Master 2 Astronomie, Astrohysique et Ingénierie Spatiale - DSG
Stage de recherche





Déformaton de Jupiters chauds à ultra-courte période

Modélisation numérique via un modèle analytique

Encadrant : Gwenaël BOUÉ

Louis DETZEN

Rapport de stage
Mars-Juin 2023

Je soussigné Louis DETZEN certifie sur l'honneur :

— que les résultats décrits dans ce rapport sont l'aboutissement de mon travail ;

— que je suis l'auteur de ce rapport ;

— que je n'ai pas utilisé des sources ou résultats tiers sans clairement les citer et les référencer selon les règles bibliographiques préconisées.

Je déclare que ce travail ne peut être suspecté de plagiat.

Date : 31/05/2023

Signature : .

Résumé

Certaines exoplanètes orbitent très près de leur étoile. Elles sont déformées à cause de la force centrifuge et des forces de marée : leur déformation peut être mesurée grâce au profil de la courbe de transit de lumière, lorsque la planète passe devant son étoile. Jusqu'ici, les modèles existants supposaient une réponse de déformation linéaire en la perturbation. Dans le cadre de ce stage, nous construisons un modèle qui s'étend au cas non linéaire, grâce à une approche perturbative, pour des rotateurs peu rapides. Nous appliquons ensuite ce modèle au cas de WASP-103b, une exoplanète de type "Jupiter chaud".

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Ellipsoïde de Roche dans le cas linéaire **14**
2.1 Calcul des paramètres d'excentricité (p^2, l^2) via les équipotentielles 14
2.2 Compatibilité des résultats avec la théorie linéaire des marées 16

3 Planète à 2 couches ellipsoïdales homogènes **18**
3.1 Potentiel total calculé à la surface de l'ellipsoïde (0) 19
3.2 Potentiel total calculé à la surface de l'ellipsoïde (1) 20
3.3 Calcul des valeurs de $(\alpha_i, \beta_i)_{1\leqslant i\leqslant 2}$ 20

4 Planète à N_c couches ellipsoïdales homogènes **21**
4.1 Algorithme 21
4.2 Validation 22

5 Planète à N_c couches sphéroïdales homogènes dans le cas non linéaire **23**

6 Validation de notre modèle non linéaire **26**
6.1 Sphéroïde de Maclaurin 26

7 Application au cas de WASP-103b **29**
7.1 Description des résultats 29
7.2 Comparaison des résultats 33
7.3 Courbe de transit 34

8 Conclusion **38**

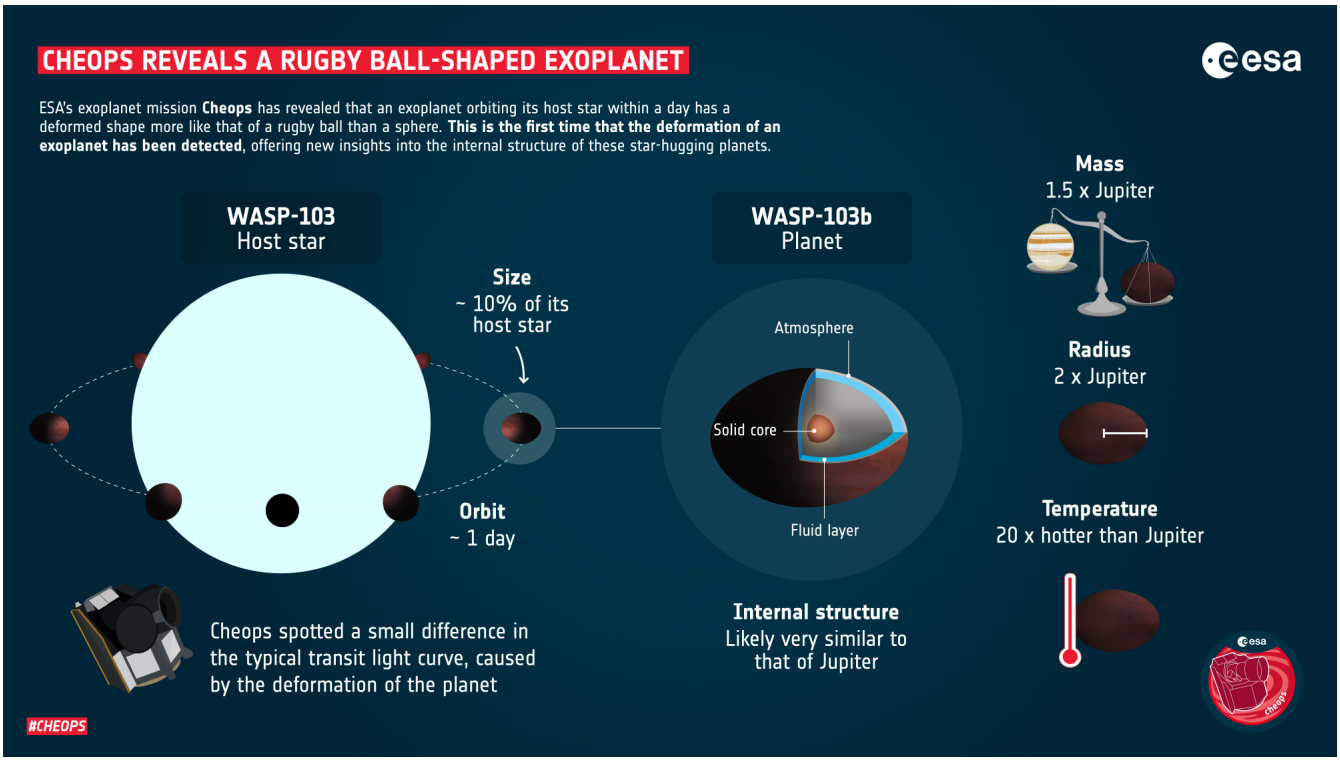

FIGURE 1 – Quelques caractéristiques de l'exoplanète WASP-103b. Crédit : ESA/IMCCE

Remerciements

Je souhaiterais remercier mon encadrant de stage, Gwenaël BOUÉ, pour son aide bienveillante et régulière tout au long de ce stage, ainsi que toute l'équipe de l'IMCCE.

1 Introduction

En 2019, la mission CHEOPS – cf. Figure (1) – mesure la courbe de transit de l'exoplanète WASP-103b, avec une précision qui permet de détecter un écart avec la courbe d'une planète sphérique. L'amplitude des déformations détectées est telle que la planète ressemblerait à un "ballon de rugby". Dans l'étude (Barros et al., 2022), le modèle utilisé suppose une réponse linéaire de la déformation en la perturbation, composée des forces de marée et de la force centrifuge. Ces deux forces jouent un rôle important sur la déformation de la planète, car celle-ci orbite très proche de son étoile, avec une période d'environ 1 jour terrestre.

Quelques paramètres sont estimés dans (Barros et al., 2022), comme les valeurs des demi-grands axes de la forme ellipsoïdale de la planète. Selon la théorie linéaire des marées, ceux-ci

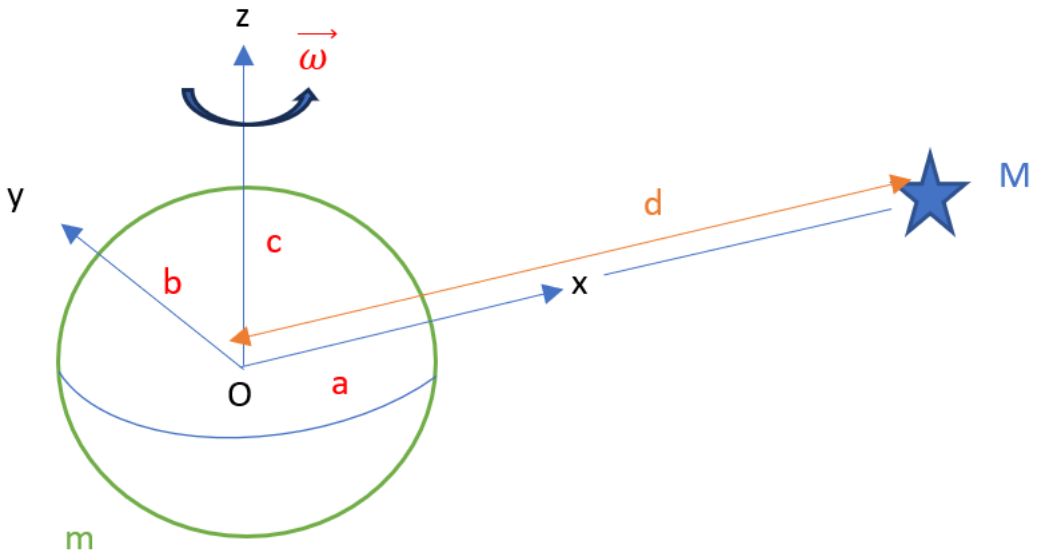

FIGURE 2 – Schéma du système planète-étoile dans le référentiel de la planète.

