TD 20-21 : Modèles de marchés - Mouvement brownien

1. Taux de change. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini non redondant ($\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) et $T \in \mathbb{N}^*$. On le munit d'une filtration $\mathbb{F}$ telle que $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale et $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$. On considère un marché de change d'échéance $T \in \mathbb{N}^*$ constitué d'un unique actif risqué, relatif au taux de change entre les devises $E (= \text{euro})$ et $D (= \text{dollar})$. Ce taux de change est un processus $(S_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ $\mathbb{F}$ -adapté strictement positif défini par $1E = S_t D$. On note $(S_t^{0,D})$ et $(S_t^{0,E})$ les actifs sans risque des devises D et E de valeurs respectives $1D$ et $1E$ en $t = 0$. On suppose bien entendu que pour tout t , $S_t, S_t^{0,D}, S_t^{0,E}$ sont > 0 .

1.a. Du point de vue européen, quel est l'actif négociable (i.e. risqué) noté S^E ? Quelle est la valeur au temps t actualisée en 0 de cet actif? Même question du point de vue des USA (où l'actif risqué sera noté S^D).

1.b. On suppose que le marché de change est viable dans le pays de la devise D . Quelle est la traduction probabiliste de cette propriété?

2. Soit $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$ et $L : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+^*$ une v.a. telle que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L) = 1$. On appelle $\mathbb{Q}$ la probabilité de densité L par rapport à $\mathbb{P}$. Montrer que pour toute variable aléatoire X sur Ω ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/\mathcal{A}] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XL/\mathcal{A}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L/\mathcal{A}]}.$$

3.a. Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $\tilde{S}^D$ est une martingale. Montrer que $\mathbb{Q}^*$ définie par $\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}^*} = \frac{\tilde{S}_T^D}{\tilde{S}_0^D}$ est également une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$.

3.b. En déduire que si le marché de change est viable aux USA, il l'est également en Europe.

3.c. La même conclusion est-elle valable pour la complétude?

3.d. On suppose les marchés complets. A quelle condition sur (S_t) les actifs risqués respectifs à ce marché de change dans chacun des deux pays seront-elles des martingales sous la même probabilité?

4. Retrouver le résultat précédent en montrant que si (M_t) est $\mathbb{F}$ -adapté, strict. positif et si (M_t) et $(1/M_t)$ sont des martingales sous la même probabilité alors $M_t = M_0$ pour tout $t \in \{0, \dots, T\}$.

2. Caractérisation du Mouvement Brownien.

Soit B un processus continu issu de 0 (i.e. $B_0 = 0$) et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle. Montrer que B est un mouvement Brownien si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus complexe M^λ défini par $M_t^\lambda := e^{i\lambda B_t + \frac{\lambda^2 t}{2}}$ est une $\mathcal{F}$ -martingale. On rappelle que pour toute famille $(X_1, \dots, X_d, Y)$ de v.a. réelles,

$$Y \text{ indep de } (X_1, \dots, X_d) \iff \forall \nu \in \mathbb{R}^d, \mu \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{i\langle \nu, X \rangle + \mu Y}) = \mathbb{E}(e^{i\langle \nu, X \rangle})\mathbb{E}(e^{i\mu Y}).$$

3. Loi des grands nombres pour le mouvement Brownien. On admettra l'inégalité de Doob pour les martingales continues (qui peut facilement se déduire de l'inégalité vue

en cours pour les intégrales discrètes) : si M est une martingale continue, alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} M_s^2\right) \leq 4\mathbb{E}(M_t^2).$$

Soit B un mouvement Brownien réel. On cherche à montrer que presque sûrement,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0.$$

1. En utilisant l'inégalité de Doob et l'inégalité de Markov, montrer, pour tout $n \geq 0$ et $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\max_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{|B_t|}{2^n} > \varepsilon\right) \leq 8\varepsilon^{-2}2^{-n}.$$

2. En déduire que presque sûrement, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, l'événement

$$\left\{\max_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{|B_t|}{t} \leq \varepsilon\right\}$$

est réalisé, puis conclure que presque sûrement,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0.$$

3. On restreint l'espace des possibles à l'événement de probabilité 1

$$\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0\right\}.$$

En déduire que la fonction aléatoire nulle en zéro et de valeur $tB_{1/t}$ en tout $t > 0$ est bien un mouvement Brownien.

4. Loi du zéro-un de Blumenthal. I. Rappels. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilités. On rappelle qu'une *sous-tribu* de $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{F}$ contenant l'ensemble vide et stable par passage au complémentaire et par union dénombrable, alors qu'une *sous-algèbre* de $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{F}$ contenant l'ensemble vide et stable par passage au complémentaire et par union finie.

On rappelle que deux parties X, Y de $\mathcal{F}$ sont dites indépendantes si pour tous $A \in X, B \in Y$,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

On rappelle aussi que si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont deux sous-algèbres de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont indépendantes si et seulement si les tribus qu'elles engendrent sont indépendantes.

a) Montrer qu'une intersection quelconque de sous-tribus est une sous-tribu.

b) Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ tel que, tout $t \in I$, $\mathcal{G}_t$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$ telle que

$$t \leq t' \Rightarrow \mathcal{G}_{t'} \subset \mathcal{G}_t.$$

Montrer que

$$\mathcal{G} := \cup_{t \in I} \mathcal{G}_t$$

est une sous-algèbre de $\mathcal{F}$.

II. Loi du zéro-un de Blumenthal. Soit B un mouvement Brownien et, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s; 0 \leq s \leq t\})$$

et

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\{B_s; 0 \leq s\}).$$

On définit $\mathcal{F}_{0+} := \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t$.

a) Montrer que $\mathcal{F}_{0+}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}_\infty$ et que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{0 < t < \varepsilon} \mathcal{F}_t.$$

b) Soit, pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{F}^\varepsilon := \sigma(\{B_t - B_\varepsilon; \varepsilon \leq t\}).$$

Montrer que

$$\mathcal{A} := \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}^\varepsilon$$

est une sous-algèbre de $\mathcal{F}_\infty$ dont la tribu engendrée est $\mathcal{F}_\infty$.

c) En déduire que $\mathcal{F}_{0+}$ est indépendante de $\mathcal{F}_\infty$, puis que pour tout $A \in \mathcal{F}_{0+}$,

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$

5. Non dérivabilité du mouvement brownien. Soit B un mouvement Brownien. Montrer que p.s.,

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

En déduire que pour tout $s \geq 0$, la fonction $t \mapsto B_t$ n'est p.s. pas dérivable à droite en s .

Indication : On pourra considérer les événements $A_k = \{B_{\varepsilon_k} / \sqrt{\varepsilon_k} > M\}$ pour $M > 0$ et une suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ décroissant vers 0.

Remarque : on peut montrer que p.s., la fonction $t \mapsto B_t$ n'est dérivable en aucun point.

6. Loi de l'arcsinus. Soit B un mouvement Brownien. On définit $d_1 = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$ et $g_1 = \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$.

1. En calculant $\mathbb{P}(d_1 \leq t)$ pour $t > 1$, trouver la densité de la loi de d_1 (on rappelle que pour tout t , la loi de $S_t := \sup_{s \in [0, t]} B_s$ est la loi de $|B_t|$).

2. On admettra que le processus $(X_t, t \geq 0)$ défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{1/t}$ pour $t > 0$ est un mouvement brownien réel standard partant de 0. Montrer que $g_1 = (d_1)^{-1}$ en loi. En déduire la densité de la loi de g_1 (la loi de g_1 s'appelle la loi de l'arcsinus).