Université Paris VI
Master 1 : Modèles stochastiques pour la finance

TD 12-13-14 : Viabilité, complétude, couverture dans des modèles à temps discret

On rappelle que *proba risque neutre* est synonyme de *mesure martingale équivalente à la mesure* μ.

1. Portefeuille auto-financé. On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ supposée complète, vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$. On considère une marché discret comportant un actif sans risque B et d actifs risqués $S = (S^1, \dots, S^d)$ où S est $\mathbb{F}$-adapté : pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, pour tout $n \geq 0$, S^i_n est la valeur de l'actif S^i au soir du n-ème jour après fermeture de la bourse (le soir du 0-ème jour désigne la valeur initiale). La dynamique de B est donnée par $B_0 = 1$ et $B_n = (1 + r_n)B_{n-1}$ où $r = (r_n)_{n\geq 0}$ est positif $\mathbb{F}$-prévisible : pour tout $n \geq 0$, B_n est la valeur de l'actif B au soir du n-ème jour après fermeture de la bourse (le soir du 0-ème jour désigne la valeur initiale). La vie d'un portefeuille est modélisée par un processus $\mathbb{F}$-prévisible $(\beta, \alpha)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$: β_n (resp. α^i_n) est la quantité d'actif sans risque (resp. d'actif risqué S^i) détenue sur la période allant du matin du n-ème jour (avant ouverture de la bourse) au matin suivant. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des portefeuilles auto-financés.

1. Montrer que la condition d'autofinancement détermine entièrement β en fonction de α et de la valeur initiale du portefeuille x, et que pour tout processus prévisible (α) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on peut trouver un processus prévisible β à valeur dans $\mathbb{R}$ tel que $(\beta, \alpha) \in \mathcal{A}$ de valeur initiale x.

2. Donner, pour $n \geq 0$, la valeur $\tilde{V}^{x,\alpha}_n$ du portefeuille le soir du n-ème jour actualisée à l'instant 0 (qui est sa valeur initiale si $n = 0$) en fonction de x, de (α) et des prix actualisés des actifs risqués sur l'intervalle $[0, n]$.

3. On suppose le marché viable. Que dire de ce processus ? Quelle est, pour tout n, l'espérance conditionnelle, sous une mesure martingale, de $\tilde{V}^{x,\alpha}_n$ à un instant $k < n$ (i.e. sachant $\mathcal{F}_k$) ?

2. Etude d'un modèle simple de marché. On considère un marché à cinq états $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5\}$, deux périodes et trois actifs : un actif sans risque B de prix 1, de taux d'intérêt $r = 0$ et deux actifs risqués S^a et S^b. On fait les hypothèses suivantes sur les dynamiques de chaque actif risqué :

a. $S^a_0 = 6$ et

$$((S^a_1, S^a_2)(\omega_i))_{i=1,\dots,5} = ((5, 3), (5, 4), (5, 8), (7, 6), (7, 8)).$$

b. $S^b_0 = 3.75$ et

$$((S^b_1, S^b_2)(\omega_i))_{i=1,\dots,5} = ((3, 2), (3, 3), (3, 4), (4.5, 4), (4.5, 5)).$$

On note $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et μ une mesure non redondante sur Ω (i.e. telle que pour tout i,

$\mu(\{\omega_i\}) > 0)$.
1. Représenter les dynamiques de prix sous forme d'arbre. On note, pour $n \in \{0, 1, 2\}$,

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{(B_i, S_i^a, S_i^b), i \leq n\}.$$

Déterminer $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.
2. Déterminer l'ensemble des probabilités risque-neutre pour ce marché. Que dire du marché ?
3. On considère un actif dérivé $\mathcal{F}_2$-mesurable $H : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ (c'est un un contrat assurant à son détenteur le flux H à la date terminale 2). Il est dit réplicable (ou simulable) s'il existe un portefeuille autofinancé $\mathbf{\Phi}$ telle que $V_2^{\mathbf{\Phi}} = H$. On note H la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$H(\omega_1) = 0,\ H(\omega_2) = 0.25,\ H(\omega_3) = 4.25,\ H(\omega_4) = 1.5,\ H(\omega_5) = 3.5.$$

3.a. Déterminer le prix de l'actif aux dates 0 et 1, *i.e.* la valeur du portefeuille associé à une stratégie autofinancée $\mathbf{\Phi}$ permettant de dupliquer l'actif dérivé H.
3.b. Déterminer explicitement une telle stratégie (stratégie de couverture pour l'actif dérivé H).
4. On suppose maintenant que $S_1^a(\omega_i) = 3$ pour $i = 1, 2, 3$ mais que les autres hypothèses sont toujours satisfaites. Le marché est-il toujours viable sous ces conditions ?
5. En ajoutant un état, proposer un marché non complet.

3. Couverture et pricing pour un marché représenté par un arbre. Cet exercice généralise le précédent. On considère un marché $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. On suppose que le marché est complet et fini (i.e. Ω est fini) et se représente par un arbre. On considère un actif dérivé sur ce marché, c'est à dire une v.a. H sur Ω. Donner les grandes lignes de la constitution d'un portefeuille de couverture pour H (remarquer que ce problème est intimement lié à l'établissement du prix, à tout instant, de H, autrement-dit à son *pricing*).

