Université Paris VI
Master 1 : Modèles stochastiques pour la finance

TD 15-16-17 : Martingales et portefeuilles, modèles de Ho et Lee

Dans toute cette feuille (sauf dans l'exercice sur les modèles de Ho et Lee), on considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ supposée complète, vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$. On considère une marché discret comportant un actif sans risque B et d actifs risqués $S = (S^1, \dots, S^d)$ où S est $\mathbb{F}$-adapté : pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, pour tout $n \geq 0$, S^i_n est la valeur de l'actif S^i au soir du n-ème jour après fermeture de la bourse (le soir du 0-ème jour désigne la valeur initiale). La dynamique de B est donnée par $B_0 = 1$ et $B_n = (1 + r_n)B_{n-1}$ où $r = (r_n)_{n\geq 0}$ est positif $\mathbb{F}$-prévisible : pour tout $n \geq 0$, B_n est la valeur de l'actif B au soir du n-ème jour après fermeture de la bourse (le soir du 0-ème jour désigne la valeur initiale). La vie d'un portefeuille est modélisée par un processus $\mathbb{F}$-prévisible $(\beta, \alpha)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$: β_n (resp. α^i_n) est la quantité d'actif sans risque (resp. d'actif risqué S^i) détenue sur la période allant du matin du n-ème jour (avant ouverture de la bourse) au matin suivant. Si le portefeuille est auto-financé, la stratégie associée est entièrement déterminée par la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ prévisibles et sa valeur initiale x. Dans ce cas, sa valeur le soir du n-ème jour est notée $V^{x,\alpha}_n$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des stratégies, i.e. l'ensemble des couples $((\alpha_n)_{n\geq 1}, x)$.

On rappelle que *probabilité risque neutre* est synonyme de *mesure martingale équivalente à la mesure* μ.

1. Information imparfaite.

On se place dans le modèle décrit au début de la feuille, mais on suppose maintenant que $d = 1$, que l'actif sans risque est de prix contant égal à 1 et que l'information de l'agent est donnée par une filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ différente de $\mathbb{F}$, i.e. $\mathcal{A}$ est maintenant l'ensemble des processus $\mathbb{G}$-prévisibles à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$ pour tout n. Dans cet exercice, on utilisera plusieurs fois la *transitivité de l'espérance conditionnelle* : si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ sont des sous-tribus de $\mathcal{F}$, pour toute v.a. X intégrable pour une mesure de probabilité $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X|\mathcal{T}_1) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X|\mathcal{T}_2)|\mathcal{T}_1).$$

a. Si $\alpha \in \mathcal{A}$ par rapport à quelle filtration $V^{x,\alpha}$ est-il adapté ?
b. Montrer que si, pour une certaine mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace mesurable sous-jacent $(\Omega, \mathcal{F})$, un processus (X_n) est une $\mathbb{F}$-martingale, alors le processus $Y_n := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_n \mid \mathcal{G}_n]$ est une $\mathbb{G}$-martingale.
c. On se fixe une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer que si le marché associé à l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, à la filtration $\mathbb{F}$ et à l'actif S est viable de proba risque neutre $\mathbb{P}$, alors le marché associé à l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, à la filtration $\mathbb{G}$ et à l'actif R défini par $R_n = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S_n|\mathcal{G}_n)$ est viable. La complétude est-elle, à priori, une propriété qui passe aussi de $\mathbb{F}$ à $\mathbb{G}$ de cette façon ?