sont de la forme :

$$a = r_0 \left(1 + \frac{7}{3}\tilde{q}\right) = 2.1846\, R_{\text{Jup}}, \tag{1}$$

$$b = r_0 \left(1 - \frac{2}{3}\tilde{q}\right) = 2.0123\, R_{\text{Jup}}, \tag{2}$$

$$c = r_0 \left(1 - \frac{5}{3}\tilde{q}\right) = 1.9549\, R_{\text{Jup}}. \tag{3}$$

où a, b, c correspondent aux directions $(Ox), (Oy)$ et (Oz) respectivement. r_0 est le rayon volumique de la planète, i.e. $r_0 = (\frac{3}{4\pi}\mathcal{V})^{1/3}$ avec $\mathcal{V}$ le volume de la planète (cf. Figure (2)), et $\tilde{q}$ est un paramètre de la théorie linéaire des marées qui dépend du profil de densité de la planète.

Pour effectuer cette estimation, la courbe de transit est modélisée dans un premier temps par une courbe de lumière issue d'une planète sphérique : en réalité, celle-ci étant déformée, on observe des résidus, qui permettent d'obtenir les valeurs perturbées à l'ordre 1 des demi-grands axes ci-dessus – cf. Figure (3).

La planète se situe à une distance d de son étoile, que l'on peut calculer grâce à la 3e loi de Kepler :

$$d^3 = \frac{T^2 GM}{4\pi^2},$$

où $T = 0.925542$ jour est la période de rotation de la planète autour de son étoile – selon le

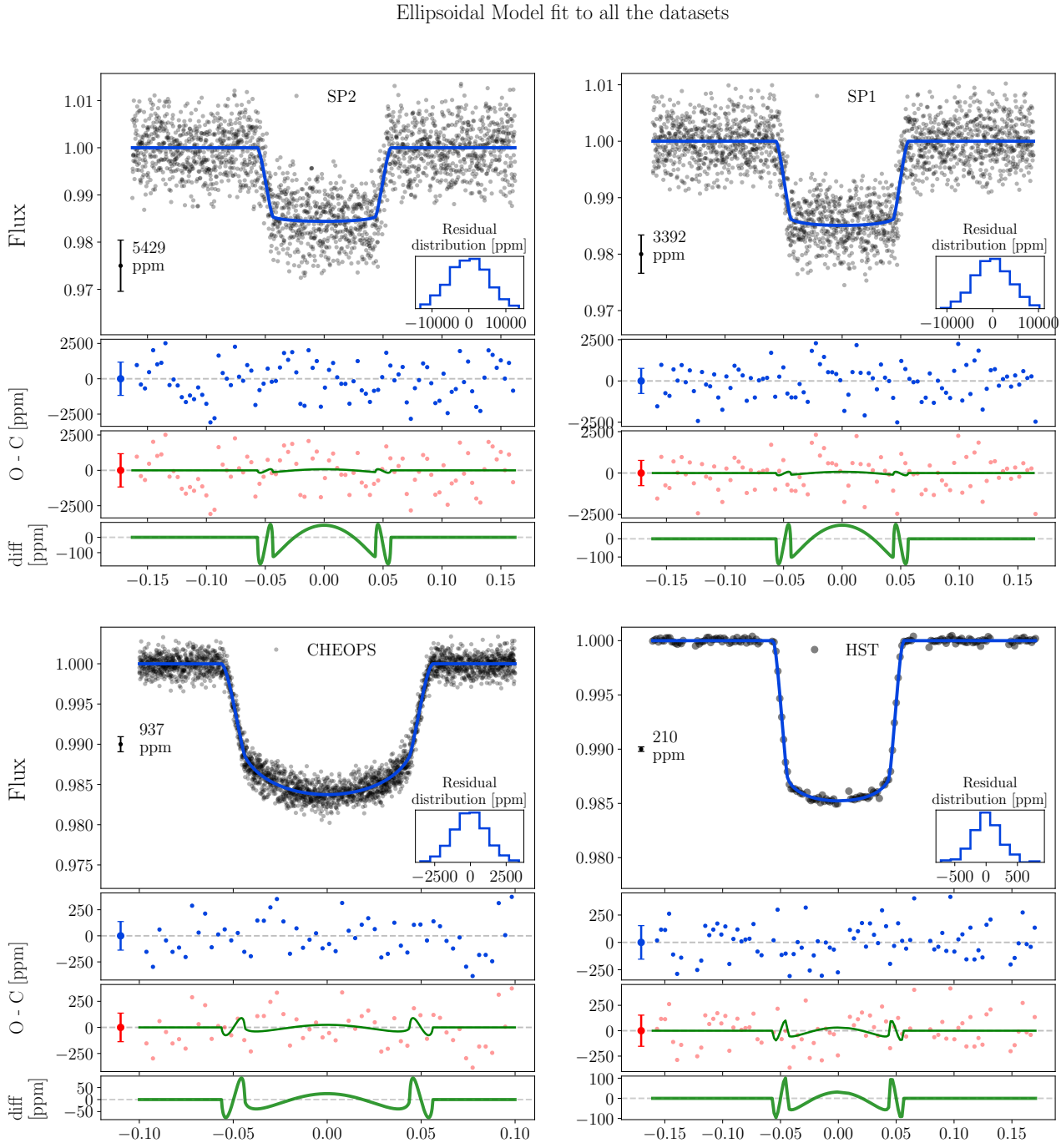

FIGURE 3 – Extrait de l'article de (Barros et al., 2022) qui montre les résidus obtenus en modélisant la courbe de transit par une courbe de lumière issue d'une planète sphérique (en bleu) ou ellipsoïdal (en rouge).

TABLE 1 – Valeurs des paramètres utilisés avec leur source

Paramètres	Valeurs	Source
Demi-grand axe (Ox) a (R_{Jup})	2.1846	(Barros et al., 2022)
Demi-grand axe (Oy) b (R_{Jup})	2.0123	(Barros et al., 2022)
Demi-grand axe (Oz) c (R_{Jup})	1.9549	(Barros et al., 2022)
Rayon volumique de la planète r_0 (R_{Jup})	2.05	(Barros et al., 2022)
Période de révolution T (jour)	0.925542	exoplanet.eu
Masse de la planète m (M_{Jup})	1.460	(Barros et al., 2022)
Masse de l'étoile M (M_{Sun})	1.204	(Barros et al., 2022)
Rayon de l'orbite d (UA)	0.01977	$d^3 = \frac{T^2 GM}{4\pi^2}$
Rayon de l'orbite / rayon de l'étoile $\frac{d}{R_\star}$	3.0038	(Barros et al., 2022)

Catalogue d'exoplanètes[1], et $M = 1.204 M_{\text{Sun}}$ (Barros et al. (2022)) est la masse de l'étoile. On a négligé la masse de la planète, qui est de l'ordre de celle de Jupiter – $m = 1.460 M_{\text{Jup}}$ (Barros et al., 2022). Le rapport des masses vaut alors $\frac{M}{m} = 863.9 \gg 1$. On trouve $d = 0.01977$ UA.

De plus, le nombre de Love (de degré 2) k_2 estimé vaut $k_2 = 0.59$. Le nombre de Love est défini par $k_2 = \frac{V'}{V_{\text{src}}}$, où, d'une part, $V' = V_{\text{grav}} - V_0$ est la différence entre le potentiel gravitationnel de la planète déformée, V_{grav}, et le potentiel créé par la planète en l'absence de déformation, V_0.
D'autre part, $V_{\text{src}} = V_{\text{cent}} + V_{\text{maree}}$ est la somme du potentiel centrifuge V_{cent} et du potentiel de marée V_{maree}.

