Université Paris VI
Master 1 : Introduction au calcul stochastique pour la finance (MM065)

TD 3 et 4 : Processus à temps discret et Martingales

1. Conditionnement dans un exemple simple 1 Soit $\Omega = \{1, \dots, 5\}$ muni de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ définies par $X(1) = X(2) = 0$, $X(3) = 1$, $X(4) = X(5) = 2$ et $Y(\omega) = \omega^2$ pour tout $\omega \in \Omega$.

a) Donner la tribu $\sigma(X)$ engendrée par X (rappel : c'est la plus petite tribu $\mathcal{G}$ de Ω telle que $X : (\Omega, \mathcal{G}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, i.e. l'intersection de ces tribus).

b) On munit Ω de la loi uniforme. Donner $\mathbb{E}(Y|\sigma(X))$.

c) Même question si la loi choisie n'est plus la loi uniforme sur ω, mais $(p_1, \dots, p_5)$ avec $p_1 = p_2 = 1/4$ et $p_3 = p_4 = p_5 = 1/6$.

2. Conditionnement dans un exemple simple 2 Soit Ω un ensemble fini muni de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et d'une loi P (telle que pour tout $E \subset \Omega$, $P(E) = 0 \Rightarrow E = \emptyset$).

a) Soit $A = \{A_1, \dots, A_p\}$ une partition de Ω, c'est à dire une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dont les éléments sont non vides, 2 à 2 disjoints et d'union Ω. Montrer que la tribu $\sigma(A)$ engendrée par A (c'est à dire la plus petite tribu contenant A, c'est à dire l'intersection des tribus contenant A) est

$$\sigma(A) = \{\cup_{j=1}^r A_{i_j} \; ; \; 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p\}.$$

b) Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(Y|\sigma(A)) = \sum_{i=1}^p y_i \mathbb{1}_{A_i},$$

avec $y_i = \frac{\sum_{\omega \in A_i} P(\{\omega\}) Y(\omega)}{P(A_i)}$ pour tout i.

c) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ prenant exactement p valeurs 2 à 2 distinctes $x_1, \dots, x_p$. Montrer que

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(\{x_1\}), \dots, X^{-1}(\{x_p\})\}).$$

3. Questions basiques sur les filtrations 1. Une union de tribus est-elle toujours une tribu ?

2. Soit $(\mathcal{F}_n)$ une filtration (suite croissante de tribus) d'un ensemble Ω. $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ est-elle toujours une tribu ?

3. Que dire d'une martingale (resp. d'une sous-martingale, d'une sur-martingale) par rapport à une filtration constante (i.e. telle que $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_0$ pour tout n) ? Que dire d'un temps d'arrêt par rapport à une filtration constante ?

4. Conditionnement et indépendance 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Bernoulli de paramètres $p, q \in]0, 1[$. On pose $Z = \mathbb{1}_{\{X+Y=0\}}$ et $\mathcal{G} = \sigma(Z)$. Calculer $E(X \mid \mathcal{G})$ et $E(Y \mid \mathcal{G})$.

2. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

3. Soient Z, T des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans des espaces mesurables quelconques $(\Omega', \mathcal{A}')$, $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ telles que

pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, pour toutes fonctions numériques mesurables bornées f, g définies respectivement sur $(\Omega', \mathcal{A}')$, $(\Omega'', \mathcal{A}'')$, $E(f(Z)|\mathcal{B})$ et $E(g(T)|\mathcal{B})$ sont indépendantes. Montrer que Z ou T est p.s. constante.

5. Rappels : Martingales et sur-martingales.

On se place sur une espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

1. Soit $Y \in L^1$. On définit le processus $X = (X_n)_{n\geq 0}$ par $X_n = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)$. Montrer que X est une $\mathbb{F}$-martingale.

2. Soit (X_n) une sous-martingale et une fonction convexe croissante $\varphi\ : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que pour tout n, $\varphi(X_n) \in L^1$. Montrer que $(\varphi(X_n))_{n\geq 0}$ est une sous-martingale pour $\mathbb{F}$.

3. Soit (X_n) une sous-martingale et $K \in \mathbb{R}$. Montrer que $(X_n \vee K)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale pour $\mathbb{F}$.

4. On suppose que $Y \in L^1$ est $\mathcal{F}_N-$mesurable et on définit $Z = (Z_n)_{n\leq N}$ par $Z_N = Y$ et $Z_n = \xi_n \vee \mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$ pour $n \leq N-1$ où $\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}$ est $\mathbb{F}-$adapté et borné. Montrer que Z est une sur-martingale.

5. Soit (X_n) une martingale et $H = (H_n)_{n\geq 0}$ un processus $\mathbb{F}$-prévisible borné. On définit $V = (V_n)_{n\geq 0}$ par $V_n = \sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1})$ pour $n \geq 0$. Montrer que V est une martingale pour $\mathbb{F}$.

