

Université Pierre et Marie Curie  
Modèles stochastiques pour la finance 2012-2013

**TD 2 : Obligations, contrats futurs et options**

On rappelle qu'une *obligation* de *maturité*  $n$ , de *coupons*  $C_1, \dots, C_n$  et de *valeur de remboursement*  $R$  est un flux dans lequel, si on se place à la date 0, on reçoit  $C_1$  à la date 1,  $C_2$  à la date 2,  $\dots$ ,  $C_n$  à la date  $n$ , plus  $R$  à la date  $n$ .

En général, les coupons sont calculés à partir d'un nombre  $N$ , appelé *nominal* et d'un nombre  $c$  appelé *taux de coupon*, tels que pour tout  $k$ ,  $C_k = Nc$ .

**Exercice 1.** Evaluation d'obligations.

On considère une obligation  $O$  de maturité  $T$  années. Le taux de coupon est  $c$  et le nominal  $N$ . La valeur de remboursement est égale  $R$ . On note, pour tout  $n$ ,  $r_n$  le taux (à composition annuelle continue) sans risque du zéro coupon de maturité  $n$  années à la date actuelle, notée 0.

a. Rappeler le prix d'un zéro coupon de maturité  $n$  et de nominal égal à 1 (c'est à dire ce que l'on doit payer à la date 0 pour recevoir 1 à la date  $n$ ).

b. Que vaut l'obligation  $O$  à l'instant 0 ? Dans le cas où  $r_n$  est constante et vaut  $r$ , avec  $c = e^r - 1$  et  $R = N$ , quelle est cette valeur ? Comment cela se comprend-il ?

c. On suppose maintenant que la courbe des taux zéro coupon est plate à toute date, i.e.  $r_n = r$  pour tout  $n$  et ne varie pas quand le temps passe. Que vaut l'obligation en  $t \in [0, T]$  ? Comment se comporte le prix de  $O$  lorsque  $r$  évolue ? La valeur absolue de la dérivée du prix rapportée au prix (i.e. divisée par le prix) est appelée *sensibilité* et est notée  $S$ .

d. On suppose toujours que la courbe est plate et ne bougera pas dans l'avenir. Quel montant  $M_\tau(r)$  obtenez vous en  $\tau \in [0, T]$  si vous achetez l'obligation à maturité  $T$  en 0, ré-investissez tous les coupons au taux zéro coupon, et la revendez en  $\tau$  ?

e. Calculer la durée de détention de l'obligation  $D$  telle que la richesse obtenue suivant la stratégie exposée en d. ne soit pas sensible à une petite variation de  $r$  (i.e. telle que la dérivée de cette richesse par rapport à  $r$  soit nulle) ? On appelle cette durée la *duration* de l'obligation.

f. Quel lien existe-t-il entre sensibilité et duration ?

**Exercice 2.** Emission obligataire.

On considère une obligation  $O$  de maturité  $T$  années qui doit être émise aujourd'hui. Le taux de coupon est  $c$ , le nominal  $N$ , la valeur de remboursement est égale à  $R$  et la valeur d'émission (i.e. le prix) est  $E$ . On note  $r_n$  le taux annuel (composé) sans risque du zéro coupon de maturité  $n$  années.

Donner la relation entre  $E, N, c, R$  et les  $r_n$ .

**Exercice 3.** Contrat à terme.

On considère un contrat de vente (i.e. un contrat qui donne le droit de vendre) au prix  $K$  d'un actif dans  $T$  années, dont l'estimation actuelle du prix dans  $T$  années est  $S < K$ , avec paiement en  $T$ . On note  $r_n$  le taux annuel (composé) sans risque du zéro coupon de maturité  $n$  années. Quel est le prix de revente actuel d'un tel contrat ?

**Exercice 4.** Taux de change futur.

On note  $r_e$  et  $r_d$  les taux étrangers et domestiques à un an,  $\tau_0$  le nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère en 0. On considère un contrat par lequel un agent  $A$  achète à un agent  $B$  le droit de lui échanger, dans un an,  $N$  unités de devise étrangère au taux  $F$  (i.e. contre  $FN$  unités de devise domestique). Combien ce contrat vaut-il aujourd'hui ?

**Exercice 5.** Taux de change futur et fourchette de prix. On note encore  $r_e$  et  $r_d$  les taux étrangers et domestiques à un an mais cette fois-ci, à la date 0, les taux de changes ne sont plus les mêmes à l'achat et à la vente, i.e.

- $\tau_0^a$  = nombre d'unités de devise étrangère obtenues contre une unité de devise domestique,
- $\tau_0^v$  = nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère.

On note  $F$  le taux de change futur, c'est à dire que  $F$  est un nombre tel que à la date 1,

- $F$  = nombre d'unités de devise étrangère obtenues contre une unité de devise domestique,
- $1/F$  = nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère.

- a. Quel lien doit-il y avoir entre  $\tau_0^a$  et  $\tau_0^v$  ?
- b. Quelle est la fourchette de prix dans laquelle doit se trouver le taux de change futur  $F$  en l'absence d'opportunités d'arbitrage ?

**Exercice 6.** Parité call-put.

On considère un actif financier  $S$  de prix  $S_t$  à la date  $t$ .

a. Un call européen est un contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer  $S$  à un prix  $K$  (strike) fixé à l'avance à une date  $T$  (maturité) si l'acheteur le désire (exerce son option). On note  $C_t$  le prix à la date  $t$  du call de maturité  $T$  et de strike  $K$ . Quelle est la valeur en  $T$  du call (du point de vue de l'acheteur) ?

b. Un put européen est un contrat par lequel le vendeur s'engage à acheter  $S$  à un prix  $K$  (strike) fixé à l'avance à une date  $T$  (maturité) si l'acheteur le désire (exerce son option). On note  $P_t$  le prix à la date  $t$  du put de maturité  $T$  et de strike  $K$ . Quelle est la valeur en  $T$  du put (du point de vue de l'acheteur) ?

c. On note  $B_t$  le prix en  $t$  du zéro coupon versant 1 en  $T$ . Rappeler ce que ça représente. Montrer que en absence d'opportunités d'arbitrage,  $C_t - P_t = S_t - KB_t$ . Ce lien est appelé *relation de parité call-put*.

**Exercice 7.** Option américaine.

On note  $B_t$  le prix en  $t$  du zéro coupon versant 1 en  $T$ . On considère un actif financier  $S$  de prix  $S_t$  à la date  $t$ . Un call américain est un contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer  $S$  à un prix  $KB_t$  (strike) fixé à l'avance à une date  $t$  (quelconque) inférieure à  $T$  si l'acheteur exerce son option en  $t$ . On note  $C_t$  le prix à la date  $t$  du call européen de maturité  $T$  et de strike  $K$  et  $C_t^a$  le prix du call américain correspondant. On note  $B_t$  le prix en  $t$  du zéro coupon versant 1 en  $T$ .

a. Montrer que en l'absence d'opportunité d'arbitrage,  $C_t^a \geq C_t$ .

b. On suppose que  $S_t$  est aléatoire et que  $P(S_T > K) > 0$  et que  $P(S_T < K) > 0$ . Montrer qu'en l'absence d'opportunités d'arbitrage  $C_t > [S_t - KB_t]^+$ .

c. En déduire que sous les hypothèses précédentes, il vaut toujours mieux vendre une option américaine plutôt que de l'exercer, et enfin que  $C_t^a = C_t$ .