Pour référence, on récapitule dans le tableau 1 les valeurs des paramètres utilisés ainsi que leur source.

Comme les échelles de temps considérées sont au moins de plusieurs milliers d'années, on peut considérer que la déformation de la planète est fluide. Cette déformation provient de la contribution d'un potentiel source de perturbation, composé du potentiel centrifuge et du potentiel de marée.

1. http://exoplanet.eu/catalog/wasp-103_b/, consulté le 24/05/23.

Les potentiels centrifuge et de marée s'écrivent :

$$V_{\text{cent}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})^2, \tag{4}$$

$$V_{\text{maree}}(\boldsymbol{r}) = -Gm\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{r} - d\,\boldsymbol{e}_x\|} - \frac{\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{r}}{d^2}\right), \tag{5}$$

Nous avons ensuite besoin de décomposer ces potentiels en fonction des harmoniques sphériques Y_{lm}. Les harmoniques sphériques Y_{lm} sont définies, en utilisant la semi-normalisation de Schmidt, par :

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_{lm}(\cos\theta)\,e^{im\varphi}, \tag{6}$$

avec P_{lm} le polynôme associé de Legendre, défini par $P_{lm}(x) = \dfrac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\dfrac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$, pour $x \in [-1,1]$.

Le potentiel de marée peut se réécrire comme :

$$V_{\text{maree}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{GM}{r_0}\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=-l}^{l}\left(\frac{r_0}{d}\right)^{l+1} Y_{lm}(\theta,\varphi)\overline{Y_{lm}}(\theta'=\pi/2,\varphi'=0). \tag{7}$$

Cette expression fait apparaître le rapport $\varepsilon = \dfrac{r_0}{d}$ dans le développement en harmoniques sphériques, qui quantifie l'ordre du développement perturbatif considéré. Pour la planète WASP-103b, $\varepsilon = 4.956.10^{-2} \ll 1$, ce qui justifie l'utilisation d'un développement perturbatif.

Dans la suite, nous normalisons les potentiels par $\dfrac{Gm}{r_0}$ et nous notons $R = \dfrac{r}{r_0}$ le rayon normalisé par rapport au rayon volumique. Le potentiel de marée normalisé est alors donné par :

$$\tilde{V}_{\text{maree}}(R,\theta,\varphi) = -q'\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=-l}^{l}\varepsilon^{l+1}R^l Y_{lm}(\theta,\varphi)\overline{Y_{lm}}(\theta'=\pi/2,\varphi'=0), \tag{8}$$

avec (θ,φ) les coordonnées sphériques du point considéré, et $q' = \dfrac{M}{m}\left(\dfrac{r_0}{d}\right)^2 = 2.122$ pour la planète WASP-103b. $\overline{Y_{lm}}$ désigne le complexe conjugué de Y_{lm}.

La théorie linéaire des marées, considérée dans (Barros et al., 2022), suppose que le potentiel gravitationnel V' généré par la redistribution de masse est proportionnel au potentiel source $V_{\text{src}} = V_{\text{cent}} + V_{\text{maree}}$, qui est la somme du potentiel centrifuge et du potentiel de marée. On note k_2 la constante de proportionnalité, appelée "nombre de Love", qui satisfait :

$$V' = k_2\,V_{\text{src}}. \tag{9}$$

Dans la théorie linéaire, la surface d'équilibre est un ellipsoïde triaxial, de demi-grands axes (a, b, c) – correspondant respectivement aux directions (Ox), (Oy) et (Oz), dont les valeurs relatives peuvent être quantifiées par les paramètres d'excentricité p^2 et l^2 :

$$p^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1, \tag{10}$$

$$l^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1. \tag{11}$$

Les deux membres de l'Equation (9) peuvent se décomposer sur la base des harmoniques sphériques Y_{lm}, dont les seuls coefficients non nuls sont associés à Y_{20} et Y_{22}, car la surface d'équilibre est un ellipsoïde. En identifiant les coefficients devant chacune des deux harmoniques sphériques, on obtient un système de deux équations en les deux inconnues p^2 et l^2.

Pour un profil de densité de planète quelconque, le nombre de Love est donné par :

$$k_2 = \frac{3 - \eta(1)}{2 + \eta(1)}. \tag{12}$$

$\eta : [0, 1] \to \mathbf{R}^+$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$R\frac{d\eta}{dR} + \eta^2 - \eta - 6 + 6\frac{\rho}{\rho_m}(\eta + 1) = 0.$$

$\rho_m(R)$ est la densité moyenne de la boule de rayon R : $\rho_m(R) = \frac{3}{R^3}\int_0^R \rho(R')\ R'^2\, dR'$ – cf. (Sterne, 1939). Le nombre de Love d'un ellipsoïde homogène dans le cas linéaire vaut $k_2 = 1.5$ (cf. ci-dessous).
Si l'on se donne un certain profil de densité a priori, on peut donc calculer le nombre de Love via l'Equation (12), et alors en déduire les paramètres d'excentricité p^2 et l^2 en résolvant l'Equation (9).

Dans notre travail, nous essayons de construire un modèle non linéaire, qui généralise celui de la théorie linéaire des marées, en considérant les ordres supérieurs en ε dans l'expression du potentiel de marée. Pour un profil de densité quelconque, nous modélisons la planète comme un ensemble de N_c couches concentriques de densité uniforme, ce qui revient à approcher le profil de densité continu par la fonction en escalier :

$$\rho^{\text{esc}}(R) = \rho_0 + \sum_{i=1}^{N_c - 1} \delta\rho_i\, \mathbf{1}_{R<\lambda_i}, \qquad \text{avec } \delta\rho_i = \rho(\lambda_i) - \rho(\lambda_{i-1}),$$

où la couche (0) correspond à la couche externe, et les (λ_i) sont les valeurs des rayons volumiques des différents sphéroïdes – cf. Figure (4).

Nous utilisons la même idée que dans (Hubbard, 2012) et (Hubbard, 2013), sauf que nous normalisons les rayons par rapport au rayon volumique r_0 et non par rapport au rayon équatorial. Cette décomposition permet alors de calculer le potentiel gravitationnel de la

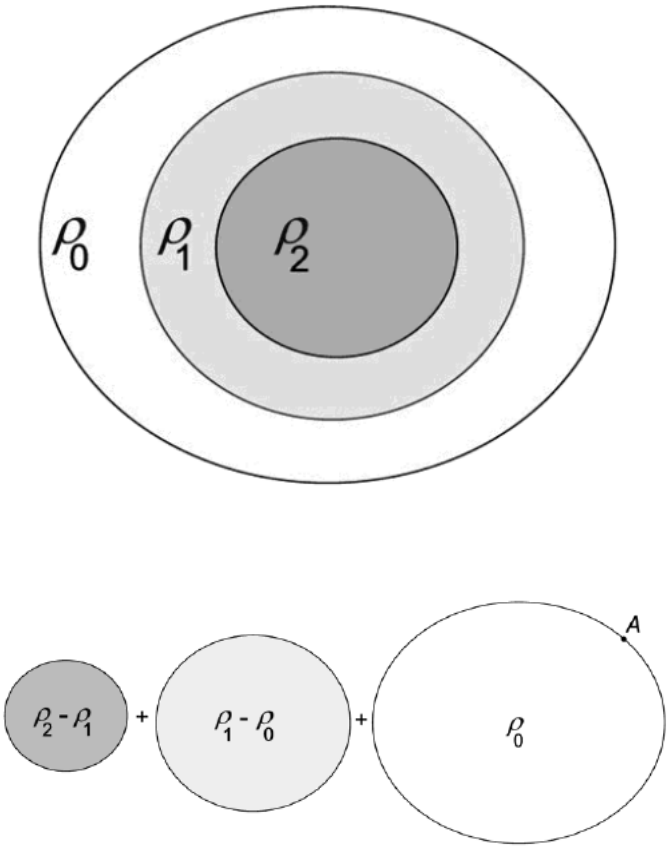

FIGURE 4 – Principe du modèle à N_c couches concentriques, qui est équivalent à la superposition de N_c sphéroïdes (Hubbard, 2013).

planète comme la somme des potentiels gravitationnels générés par N_c sphéroïdes de densité $\delta\rho_i$. En effet, on peut appliquer un principe de superposition comme le potentiel gravitationnel d'un corps est solution de l'équation de Poisson, qui est linéaire :

$$\Delta\Phi = -4\pi G\rho.$$

La forme de la planète n'est alors plus un ellipsoïde, mais les rayons de surface des différents sphéroïdes peuvent toujours se décomposer sur la base des harmoniques sphériques. En notant $R_i = \dfrac{r^{(i)}}{\lambda_i r_0}$ le rayon de la couche (i) normalisé par rapport à son rayon volumique, on a :

$$R_i = 1 + \sum_{l=2}^{L} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{k=1}^{L-1} X_{lm}^{i,k} \varepsilon^k Y_{lm}, \tag{13}$$

où les inconnues à déterminer sont les $X_{lm}^{i,k}$, et $L = 2\, i_{\mathrm{trc}}$ où i_{trc} est l'ordre maximal de troncature en ε considéré.