2. Temps d'arrêt, stratégies arrêtées et options américaines.

On se place dans le modèle décrit au début de la feuille. On rappelle qu'une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt si $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de probabilités $\mathbb{P} \sim \mu$ telles que les actifs S^i sont des $I\!\!F$-martingales sous $\mathbb{P}$. On suppose $\mathcal{M} \neq \emptyset$.
a. Montrer que τ est un $I\!\!F$-temps d'arrêt si et seulement si pour tout n, $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
b. Soit τ un $I\!\!F$-temps d'arrêt borné et $\alpha \in \mathcal{A}$. On définit $\tilde{\alpha}$ par $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n 1_{\tau \geq n}$. Montrer que $\tilde{\alpha} \in \mathcal{A}$. Que vaut, pour $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{V}_n^{x,\tilde{\alpha}}$?
c. Soit $\alpha \in \mathcal{A}$, $\tau := \inf\{n \geq 0 \ : \ V_n^{0,\alpha} \geq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $N \geq 0$, on n'a pas $\tau \leq N$ μ-pp.
d. Soit $\alpha \in \mathcal{A}$ et τ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$ telle que $V_\tau^{0,\alpha} \geq 0$ et $\mu(V_\tau^{0,\alpha} > 0) > 0$. Montrer que τ n'est pas un $I\!\!F$-temps d'arrêt.
e. Soit τ un $I\!\!F$-temps d'arrêt borné et $\alpha \in \mathcal{A}$. Que vaut $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{V}_\tau^{x,\alpha}]$ si $\mathbb{P} \in \mathcal{M}$?
f. On modélise une option américaine par un processus $(G_n)_n$ et une maturité N. L'acheteur de l'option reçoit le montant G_n s'il décide de l'exercer à la date n avant N. On appelle prix de sur-réplication de l'option américaine la quantité $p := \inf\{x \in \mathbb{R} \ : \ \exists\, \alpha \in \mathcal{A}$ t.q. $V_n^{x,\alpha} \geq G_n \ \mu - p.p.$ pour tout $n \leq N\}$. On suppose le processus G borné. Montrer que $p \geq \sup\left\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[G_\tau/B_\tau] \ ; \ \mathbb{P} \in \mathcal{M}, \ \tau \in \mathcal{T}_N\right\}$ où $\mathcal{T}_N$ est l'ensemble des $I\!\!F$-temps d'arrêt à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$.

3. Gestion optimale de portefeuille et existence d'une mesure martingale.

On se place dans le modèle décrit au début de la feuille, avec $d = 1$, $B_n \equiv 1$ et Ω fini (ce qui implique que à partir d'un certain rang, $\mathcal{F}_n$ est constant, on considérera donc que n varie dans un ensemble $\{0, \ldots, N\}$). On suppose également que μ est une mesure de probabilité que l'on note $\mathbb{Q}$ et on désigne par $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ l'espérance sous cette mesure. On se donne une fonction U strictement croissante concave C^2 et majorée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On fixe $x \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une solution $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ au problème de maximisation de l'utilité espérée :

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[U(V_N^{x,\alpha})\right] .$$

a. On note, pour $y \in \mathbb{R}$, $A_N^y := \{V_N^{y,\alpha} \ : \ \alpha \in \mathcal{A}\}$. Montrer que $A_N^x = \{Z + x \ : \ Z \in A_N^0\}$, en déduire que $\hat{X} := V_N^{x,\hat{\alpha}} - x$ appartient à A_N^0 et vérifie

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[U(x + \hat{X})\right] = \sup_{X \in A_N^0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[U(x + X)\right] .$$

b. Montrer que A_N^0 est un sous-ev de $\mathbb{R}^\Omega$.
c. En déduire que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $X \in A_N^0$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[U(x + \hat{X})\right] \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[U(x + \hat{X} + \varepsilon X)\right] .$$

d. En déduire que, pour tout $X \in A_N^0$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X\hat{Y}\right] = 0$$

où $\hat{Y} = U'(x + \hat{X})$.
e. Montrer que $\hat{Y} > 0$ (on montrera que $U' > 0$).
f. On désigne par $\mathbb{P}$ la mesure de densité par rapport à $\mathbb{Q}$ donnée par $\hat{Y}/\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{Y}]$. Montrer que pour tout $n \in \{1, \ldots N\}$, pour tout $B \in \mathcal{F}_{n-1}$, $1_B(S_n - S_{n-1}) \in A_N^0$, en déduire que $\tilde{S} = S$ est une $(I\!\!F, \mathbb{P})$-martingale. Qu'en déduit-on quand au marché ?

