

Université Pierre et Marie Curie
Modèles stochastiques pour la finance 2012-2013

TD 2 : Obligations, contrats futurs et options

On rappelle qu'une *obligation* de *maturité* n , de *coupons* C_1, \dots, C_n et de *valeur de remboursement* R est un flux dans lequel, si on se place à la date 0, on reçoit C_1 à la date 1, C_2 à la date 2, \dots , C_n à la date n , plus R à la date n .

En général, les coupons sont calculés à partir d'un nombre N , appelé *nominal* et d'un nombre c appelé *taux de coupon*, tels que pour tout k , $C_k = Nc$.

Exercice 1. Evaluation d'obligations.

On considère une obligation O de maturité T années. Le taux de coupon est c et le nominal N . La valeur de remboursement est égale R . On note, pour tout n , r_n le taux (à composition annuelle continue) sans risque du zéro coupon de maturité n années à la date actuelle, notée 0.

a. Rappeler le prix d'un zéro coupon de maturité n et de nominal égal à 1 (c'est à dire ce que l'on doit payer à la date 0 pour recevoir 1 à la date n).

b. Que vaut l'obligation O à l'instant 0 ? Dans le cas où r_n est constante et vaut r , avec $c = e^r - 1$ et $R = N$, quelle est cette valeur ? Comment cela se comprend-il ?

c. On suppose maintenant que la courbe des taux zéro coupon est plate à toute date, i.e. $r_n = r$ pour tout n et ne varie pas quand le temps passe. Que vaut l'obligation en $t \in [0, T]$? Comment se comporte le prix de O lorsque r évolue ? La valeur absolue de la dérivée du prix rapportée au prix (i.e. divisée par le prix) est appelée *sensibilité* et est notée S .

d. On suppose toujours que la courbe est plate et ne bougera pas dans l'avenir. Quel montant $M_\tau(r)$ obtenez vous en $\tau \in [0, T]$ si vous achetez l'obligation à maturité T en 0, ré-investissez tous les coupons au taux zéro coupon, et la revendez en τ ?

e. Calculer la durée de détention de l'obligation D telle que la richesse obtenue suivant la stratégie exposée en d. ne soit pas sensible à une petite variation de r (i.e. telle que la dérivée de cette richesse par rapport à r soit nulle) ? On appelle cette durée la *duration* de l'obligation.

f. Quel lien existe-t-il entre sensibilité et duration ?

Exercice 2. Emission obligataire.

On considère une obligation O de maturité T années qui doit être émise aujourd'hui. Le taux de coupon est c , le nominal N , la valeur de remboursement est égale à R et la valeur d'émission (i.e. le prix) est E . On note r_n le taux annuel (composé) sans risque du zéro coupon de maturité n années.

Donner la relation entre E, N, c, R et les r_n .

Exercice 3. Contrat à terme.

On considère un contrat de vente (i.e. un contrat qui donne le droit de vendre) au prix K d'un actif dans T années, dont l'estimation actuelle du prix dans T années est $S < K$, avec paiement en T . On note r_n le taux annuel (composé) sans risque du zéro coupon de maturité n années. Quel est le prix de revente actuel d'un tel contrat ?

Exercice 4. Taux de change futur.

On note r_e et r_d les taux étrangers et domestiques à un an, τ_0 le nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère en 0. On considère un contrat par lequel un agent A achète à un agent B le droit de lui échanger, dans un an, N unités de devise étrangère au taux F (i.e. contre FN unités de devise domestique). Combien ce contrat vaut-il aujourd'hui ?

Exercice 5. Taux de change futur et fourchette de prix. On note encore r_e et r_d les taux étrangers et domestiques à un an mais cette fois-ci, à la date 0, les taux de changes ne sont plus les mêmes à l'achat et à la vente, i.e.

- τ_0^a = nombre d'unités de devise étrangère obtenues contre une unité de devise domestique,
- τ_0^v = nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère.

On note F le taux de change futur, c'est à dire que F est un nombre tel que à la date 1,

- F = nombre d'unités de devise étrangère obtenues contre une unité de devise domestique,
- $1/F$ = nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère.

- a. Quel lien doit-il y avoir entre τ_0^a et τ_0^v ?
- b. Quelle est la fourchette de prix dans laquelle doit se trouver le taux de change futur F en l'absence d'opportunités d'arbitrage ?

Exercice 6. Parité call-put.

On considère un actif financier S de prix S_t à la date t .

a. Un call européen est un contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer S à un prix K (strike) fixé à l'avance à une date T (maturité) si l'acheteur le désire (exerce son option). On note C_t le prix à la date t du call de maturité T et de strike K . Quelle est la valeur en T du call (du point de vue de l'acheteur) ?

b. Un put européen est un contrat par lequel le vendeur s'engage à acheter S à un prix K (strike) fixé à l'avance à une date T (maturité) si l'acheteur le désire (exerce son option). On note P_t le prix à la date t du put de maturité T et de strike K . Quelle est la valeur en T du put (du point de vue de l'acheteur) ?

c. On note B_t le prix en t du zéro coupon versant 1 en T . Rappeler ce que ça représente. Montrer que en absence d'opportunités d'arbitrage, $C_t - P_t = S_t - KB_t$. Ce lien est appelé *relation de parité call-put*.

Exercice 7. Option américaine.

On note B_t le prix en t du zéro coupon versant 1 en T . On considère un actif financier S de prix S_t à la date t . Un call américain est un contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer S à un prix KB_t (strike) fixé à l'avance à une date t (quelconque) inférieure à T si l'acheteur exerce son option en t . On note C_t le prix à la date t du call européen de maturité T et de strike K et C_t^a le prix du call américain correspondant. On note B_t le prix en t du zéro coupon versant 1 en T .

- a. Montrer que en l'absence d'opportunité d'arbitrage, $C_t^a \geq C_t$.
- b. On suppose que S_t est aléatoire et que $P(S_T > K) > 0$ et que $P(S_T < K) > 0$. Montrer qu'en l'absence d'opportunités d'arbitrage $C_t > [S_t - KB_t]^+$.
- c. En déduire que sous les hypothèses précédentes, il vaut toujours mieux vendre une option américaine plutôt que de l'exercer, et enfin que $C_t^a = C_t$.