Pour déterminer les valeurs des inconnues $X_{lm}^{i,k}$, et ainsi les paramètres d'excentricité grâce à ce modèle, nous appliquons l'équation d'Euler stationnaire, car la déformation est fluide, comme évoqué ci-dessus :

$$\nabla P = -\rho \nabla V_{\text{tot}}, \tag{14}$$

$$\text{donc} \qquad \nabla \times \nabla P = -\nabla\rho \times \nabla V_{\text{tot}} = 0, \tag{15}$$

ce qui entraîne que les isopycnes – surfaces de densité constante – sont confondues avec les équipotentielles. Ainsi, les surfaces des différentes couches correspondent à des équipotentielles, c'est-à-dire que :

$$V_{\text{tot}}(\lambda_i R_i(\theta,\varphi),\theta,\varphi) = V_0 + V' + V_{\text{cent}} + V_{\text{maree}} = \text{cte}, \tag{16}$$

pour chaque couche, où V_0 correspond au potentiel généré par la couche en l'absence de déformation. Ceci fournit un système d'équations permettant de déterminer les valeurs des $X_{lm}^{i,k}$, et donc les paramètres d'excentricité.

Dans ce travail, nous avons utilisé le langage TRIP – (Gastineau and Laskar, 2011), développé au sein de l'IMCCE, qui est un langage de calcul formel particulièrement adapté pour le calcul de séries tronquées à un certain ordre. Nous utilisons ces séries pour notre développement perturtabif en ε.

En pratique, nous utilisons pour les profils de densité des polytropes d'ordre $1 \leqslant n \leqslant 3$. Un polytrope d'ordre n a pour équation d'état : $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$, où K est une constante et où n est appelé l'indice polytropique. La densité $\rho(x)$ est solution de l'équation de Lane-Emden (e.g., Lane and Lane, 1870) :

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{d\rho}{dx}\right) = -x^2\rho^n,$$

pour $0 \leqslant x \leqslant x_1$, avec x_1 le premier zéro d'annulation de ρ. La variable x est reliée à R par $R = \frac{x}{x_1}$.

Le cas $n = 1$ est pratique dans un premier temps, car il existe une solution analytique,

$$\rho(R) = \frac{\sin(\pi R)}{\pi R}, \qquad (x_1 = 1).$$

Plus l'ordre n augmente, plus x_1 prend des valeurs élevées et $x_1 \to +\infty$ pour $n \to 5$. Dans cette étude, nous nous limitons aux cas où $1 \leqslant n \leqslant 3$ et résolvons l'équation différentielle avec ODEINT de PYTHON pour les cas autres que $n = 1$ – cf Figure (5).

Dans notre modèle, on part d'un profil de densité d'un polytrope pour la planète sphérique, que l'on déforme ensuite en la rapprochant "virtuellement" de son étoile, en conservant

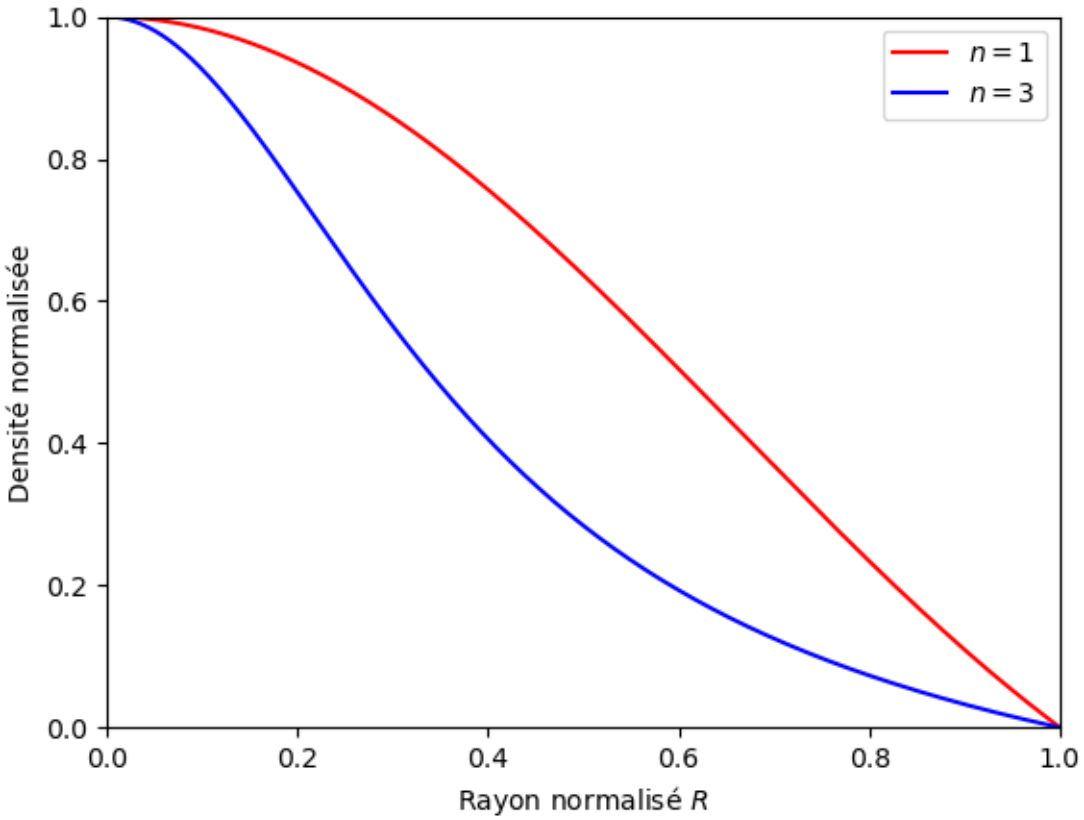

FIGURE 5 – Profil de densité pour un polytrope d'indice $n = 1$ et d'indice $n = 3$.

toutefois les densités pour chaque couche. Lorsque la rotation est prise en compte, l'équation d'Euler – cf. Equation (14) – n'est plus valable, et il faut utiliser à la place l'équation de Bernouilli : la planète ainsi déformée n'obéit alors plus à une équation d'état polytropique d'après Jean-Marc Huré et Clément Staelen (2023). On désignera ce modèle par "polytrope sphérique".

Dans ce qui suit, nous nous intéressons d'abord au cas d'une seule couche ellispoidale dans le cas linéaire, qui est celui de l'ellipsoïde de Roche, puis le cas avec 2 couches, et la généralisation à N_c couches ellipsoidales homogènes dans le cas linéaire. Dans un second temps, nous généralisons le calcul au cas non linéaire, sans imposer a priori que la forme soit un ellipsoïde. Enfin, nous comparons les résultats donnés par notre modèle pour WASP-103b avec les paramètres indiqués ci-dessus.

Nous résumons sur la Figure (6) les différentes composantes intervenant dans notre travail.

