Université Paris VI
Master 1 : Modèles stochastiques pour la finance

TD 10-11 : Arrêt optimal

1. Arrêt optimal dans une suite de prix indépendants. Un gestionnaire doit faire un achat entre la date 0 et la date N. Le produit à acheter a un prix très fluctuant : son prix à la date $n \in \{0, \ldots, N\}$ est donné par la v.a. X_n, où $X_0 = x_0 > 0$ est déterministe et $(X_1, \ldots, X_N)$ sont des vaiid > 0 de loi μ d'espérance $m < \infty$. On note F la fonction de répartition de la loi μ : $F(x) = \mu([0, x])$ pour tout $x \geq 0$. On cherche à minimiser le coût de l'achat.

a) Donner le noyau de la chaîne de Markov (X_n) et donner une formulation mathématique à ce problème de minimisation.

b) Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1}.

c) Calculer J_{N-1} et J_{N-2}. Essayer de formuler une hypothèse sur la forme de J_n pour n quelconque.

d) Donner une relation de récurrence descendante pour la suite $\alpha_n := \int J_n(t) \mathrm{d}\mu(t)$.

e) En dédire la formule de J_n et la stratégie optimale.

f) Donner le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n \in \{0,\ldots,N\}}$ et interpréter.

2. Arrêt optimal. Un problème de parking. Une grande avenue à sens unique se termine par un parking. Une voiture s'engage dans cette avenue afin de s'y garer, le chauffeur souhaitant aller à un concert qui a lieu au dessus du parking. Il peut soit se garer dans une des places au bord de l'avenue, qui sont numérotées en ordre croissant de $n = 0$ à $n = N - 1$, soit aller dans le parking. Chaque place de l'avenue est libre avec une probabilité p, indépendamment des autres. On pose, pour $n < N$, $X_n = 1$ si la place n est libre, 0 sinon. On pose $X_N = 1$. Le fait de se garer à la place n coûte $N - n$, qui représente l'effort pour marcher jusqu'au lieu du concert. Le coût du parking situé au bout de l'avenue est de $A > 1$. On cherche la meilleure façon de se garer lorsque le chauffeur ne voit que les places situées à sa hauteur (il ne voit pas les places situées entre lui et le parking).

a) Donner le noyau de la chaîne de Markov (X_n) et donner une formulation mathématique à ce problème de minimisation.

b) Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1}.

c) On pose $q = 1 - p$. Soit $n_0 \in \{1, \ldots, N - 1\}$ tel que

$$N - n_0 > pJ_{n_0+1}(1) + qJ_{n_0+1}(0).$$

Montrer alors que :

(i) $J_{n_0}(0) = J_{n_0}(1) = pJ_{n_0+1}(1) + qJ_{n_0+1}(0)$ et la stratégie optimale, en n_0, est de ne pas se garer,

(ii) pour tout $n \leq n_0$, $N - n > pJ_{n+1}(1) + qJ_{n+1}(0)$, $J_n(0) = J_n(1) = pJ_{n_0+1}(1) + qJ_{n_0+1}(0)$ et la stratégie optimale, en n, est de ne pas se garer.

d) Donner alors la forme de la stratégie optimale. On pourra introduire

$$n^* = \min\{n \in \{0, \ldots, N - 1\} \, ; \, N - n \leq pJ_{n+1}(1) + qJ_{n+1}(0)\} \cup \{N\}.$$

3. Arrêt pour une chaîne de Markov homogène en horizon infini. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène de noyau P et d'espace d'états E fini. Soit $f : E \to \mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in E$, on définit

$$J(x) = \inf\{\mathbb{E}_x[f(X_\tau)] \, ; \, \tau \text{ temps d'arrêt à valeurs dans } \mathbb{N}\}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, on définit aussi $J_N^N(x), J_{N-1}^N(x), \ldots, J_0^N(x)$ par

$$J_N^N(x) = f(x), \qquad \forall p = 0, \ldots, N - 1, J_p^N(x) = \min\{f(x), PJ_{p+1}^N(x)\}.$$

a) Exprimer $J_0^N(x)$ à partir d'un problème d'arrêt optimal à horizon fini.