6. Montrer qu'un processus prévisible intégrable est une martingale ssi il est p.s. constant.

7. Soit (X_n) une martingale L^2 et telle que $X_{n+1} - X_n$ est indépendant de $\mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $W = (W_n)_{n\geq 0}$ défini par $W_n = (X_n - \mathbb{E}\left[X_n\right])^2 -$ Var(X_n) pour $n \geq 0$ est une martingale.

6. Une application du théorème d'arrêt.

On considère une suite $X_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i$, avec $(\xi)_{i\geq 1}$ v.a.i.i.d. centrées de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. On introduit la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Soit $a < 0 < b$ entiers. On définit $T_{a,b} = \inf\{n \geq 1\,;\, X_n = a \text{ ou } b\}$.

1. Que peut-on dire de (X_n) et de $T_{a,b}$?

2. Montrer que $T_{a,b}$ est presque sûrement fini (on pourra considérer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'événement $A_p = \{\xi_{p(b-a)+1} = \cdots = \xi_{p(b-a)+(b-a)} = 1\}$).

3. Donner la loi de $X_{T_{a,b}}$.

7. Martingales exponentielles.

On reprend l'exercice précédent et on définit le processus $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ par $Z_n = e^{X_n}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que Z est une sous-martingale pour $\mathbb{F}$.

2. Trouver un processus $\mathbb{F}$-prévisible $B = (B_n)_{n\geq 0}$ issu de 1 en 0 tel que $U = (U_n)_{n\geq 0}$ défini par $U_n = B_n Z_n$ pour chaque $n \geq 0$ soit une martingale.

3. Donner $\mathbb{E}\left[Z_n\right]$ pour tout $n \geq 0$.

8. Jeu de pile ou face et temps d'arrêts.

On considère deux joueurs qui jouent à pile ou face. Le joueur 1 donne (resp. reçoit) 1 euro si face apparaît (resp. si pile apparaît). Le jeu est répété plusieurs fois. On modélise le jeux comme suit. Soit $X = (X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernouilli $B(1/2)$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'évènement $\{X_n = 1\}$

signifie que pile est apparu au n-eme tirage. On définit la suite $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ par $Y_n = \sum_{i=1}^{n}(2X_i - 1)$ pour $n \geq 0$. Le processus Y correspond à la richesse du joueur 1 après les différents tirages. Après chaque tirage, les joueurs connaissent la valeur obtenue aux tirages précédents, leur information peut donc être modélisée par la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\ k \leq n)$.

1. Ecrire la dynamique de Y (i.e. la relation entre Y_{n+1} et Y_n) et montrer que c'est une martingale pour $\mathbb{F}$.

2. Le joueur 1 décide d'arrêter de jouer si il a déjà gagné 100 euros où si le nombre de tirages atteint $N \in \mathbb{N}^*$ et le joueur 2 est disposé à continuer à jouer jusqu'à ce que le joueur 1 s'arrête : le jeux s'arrête au temps $\tau := \inf\{n \geq 0\ :\ Y_n = 100\} \wedge N$. Montrer que τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, i.e. que $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$.

3. Quelle est, avec cette stratégie, l'espérance de gain du joueur 1 ?

4. Y a-t-il une stratégie qui donne au joueur 1 une espérance un gain strictement positive en un temps borné ? Autrement dit, existe-t-il une v.a. σ à valeur dans $\mathbb{N}$, bornée, telle que pour tout n, $\{\sigma = n\} \in \mathcal{F}_n$ et telle que $\mathbb{E}(Y_\sigma) > 0$?

5. Soit $M \in \mathbb{N}^*$ et $\kappa = \inf\{n \geq 0 | Y_n = M\}$. κ est-elle bornée p.s. ?

9. Doubling strategies. On considère un jeu répété avec tirages indépendants et même probabilité de succès que d'échec à chaque tirage. A chaque coup, on mise un montant x, que l'on remporte si on gagne et que l'on paye si on perd. Un joueur, partant de fortune initiale nulle, suit la stratégie suivante. Il joue 1 au premier tour et si sa dette est de D au $n-$ème tirage, il mise un montant $2D$ au tirage suivant (somme qu'il finance par emprunt) et s'arrête de jouer la première fois qu'il gagne. On suppose que les emprunts sont sans intérêt. On pourra faire comme si les tirages continuent après que le joueur aie arrêté de jouer, mais sa fortune n'évolue plus.

1. Modéliser le jeu en introduisant un espace de probabilité muni d'une filtration adéquate. Donner l'espérance de la fortune du joueur après le n-ème tirage.

2. Montrer que le joueur gagne en un nombre de coups fini avec probabilité 1. Ce nombre est-il presque sûrement borné ?

10. Une réciproque du théorème d'arrêt. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ intégrable et adapté. Montrer que, si l'on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné τ, alors $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.