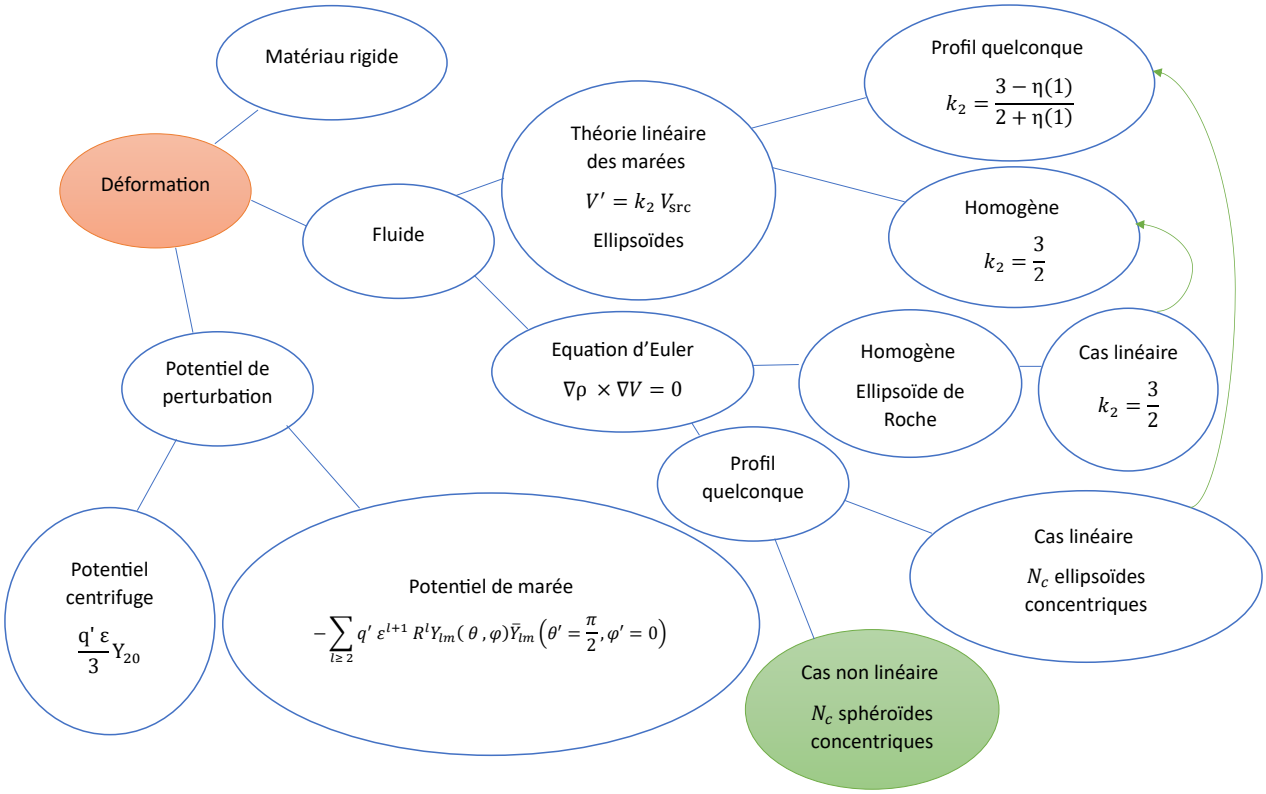

FIGURE 6 – Résumé des différentes composantes intervenant dans notre travail : les flèches vertes correspondent aux étapes de vérification de notre modèle en comparant les résultats obtenus avec la théorie linéaire des marées, la bulle en rouge représente le point de départ, la bulle en verte le point d'arrivée.

2 Ellipsoïde de Roche dans le cas linéaire

On considère d'abord un ellipsoïde homogène de masse m et de densité ρ, de semi-grands axes (a, b, c) correspondant aux directions (x, y, z), l'étoile étant dans la direction des x positifs. Cet ellipsoïde est appelé "ellipsoïde de Roche". On rappelle les définitions des paramètres d'excentricité :

$$p^2 = \frac{a^2}{b^2} - 1,$$
$$l^2 = \frac{a^2}{c^2} - 1.$$

L'ellipsoïde a une rotation propre de pulsation ω et suit une orbite circulaire de rayon orbital $d \gg a$ autour d'un corps de masse $M \gg m$. On se place en régime permanent : du fait des forces de marée, sa période de rotation propre doit être égale à sa période de révolution, i.e. la rotation est synchrone :

$$\omega^2 = \frac{GM}{d^3},$$

d'après la 3e loi de Képler.
On définit $q = \dfrac{\omega^2 a^3}{Gm} = \dfrac{M}{m}\left(\dfrac{a}{d}\right)^3 = q'\varepsilon$ à l'ordre linéaire (cf. Page (8)).
On se place dans le cadre de l'approximation linéaire en $p^2, l^2, q \ll 1$.

2.1 Calcul des paramètres d'excentricité (p^2, l^2) via les équipotentielles

A l'équilibre hydrostatique, la surface de l'ellipsoïde est une isopycne. Elle correspond donc également une équipotentielle – cf. Equation (16) :

$$V_{\text{tot}}(R_0(\theta, \varphi), \theta, \varphi) = \text{cte}.$$

Le potentiel total à la surface de l'ellipsoïde est la somme de trois contributions :

— le potentiel gravitationnel généré par l'ellipsoïde homogène – (MacMillan, 1930) :

$$V_{\text{int}} = -G\pi\rho abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},$$

— le potentiel de marée :

$$V_{\text{maree}} = -\frac{GM}{d^3}\left(x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right) = -\omega^2\left(x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right),$$

— le potentiel centrifuge :

$$V_{\text{cent}} = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})^2 = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$

Il est calculé à la surface de l'ellipsoïde :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & aX & = & a\sin\theta\cos\varphi, \\ y & = & bY & = & b\sin\theta\sin\varphi, \\ z & = & cZ & = & c\cos\theta. \end{array}\right.$$

(X, Y, Z) sont les coordonnées sur la sphère unité qui, après dilatation par les fonctions a, b et c, permettent d'obtenir les coordonnées (x, y, z) à la surface de l'ellipsoïde.
Dans cette section, on normalise les potentiels par le rayon équatorial, et non par le rayon volumique : $\tilde{V} \leftarrow \frac{V}{Gm/a^3}$. Les potentiels normalisés sont alors :

— $\tilde{V}_{\text{int}} = -\frac{3}{4}\int_0^\infty \left(1 - \frac{X^2}{1+u} - \frac{(1-p^2)Y^2}{1-p^2+u} - \frac{(1-l^2)Z^2}{1-l^2+u}\right) \frac{du}{\sqrt{(1+u)(1-p^2+u)(1-l^2+u)}}$,

— $\tilde{V}_{\text{maree}} = -q\left(X^2 - \frac{Y^2}{2} - \frac{Z^2}{2}\right)$,

— $\tilde{V}_{\text{cent}} = -\frac{1}{2}q(X^2+Y^2)$,

où l'on a utilisé $b^2 = \dfrac{a^2}{1+p^2} \approx a^2(1-p^2)$ et $c^2 \approx a^2(1-l^2)$.

On linéarise l'intégrande par rapport à p^2 et l^2 dans l'expression de $\tilde{V}_{int}$ pour pouvoir calculer l'intégrale, ce qui donne des fractions rationnelles en $(1+u)^\alpha$ à intégrer. On obtient finalement :

$$\tilde{V}_{\text{int}}(X,Y,Z) \approx -\frac{3}{2} - \frac{l^2}{4} - \frac{p^2}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3l^2}{20} + \frac{3p^2}{20}\right)X^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3l^2}{20} - \frac{p^2}{20}\right)Y^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{l^2}{20} + \frac{3p^2}{20}\right)Z^2.$$

On développe ensuite les potentiels qui sont des polynômes en $[X^2, Y^2, Z^2]$ sur les harmoniques sphériques. Dans cette section, nous utilisons les harmoniques sphériques réelles ainsi qu'une autre normalisation pour les Y_{lm} que la semi-normalisation de Schmidt, i.e. :

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = P_{lm}(\cos\theta)\ \cos(m\varphi), \tag{17}$$
$$Y_{l;-m}(\theta,\varphi) = P_{lm}(\cos\theta)\ \sin(m\varphi), \tag{18}$$
$$\tag{19}$$

pour $0 \leqslant m \leqslant l$. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{V}_{\text{int}} & = & \left(-\frac{2l^2}{15} + \frac{p^2}{15}\right)Y_{20} + \frac{p^2}{30}Y_{22}, \\ \tilde{V}_{\text{cent}} & = & \frac{q}{3}Y_{20}, \\ \tilde{V}_{\text{maree}} & = & \frac{q}{2}Y_{20} - \frac{q}{4}Y_{22}, \end{array}\right.$$

où l'on a utilisé que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X^2 & = & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}Y_{20} + \frac{1}{6}Y_{22}, \\ Y^2 & = & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}Y_{20} - \frac{1}{6}Y_{22}, \\ Z^2 & = & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}Y_{20}. \end{array}\right. \tag{20}$$