4. Modèle trinômial. On considère un modèle d'échéance $T \in \mathbb{N}^*$ à deux actifs : un actif sans risque de prix B (de taux r) et un actif risqué de prix S_t ayant la dynamique suivante :

$$S_0 = s_0 > 0 \quad \text{et} \quad S_{t+1} = S_t(1 + U_{t+1}) \quad \forall t \in \{0, \ldots, T-1\}$$

où les U_t sont des variables aléatoires représentant les rendements successifs de l'actif risqué S. Elles sont définies de la manière suivante sur l'espace $\Omega = \{b, 0, h\}^T$ muni de la tribu grossière $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et d'une probabilité $\mathbb{P}$ non redondante :

$$\begin{aligned} U_t : \Omega &\to \{b, 0, h\} \\ \omega = (\omega_t)_{t \in \{1, \ldots, T\}} &\mapsto \omega_t. \end{aligned}$$

On supposera que $-1 < b < 0 < h$. On note $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale et $\mathcal{F}_t = \sigma(U_1, \ldots, U_t)$. $\tilde{S}$ désignera le prix actualisé de l'actif risqué.
A.1. Montrer que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ puis que $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1, \ldots, S_t)$ pour tout $t \in \{0, \ldots, T\}$.
A.2. Montrer qu'il y a des arbitrages possibles si $r \notin]b, h[$.

On suppose dans la suite que $r \in]b, h[$.

B. On suppose dans cette partie que $T = 1$.

B.1. Montrer que le marché est viable mais non complet.

B.2. Construire une base de l'ensemble des actifs réplicables puis retrouver le fait que le marché n'est pas complet.

B.3. On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des probabilités équivalentes à $\mathbb{P}$ sous lesquelles $\tilde{S}$ est une martingale. Calculer

$$\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K - S_1)_+]$$

lorsque $K \in]s_0(1+b), s_0[$. Comment interprète-t-on cette valeur ?

B.4. On introduit un nouvel actif noté S' sur le marché. Il s'agit d'un put européen sur l'actif S de prix d'exercice $K \in]s_0(1+b), s_0[$ (et d'échéance $T = 1$). On note $p_0 > 0$ le prix de ce put à la date 0. Ainsi, $S'_0 = p_0$ et $S'_T = (K - S_1)_+$.

B.4.a. Montrer que tout actif dérivé k est réplicable si et seulement si, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $k = \alpha(1+r) + \beta S_1 + \gamma S'_1$.

B.4.b. Montrer que tout actif est réplicable. Peut-on affirmer que le marché est complet ?

B.4.c. On note $(b, 0, h) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et $k = (k(\omega_1), k(\omega_2), k(\omega_3))$ un actif dérivé. Montrer que son prix de duplication[1] $c(k)$ s'écrit sous la forme

$$c(k) = \frac{1}{1+r}(q(\omega_1)k(\omega_1) + q(\omega_2)k(\omega_2) + q(\omega_3)k(\omega_3))$$

où l'on déterminera les $q(\omega_i)$ en fonction de s_0, h, b, r, p_0 et K.

B.4.d. Calculer $\sum_{i=1}^{3} q(\omega_i)$ et déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p_0 pour laquelle $q(\omega_1)$, $q(\omega_2)$ et $q(\omega_3)$ sont strictement positifs.

B.4.e. À quelle condition le marché est-il complet ? Comment peut-on interpréter $q(\omega_1)$, $q(\omega_2)$ et $q(\omega_3)$?

C. On suppose maintenant que $T \in \mathbb{N}^*$ et on souhaite retrouver la propriété B.1.

C.1. Supposons que $\mathbb{Q}$ soit une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$. Montrer que $\tilde{S}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale par rapport à $\mathbb{Q}$ si et seulement si $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[U_{t+1}/\mathcal{F}_t] = r$ pour tout $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.

C.2. Soient u, v, w appartenant à $]0,1[$ tels que $u + v + w = 1$. On note p l'application définie sur $\{b, 0, h\}$ par $p(b) = u$, $p(0) = v$ et $p(h) = w$. Soit $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité sur Ω satisfaisant :

$$\mathbb{Q}(U_1 = x_1, \ldots, U_T = x_T) = \prod_{t=1}^{T} p(x_t), \quad \forall (x_1, \ldots, x_T) \in \{b, 0, h\}^T.$$

C.2.a. Montrer que $\mathbb{Q}$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$. Montrer que la suite (U_t) est une suite de v.a. indépendantes sous $\mathbb{Q}$ et que

$$\mathbb{Q}(U_1 = b) = u, \quad \mathbb{Q}(U_1 = 0) = v \quad \mathbb{Q}(U_1 = h) = w.$$

C.2.b. Déterminer une condition sur u, v et w sous laquelle $\tilde{S}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale par rapport à $\mathbb{Q}$.

C.2.c. En déduire que le marché est viable mais non complet.

1. Valeur à l'instant $t = 0$ de la stratégie introduite dans la question précédente donnant k à l'instant $t = 1$.