4. Modèle de Ho et Lee. L'exercice suivant a pour objet la modélisation de l'évolution des prix des zéros-coupons d'échéance non immédiate. L'investissement dans un zéro-coupon d'échéance courte est sans risque, car il est en générale calculé au taux en cours. Mais lorsque l'échéance est lointaine, l'évolution des taux peut rendre l'investissement très aléatoire. Par exemple, si le taux annuel en cours est de 3%, l'investissement sur un zéro-coupon à taux annuel de 3% sur un an ou six mois n'est pas très risqué, mais si l'échéance est de 20 ans et que d'ici là, les taux pratiqués usuellement passent à des valeurs comme 6%, l'investissement se révélera mauvais. Si, par contre, les taux usuels pratiqués passent à 1%, l'investissement se révèle meilleur.

On considère un marché financier en temps discret construit sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans lequel les flux ne sont échangés qu'aux dates $1, 2, \ldots, T^*$ où T^* est un entier strictement positif. Par la suite, on notera $\mathbb{T} = \{1, \ldots, T^*\}$ et on munit $(\Omega, \mathcal{F})$ d'une filtration $I\!\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ supposée complète et vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{F}_{T^*} = \mathcal{F}$.

On suppose qu'il existe un processus adapté strictement positif r et un actif financier, appelé actif sans risque, tel que 1 euro investi à la date t (le soir du t-ème jour) rapporte $1+r_t$ euros à la date $t+1$ (dans la journée du $t+1$-ème jour). Par la suite, on considérera le processus B defini par

$$B_t := \prod_{j=0}^{t-1}(1 + r_j) \ \ , \ t \leq T^* \ .$$

Un zéro coupon de maturité $T \leq T^*$ et de nominal 1 est un produit financier qui paie à son acheteur un unique flux de 1 en T (dans la journée du T-ème jour). On note $P_t(T)$ son prix à la date $t \leq T$.

On suppose que, pour chaque $T \leq T^*$, il existe des processus adaptés strictement positifs $u(T)$ et $d(T)$ tels que pout tout t, $\Omega = A_t(T) \cup B_t(T)$, avec

$$A_t(T) = \left\{ P_{t+1}(T) = u_t(T)\frac{P_t(T)}{P_t(t+1)} \right\}, \quad B_t(T) = \left\{ P_{t+1}(T) = d_t(T)\frac{P_t(T)}{P_t(t+1)} \right\},$$

que l'union est disjointe pour $t < T - 1$, et qu'on a, pour tout $0 \leq t < T$,

$$u_t(T) > d_t(T) \ \ \mathbb{P} - \text{p.s.} \ \ , \ \forall\, 0 \leq t < T - 1 \ .$$

Cela signifie que, pour tout $t < T$, au lieu d'avoir l'égalité $P_t(T) = P_t(t + 1)P_{t+1}(T)$, qui signifierait que les prévisions de conjoncture sur l'intervalle $[t+1, T]$ n'ont pas changé entre t et $t + 1$, on a une des deux possibilités suivantes :

$$\begin{tikzcd} & u_t(T)P_t(T) \\ P_t(t+1)P_{t+1}(T) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & d_t(T)p_t(T) \end{tikzcd}$$

On notera, pour tout T, p le processus adapté défini par

$$p_t(T) := \mathbb{P}\left[A_t(T) \mid \mathcal{F}_t\right] \ ,$$

et on supposera qu'il est à valeurs dans $]0,1[$ si $t < T-1$.

1. a. Que vaut $P_T(T)$? Par convention, on notera maintenant $P_t(T) := B_t/B_T$ si $t > T$ (attention, cette convention n'est bien entendu valable que pour $t > T$, de façon à donner un sens à $P_t(T)$ pour tout t).

b. On appelle stratégie financière $(\beta, \alpha(1), \ldots, \alpha(T^*))$ un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^{T^*+1}$. Ici, pour tout $T \in \mathbb{T}$, $\alpha_t(T)$ correspond au nombre de zéro-coupons de maturité T achetés le soir du $t-1$-ème jour, après la fermeture de la bourse, et β_t désigne le montant placé au taux sans risque. On note $V_t^{x,\alpha}$ la richesse, le soir du t-ème jour, associée à une dotation initiale $x \in \mathbb{R}$ et à une stratégie d'investissement α (on a vu que sous l'hypothèse d'autofinancement, β était entièrement déterminé par α et x). Donner la dynamique de la richesse $V^{x,\alpha}$ (i.e. la relation entre $V_{t+1}^{x,\alpha}$ et $V_t^{x,\alpha}$) sous la condition d'autofinancement.