On a enlevé les termes constants dans $\tilde{V}_{\text{int}}$ et $\tilde{V}_{\text{cent}}$ (qui n'ont pas de pertinence physique).
Le potentiel total à la surface de la planète vaut alors :

$$\tilde{V}_{\text{tot}} = \left(-\frac{2l^2}{15} + \frac{p^2}{15} + \frac{5q}{6}\right) Y_{20} + \left(\frac{p^2}{30} - \frac{q}{4}\right) Y_{22}.$$

Dire que $\tilde{V}_{\text{tot}}(\theta, \varphi)$ est constant à la surface de l'ellipsoïde revient à :

$$\begin{cases} -\frac{2l^2}{15} + \frac{p^2}{15} + \frac{5q}{6} &= 0, \\ \frac{p^2}{30} - \frac{q}{4} &= 0. \end{cases}$$

Ces équations permettent de calculer la forme de la planète, en obtenant les valeurs des excentricités p^2 et l^2 en fonction du paramètre de contrôle q. On trouve :

$$\left\{p^2 = \frac{15q}{2}, l^2 = 10q\right\}. \tag{21}$$

En remplaçant dans $\tilde{V}_{\text{int}}$ et en utilisant que $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, on obtient :

$$\tilde{V}_{\text{int}}(X, Y) = 2qX^2 + \frac{qY^2}{2}. \tag{22}$$

Vérifions maintenant que ce résultat est compatible avec la théorie linéaire des marées.

2.2 Compatibilité des résultats avec la théorie linéaire des marées

On peut aussi voir $\tilde{V}_{\text{int}}$ s'écrivant comme $\tilde{V}_{\text{int}} = \tilde{V}_0 + \tilde{V}'$, où $\tilde{V}_0$ est le potentiel gravitationnel généré par la boule de rayon a et $\tilde{V}'$ est le potentiel généré par la redistribution de masse ρ', suivant l'équation de Poisson : $\Delta V' = -4\pi G\rho'$.
Comme cette redistribution est causée par les forces centrifuge et de marée, on peut supposer dans le cadre de notre approximation que la réponse est linéaire, i.e. :

$$\tilde{V}' = k_2(\tilde{V}_{\text{cent}} + \tilde{V}_{\text{maree}}),$$

où $k_2 = \frac{3}{2}$ est le nombre de Love pour un ellipsoïde homogène.
A la surface de l'ellipsoïde,

$$\tilde{V}_0 = -\frac{1}{R_0},$$

avec $R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 - p^2Y^2 - l^2Z^2}$. On obtient :

$$\tilde{V}_0(X, Y) = -\frac{p^2}{2}Y^2 - \frac{l^2}{2}(1 - X^2 - Y^2),$$

où l'on a enlevé le terme constant. Avec les valeurs de (p^2, l^2) obtenues précédemment – cf. Equation (21) –, il vient :

$$\tilde{V}_{\text{int}} = \tilde{V}_0 + k_2(\tilde{V}_{\text{maree}} + \tilde{V}_{\text{cent}}),$$
$$\tilde{V}_{\text{int}} = 2qX^2 + \frac{qY^2}{2}.$$

où l'on utilise les expressions de $\tilde{V}_{\text{maree}}(X, Y)$ et $\tilde{V}_{\text{cent}}(X, Y)$ de la section 2.1. On retrouve l'expression précédente – cf. Equation (22) – du potentiel gravitationnel de l'ellipsoïde, ce qui valide le calcul effectué.

3 Planète à 2 couches ellipsoïdales homogènes

On considère deux ellipsoïdes concentriques de densité $\delta\rho_1 = \rho_1 - \rho_0$ et ρ_0, de masses respectives m_1 et m_0, et de rayons volumiques $r_1 = \lambda_1 r_0$ et r_0 (on pose $\lambda_0 = 1$). Pour paramétriser la déformation des ellipsoïdes, on travaillera plutôt avec $\alpha_i(p_i^2, l_i^2), \beta_i(p_i^2, l_i^2)$, définis par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & l^2 - \frac{p^2}{2}, \\ \beta & = & \frac{p^2}{4}. \end{array} \right.$$

Comme,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m_1 & = & \delta\rho_1 \frac{4}{3}\pi\lambda_1^3 r_0^3, \\ m_0 & = & \rho_0 \frac{4}{3}\pi r_0^3, \end{array} \right.$$

et $m = m_0 + m_1$, il vient que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m_1 & = & \mu_1[\lambda_1, \rho_0, \rho_1]m, \\ m_0 & = & \mu_0[\lambda_1, \rho_0, \rho_1]m, \end{array} \right.$$

avec $\mu_1 = \dfrac{\lambda_1^3 \frac{\delta\rho_1}{\rho_0}}{1 + \frac{\delta\rho_1}{\rho_0}\lambda_1^3}$ et $\mu_0 = \dfrac{1}{1 + \frac{\delta\rho_1}{\rho_0}\lambda_1^3}$. On écrit maintenant (x, y, z) en coordonnées sphériques, i.e. :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} x & = & rX & = & r(\theta, \varphi)\sin\theta\cos\varphi, \\ y & = & rY & = & r(\theta, \varphi)\sin\theta\sin\varphi, \\ z & = & rZ & = & r(\theta, \varphi)\cos\theta. \end{array} \right.$$

Les définitions de X, Y, Z ont ici changé par rapport à la section précédente. On se place à nouveau dans le cadre de l'approximation linéaire, cette fois-ci en (α_i, β_i).

Le potentiel créé par le corps (i) à l'extérieur de celui-ci vaut :

$$V_{\text{ext}}^{(i)}(r) = -\frac{Gm_i}{r_i}\left(\frac{r_i}{r} + \sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{r_i}{r}\right)^{l+1}\left(C_{lm}Y_{lm} + S_{lm}Y_{l;-m}\right)\right).$$

On se limitera à nouveau à l'ordre $l = 2$ pour le développement multipolaire et on normalisera les potentiels par $\tilde{V} \leftarrow \frac{V}{Gm/r_0}$.

Les coefficients de Stokes C_{lm} et S_{lm} sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} C_{lm} \\ S_{lm} \end{pmatrix} = (2 - \delta_{0;m})\frac{\rho}{m_i r_i^l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_{\mathcal{E}^{(i)}}\begin{pmatrix} r^l Y_{lm} \\ r^l Y_{l;-m} \end{pmatrix} d\tau,$$

où l'intégrale est calculée sur le volume de l'ellipsoïde (i).

Calculons les coefficients de Stokes pour $l = 2$. On utilise que :

$$\begin{aligned} r^2 Y_{20} &= \frac{1}{2}(3z^2 - r^2) = z^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, \\ r^2 Y_{21} &= 3xz, \\ r^2 Y_{2;-1} &= 3yz, \\ r^2 Y_{22} &= 3(x^2 - y^2), \\ r^2 Y_{2;-2} &= 6xy. \end{aligned}$$

Les monômes de puissances impaires en x, y ou z donnent des intégrales nulles (car l'ellipsoïde est à symétrie triaxiale), donc seuls C_{20} et C_{22} sont non nuls et il vient :

$$\begin{aligned} C_{20} &= \frac{1}{5r_V^2}\left(c^2 - \frac{a^2+b^2}{2}\right) && \text{où } r_V \text{ est le rayon volumique de l'ellipsoïde} \\ &\approx \frac{1}{5a^2}\left(c^2 - \frac{a^2+b^2}{2}\right) && \text{à l'ordre linéaire} \\ &\approx -\frac{1}{5}\left(l^2 + \frac{p^2}{2}\right) \\ C_{20} &= -\frac{\alpha}{5}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} C_{22} &= \frac{1}{20}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \\ &\approx \frac{p^2}{20} \\ C_{22} &= \frac{\beta}{5}. \end{aligned}$$

De même, le rayon à la surface de l'ellipsoïde (i) s'exprime en fonction de (α_i, β_i), ce qui permet finalement d'exprimer $\tilde{V}_{\text{ext}}^{(i)}$ uniquement en fonction de $(\alpha_j, \beta_j)_{1 \leqslant j \leqslant 2}$.