b) Montrer que, pour tout x, pour tout $0 \leq k \leq N$, la valeur de $J_k^N(x)$ ne dépend que de x et de $N - k$.

c) Montrer que, pour tout k_0 fixé, la suite $(J_{k_0}^N(x))_{N \geq k_0}$ est décroissante.

d) Montrer que $J(x) = \lim_{N \to +\infty} J_0^N(x)$.

e) Montrer que $J(x) = \min\{f(x), PJ(x)\}$.

f) Soit $g : E \to \mathbb{R}^+$ ayant la propriété

$$\forall x \in E, g(x) \leq \min\{f(x), Pg(x)\}.$$

Pour tout $x \in E$, on définit

$$I(x) = \inf\{\mathbb{E}_x[g(X_\tau)]\,;\,\tau \text{ temps d'arrêt à valeurs dans } \mathbb{N}\}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, on définit aussi $I_N^N(x), I_{N-1}^N(x), \dots, I_0^N(x)$ par

$$I_N^N(x) = g(x), \qquad \forall p = 0, \dots, N-1, I_p^N(x) = \min\{g(x), PI_{p+1}^N(x)\}.$$

Montrer que pour tout $0 \leq p \leq N$, $I_p^N(x) = g(x)$. En déduire que $I(x) = g(x)$.

g) Montrer que J est la plus grande des fonctions $g : E \to \mathbb{R}^+$ ayant la propriété

$$\forall x \in E, g(x) \leq \min\{f(x), Pg(x)\}.$$

4. Arrêt optimal en horizons fini et infini. On considère un projet qui peut être dans différents états, éléments d'un ensemble fini F. A chaque instant $n \geq 0$, lorsque le projet est dans l'état $X_n \in F$, on a le choix, soit de quitter le projet, on obtient alors une récompense fixe M, soit de continuer, on obtient alors un gain $g(X_n)$, et le projet passe alors dans un état X_{n+1}. On suppose que X_n est une chaîne de Markov homogène de noyau P. On utilisera un facteur d'actualisation $1 + r > 1$. On cherche donc, selon que l'on travaille à horizon fini N ou à horizon infini, à résoudre le problème d'optimisation

$$V^{(N)}(x, M) = \sup\{E_x[(1+r)^{-\tau}M + \sum_{k=0}^{\tau-1}(1+r)^{-k}g(X_k)]\,;\,\tau \text{ temps d'arrêt à valeurs dans } \{0, \dots, N\}\}$$

ou

$$V(x, M) = \sup\{E_x[(1+r)^{-\tau}M + \sum_{k=0}^{\tau-1}(1+r)^{-k}g(X_k)]\,;\,\tau \text{ temps d'arrêt à valeurs dans } \mathbb{N}\}.$$

On suppose $M \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ pour tout x.

Les fonctions relatives au problème à horizon fini N seront écrites avec un exposant (N), comme dans $V^{(N)}(x, M)$.

a) Montrer que pour tout x, N, M, $V(x, M) < \infty$ et $V^{(N)}(x, M) < \infty$.

b) On fixe momentanément M. Donner $J_N^{(N)}(x)$ et la relation entre $J_n^{(N)}(x)$ et $J_{n+1}^{(N)}(x)$. Exprimer $V^{(N)}(x, M)$ à partir de $J_0^{(N)}(x)$.

c) Que vaut $V^{(0)}(x, M)$?

d) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq N$, pour tout x,

$$J_k^{(N)}(x) = \frac{1}{(1+r)^k} V^{(N-k)}(x, M).$$

En déduire que

$$V^{(N)}(x, M) = \max\{M, g(x) + \frac{1}{1+r}(PV^{(N-1)}(\cdot, M))(x)\}$$

et que à tout instant k, la stratégie optimale, à horizon N, est de s'arrêter en x si et seulement si $V^{(N-k)}(x, M) = M$.

e) Montrer que l'on a la limite croissante

$$\lim_{N \to +\infty} V^{(N)}(x, M) = V(x, M).$$