2. Soit $t < T \leq T^*$.

a. Montrer que $P_t(t+1) = B_t/B_{t+1} = (1+r_t)^{-1}$.

b. Soit $t < T-1$. Montrer que $\mathbb{P}\left[d_t(T) > 1\right] = 1$ implique $P_{t+1}(T) > P_t(T)B_{t+1}/B_t$ $\mathbb{P}-$p.s. En déduire qu'il existe alors un arbitrage (on exhibera la stratégie d'arbitrage).

c. Reprendre la question précédente en supposant seulement que $\mathbb{P}\left[d_t(T) \geq 1\right] > 0$.

d. Montrer que l'on ne peut pas non plus avoir $\mathbb{P}\left[u_t(T) \leq 1\right] > 0$ pour $t < T-1$.

e. En déduire une condition sur u et d nécessaire à l'absence d'opportunité d'arbitrage.

3. On suppose maintenant que $u_t(T) > 1 > d_t(T)$ $\mathbb{P}-$p.s. pour tout $t < T \leq T^*$.

a. Montrer que, pour tout $T \leq T^*$, il existe un unique processus adapté $q(T)$ à valeurs dans $]0,1[$ tel que

$$q_t(T)u_t(T)\frac{1}{P_t(t+1)} + (1-q_t(T))d_t(T)\frac{1}{P_t(t+1)} = \frac{B_{t+1}}{B_t} \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}\ ,\ \forall\, t < T\ .$$

b. Posons, pour tout j, $q_j = q_j(T^*)$, $p_j = p_j(T^*)$, $A_j = A_j(T^*)$. Soit H le processus défini sur $\mathbb{T}$ par

$$H_t := \prod_{j=0}^{t-1}\left(\frac{q_j}{p_j}1_{A_j} + \frac{(1-q_j)}{1-p_j}1_{A_j^c}\right).$$

Montrer que H est une $\mathbb{P}$-martingale sur $\mathbb{T}$.

c. Soit $\mathbb{Q}$ la mesure de densité H_{T^*} par rapport à $\mathbb{P}$. Montrer qu'il s'agit bien d'une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$.

d. Montrer que $\mathbb{Q}$ est l'unique mesure de probabilité sous laquelle $B^{-1}P(T^*)$ est une martingale.

e. En déduire qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage $B^{-1}P(T)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale pour tout $T \leq T^*$ et que

$$q_t(T^*)u_t(T) + (1-q_t(T^*))d_t(T) = 1 \ \ \mathbb{P}-\text{p.s.}\ ,\ \forall\, t < T \leq T^*\ .$$

4. On suppose à partir de maintenant que $u_t(T) = U(T-t)$ et $d_t(T) = D(T-t)$, où U et D sont des fonctions déterministes, et on définit la suite de variables aléatoires $(\xi_t(\delta))$ par

$$\xi_{t+1}(\delta) := U(\delta)1_{A_t(t+\delta)} + D(\delta)1_{A_t^c(t+\delta)}\ \ ,\ t < T^*\ ,\ \delta \leq T^* - t\ ,$$

de sorte que

$$P_t(T) = \xi_t(T - t + 1)\frac{P_{t-1}(T)}{P_{t-1}(t)} \ .$$

a. Montrer que

$$\prod_{j=0}^{t-1} P_j(j+1) = P_0(t) \prod_{j=1}^{t-1} \xi_j(t+1-j) \ \ , \ t \leq T^*$$

b. En déduire que

$$P_t(T) = \frac{P_0(T)}{P_0(t)} \frac{\prod_{j=1}^{t} \xi_j(T-j+1)}{\prod_{j=1}^{t-1} \xi_j(t-j+1)} \ \ , \ t \leq T \leq T^* \ .$$

c. Que vaut r_t en fonction de ξ et P_0 ?