3.1 Potentiel total calculé à la surface de l'ellipsoïde (0)

Pour calculer le potentiel total à la surface de l'ellipsoïde (0), il faut calculer les potentiels gravitationnels générés par les deux ellipsoïdes qui sont :

— $\tilde{V}_{\text{int}}^{(0)} = \tilde{V}_{\text{ext}}^{(0)}[\alpha_0, \beta_0, \lambda_0, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0, \mu_0]$, où l'égalité provient de la continuité du potentiel à la surface de l'ellipsoïde (0),

— $\tilde{V}_{\text{ext}}^{(1)}[\alpha_0, \beta_0, \lambda_0, \alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1]$.

Il faut aussi tenir compte du potentiel de marée et du potentiel centrifuge :

— $\tilde{V}_{\text{maree}}[\lambda_0]$,

— $\tilde{V}_{\text{cent}}[\lambda_0]$.

3.2 Potentiel total calculé à la surface de l'ellipsoïde (1)

Pour calculer le potentiel total à la surface de l'ellipsoïde (1), il faut calculer les potentiels gravitationnels générés par les deux ellipsoïdes qui sont :

— $\tilde{V}^{(1)}_{\text{int}} = \tilde{V}^{(1)}_{\text{ext}}[\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1]$, où l'égalité provient de la continuité du potentiel à la surface de l'ellipsoïde (1),

— $\tilde{V}^{(0)}_{\text{int}}[\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0, \mu_0]$.

Il faut aussi tenir compte du potentiel de marée et du potentiel centrifuge :

— $\tilde{V}_{\text{maree}}[\lambda_1]$,

— $\tilde{V}_{\text{cent}}[\lambda_1]$.

3.3 Calcul des valeurs de $(\alpha_i, \beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2}$

Comme dans la section précédente, le potentiel total est constant à la surface des deux ellipsoïdes, ce qui entraîne que les coefficients devant Y_{20} et Y_{22} sont nuls.
Nous obtenons alors un système de 4 équations pour les 4 inconnues $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1$ et β_1. Une fois ces valeurs calculées, nous obtenons ainsi l'expression du rayon de la couche externe, et donc la forme de la planète.

4 Planète à N_c couches ellipsoïdales homogènes

4.1 Algorithme

On généralise le calcul de la section précédente au cas de N_c couches ellipsoïdales homogènes indicées par $0, \ldots, N_c - 1$, la couche (0) étant la couche extérieure.

En entrée, nous avons :

— les rayons volumiques des ellipsoïdes, normalisés par rapport au rayon volumique de la couche externe r_0, i.e. $\lambda_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant N_c - 1$,

— les densités de chaque couche : $\rho_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant N_c - 1$.

Les masses relatives μ_i, telles que $m_i = \mu_i m$, sont données par $\mu_i \propto \delta\rho_i\lambda_i^3$, où la normalisation est choisie pour que $\sum_i \mu_i = 1$.

Le potentiel total à la surface de l'ellipsoïde (i) est donné par :

$$\sum_{j=i}^{N_c-1} \tilde{V}_{\text{ext}}^{(j)} + \sum_{j=0}^{i-1} \tilde{V}_{\text{int}}^{(j)} + \tilde{V}_{\text{maree}} + \tilde{V}_{\text{cent}},$$

qui est un polynôme en Y_{20} et Y_{22}.
Imposer que le potentiel soit constant à la surface des N_c ellipsoïdes donne un système de $2N_c$ équations à $2N_c$ inconnues – les (α_i, β_i), $0 \leqslant i \leqslant N_c - 1$.

Nous pouvons obtenir une expression analytique de la linéarisation de $\tilde{V}_{\text{ext}}, \tilde{V}_{\text{int}}, \tilde{V}_{\text{maree}}$ et $\tilde{V}_{\text{cent}}$, ces potentiels évalués à la surface de la couche (i) étant décomposés sur Y_{20} et Y_{22} :

— $\tilde{V}_{\text{ext}}^{(j)}\left[\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \alpha_j, \beta_j, \lambda_j, \mu_j\right] = \mu_j \left[\left(-\dfrac{\alpha_i}{3\lambda_i} + \dfrac{\alpha_j\lambda_j^2}{5\lambda_i^3}\right) Y_{20} + \left(\dfrac{\beta_i}{3\lambda_i} - \dfrac{\beta_j\lambda_j^2}{5\lambda_i^3}\right) Y_{22}\right]$,

— $\tilde{V}_{\text{int}}^{(j)}\left[\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \alpha_j, \beta_j, \lambda_j, \mu_j\right] = -\dfrac{\mu_j\lambda_i^2}{30\lambda_j^3}\Big((10\alpha_i - 6\alpha_j)Y_{20} + (-10\beta_i + 6\beta_j)Y_{22}\Big)$,

— $\tilde{V}_{\text{maree}}[\lambda_i] = \dfrac{\lambda_i^2 q}{2} Y_{20} - \dfrac{\lambda_i^2 q}{4} Y_{22}$,

— $\tilde{V}_{\text{cent}}[\lambda_i] = \dfrac{\lambda_i^2 q}{3} Y_{20}$.

On fait une résolution par les moindres carrés qui se ramène à la résolution simple du système dans le cas où celui-ci est inversible (en pratique, nous avons constaté que cela était toujours le cas). On cherche à minimiser $\|Ax - b\|_2^2$, où A est la matrice du système, b le vecteur colonne du second membre et $x = (\alpha_i, \beta_i)_{i \leqslant 0 \leqslant N_c - 1}$. Le minimiseur est donné par $x = (A^T A)^{-1} A^T b$. Nous avons utilisé la fonction "lapack_dgels" $[A, b]$ déjà implémentée dans Trip.

On calcule aussi le nombre de Love du système. D'abord, nous calculons le potentiel gravitationnel généré par l'ensemble des N_c couches à la surface de la couche externe (0) :

$$\tilde{V}_{\text{grav}} = \sum_{j=0}^{N_c-1} \tilde{V}_{\text{ext}}^{(j)}[\alpha_0, \beta_0, \lambda_0, \alpha_j, \beta_j, \lambda_j, \mu_j].$$

Le potentiel $\tilde{V}'$ généré par la redistribution de masse est donné par : $\tilde{V}' = \tilde{V}_{\text{grav}} - \tilde{V}_0$ où,

$$\tilde{V}_0 = \sum_{j=0}^{N_c-1} \tilde{V}_{\text{ext}}^{(j)}\left[\alpha_0, \beta_0, \lambda_0, 0, 0, \lambda_j, \mu_j\right],$$

qui est le potentiel généré par N_c sphères homogènes de densité $\delta\rho_i$ situées aux λ_i.

Le nombre de Love k_2 est alors donné par :

$$k_2 = \frac{\tilde{V}'}{\tilde{V}_{\text{cent}} + \tilde{V}_{\text{maree}}}.$$

4.2 Validation

Nous comparons les résultats obtenus avec une formule du nombre de Love présente dans la littérature (Sterne, 1939) pour le cas linéaire :

$$k_2 = \frac{3 - \eta(1)}{2 + \eta(1)},$$

où $\eta : [0, 1] \to \mathbf{R}^+$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$x\frac{d\eta}{dx} + \eta^2 - \eta - 6 + 6\frac{\rho}{\rho_m}(\eta + 1) = 0, \tag{23}$$

où $\rho_m(x)$ la densité moyenne de la boule de rayon x : $\rho_m(x) = \frac{3}{x^3}\int_0^x \rho(x)\, x^2\, dx$.

Pour comparer les résultats de la section précédente avec la formule de (Sterne, 1939), nous avons considéré un profil quadratique en x. Toutefois, l'équation différentielle (23) étant singulière en $x = 0$, nous avons choisi de prendre $\rho(x) = \frac{1-x^2}{1-x_0^2}$ pour $x > x_0$ et $\rho(x) = 1$ pour $0 \leqslant x \leqslant x_0$, avec x_0 proche de 0. Ainsi, on intègre l'équation différentielle (23) à partir de $x = x_0$ avec $\eta(x_0) = 0$ au lieu de partir de $x = 0$.

