêt d'un montant V_0 au taux d'intérêt (composé) r, pour une durée de n périodes. On note par I_k et D_k l'intérêt et le remboursement du capital à payer à la fin de la période k. On désigne par $A_k = I_k + D_k$ l'annuité de la période k. Calculer les I_k, D_k et A_k dans les cas suivants.

a. Les annuités suivent une progression de la forme :

$$A_{k+1} \;=\; (1+\beta)A_k \quad \text{et} \quad A_1 \;=\; a\ ,$$

où β est une constante donnée strictement supérieure à r.

b. Les flux de remboursement du capital suivent une progression de la forme :

$$D_{k+1} \;=\; 0.9\, D_k \quad \text{et} \quad D_1 \;=\; d\ .$$

Bibliographie sommaire pour découvrir le vocabulaire de la finance :

Les premiers TDs porteront sur la découverte de "l'approche financière" des questions traitées et sur l'apprentissage de points de vocabulaire. Le polycopié du cours et les TD avec corrigés suffisent, mais au besoin, voici une bibliographie.

•*Options, futures, et autres actifs dérivés*, John Hull, chez Pearson
•*Les mathématiques financières : évaluation des actifs et analyse du risque*, Poucet, Portait, Hayat
•*Mathématiques financières*, Edith Ginglinger , Jean-Marie Hasquenoph, chez Economica
•*Méthodes mathématiques pour la finance*, Argaud, Dubois, chez Ellipses

Pour le reste (la partie plus mathématique) du cours, voici deux livres :

•*Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, D. Lamberton, B. Lapeyre, chez Ellispes
•*A Course in Financial Calculus*, Alison Etheridge, chez Cambridge University Press ; 1 edition (July 15, 2002).