En exécutant le code TRIP pour un nombre de couches croissante, on observe que la valeur du nombre de Love obtenu semble converger vers celle donnée par la résolution de l'équation différentielle, avec une convergence de l'ordre de $\frac{1}{N_c}$ - cf. Figure (7).

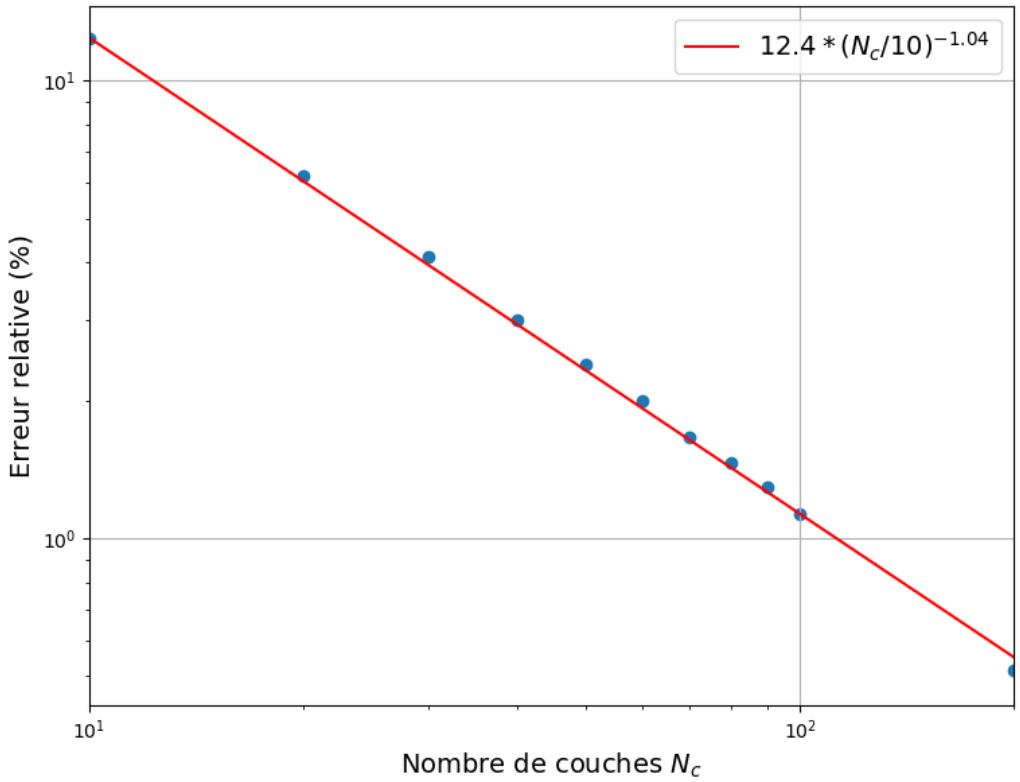

FIGURE 7 – Erreur relative $\frac{|k_2^{\text{mc}} - k_2^{\text{edo}}|}{k_2^{\text{edo}}}$, où k_2^{mc} est la valeur du nombre de Love obtenue avec le modèle à N_c couches et k_2^{edo} celle fournie par la résolution de l'équation différentielle ordinaire (23).

5 Planète à N_c couches sphéroïdales homogènes dans le cas non linéaire

Dans le cas non linéaire, on paramétrise l'ordre du développement perturbatif par $\varepsilon = \frac{a_0}{d} \ll 1$.
Les autres termes du développement multipolaire dans le potentiel de marée normalisé seront alors de l'ordre ε^{l-1} – cf. Equation (8). On va jusqu'à l'ordre ε^{i_c}, où i_c est l'ordre de la troncature.

On paramétrise les rayons $R_i = \frac{r^{(i)}}{\lambda_i r_0}$ des différentes couches comme :

$$R_i = 1 + \sum_{l=2}^{L} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{k=1}^{L-1} X_{lm}^{i,k} \varepsilon^k Y_{lm},$$

où $L = 2\, i_c$ est l'ordre maximal (en l) des harmoniques sphériques qui sont ici complexes, choisies avec la semi-normalisation de Schmidt – cf. Equation (6).

On a la relation suivante entre les harmoniques réelles que l'on utilise dans le cas linéaire (notées ici avec l'exposant "r") et les harmoniques complexes utilisées dans cette section dans le cas non linéaire :

$$Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (Y_{lm}^r + i Y_{l;-m}^r), \tag{24}$$

$$Y_{l;-m} = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (Y_{lm}^r - i Y_{l;-m}^r), \tag{25}$$

pour $0 \leqslant m \leqslant l$.

Il faut alors calculer le potentiel créé par une couche (j) et évalué à la surface de la couche (i) que l'on note $V_c[i,j]$. Il faut distinguer deux cas :

1. la couche (i) est intérieure à la couche (j),
2. la couche (i) est extérieure à la couche (j).

1er cas : la couche (i) est intérieure à la couche (j).

$$\begin{aligned} V_c[i,j](\theta,\varphi) = & -\frac{\mu_j}{\lambda_j^3} R_i^2 \lambda_i^2 \\ & - \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} \frac{3\mu_j}{4\pi\lambda_j} \frac{\lambda_i^l}{\lambda_j^l} C_{\text{int}}(R_i, R_j; l, m) R_i^l Y_{lm}(\theta,\varphi) \end{aligned}$$

Le 1er terme correspond au potentiel d'une sphère de densité $\delta\rho_j$ et de rayon $r_i(\theta,\varphi) = R_i(\theta,\varphi)\lambda_i$, θ et φ étant fixés. Le second terme correspond au potentiel créé par l'"anneau" de densité $\delta\rho_j$ délimité par r_i et $r_j(\theta',\varphi')$, $(\theta',\varphi') \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$.
$C_{\text{int}}(R_i, R_j; l, m)$ est l'analogue d'un coefficient de Stokes :

$$C_{\text{int}}(R_i, R_j; l \neq 2, m) = \int_{S^1} \frac{1}{l-2} \left(\frac{1}{R_i^{l-2}} - \frac{1}{R_j^{l-2}(\theta',\varphi')} \right) \bar{Y}_{lm}(\theta',\varphi') d\Omega',$$

$$C_{\text{int}}(R_i, R_j; l = 2, m) = \int_{S^1} \ln \left(\frac{R_j(\theta',\varphi')}{R_i} \right) \bar{Y}_{lm}(\theta',\varphi') d\Omega',$$

où les intégrales sont calculées sur la sphère unité S^1.

Second cas : la couche (i) est extérieure à la couche (j).

$$V_c[i,j] = -\frac{\mu_j}{\lambda_i R_i} - \sum_{l=2}^{L}\sum_{m=-l}^{l} \frac{3\mu_j}{4\pi\lambda_j}\frac{\lambda_i^{l+1}}{\lambda_j^{l+1}} C_{\text{ext}}(R_j;l,m)\frac{1}{R_i^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

où $C_{\text{ext}}(R_j;l,m)$ est le coefficient de Stokes (complexe) de la couche (j) :

$$C_{\text{ext}}(R_j;l,m) = \int_{S^1} \frac{R_j^{l+3}(\theta',\varphi')}{l+3}\bar{Y}_{lm}(\theta',\varphi')d\Omega'.$$

Le potentiel de marée au niveau de la couche (i) vaut :

$$V_{\text{maree}}[i] = \sum_{l=2}^{L}\sum_{m=-l}^{l} q'\varepsilon^{l-1}\lambda_i^l R_i^l Y_{lm}\bar{Y}_{lm}(\theta'=\pi/2,\varphi'=0),$$

et le potentiel centrifuge :

$$V_{\text{cent}}[i] = -\frac{q'\varepsilon}{3}\lambda_i^2 R_i^2(1-Y_{20}).$$

On a ensuite besoin de linéariser en les Y_{lm} l'expression du potentiel total obtenu, car il contient des termes non linéaires issus de produits du type $Y_{lm}Y_{l'm'}$. Pour cela, nous utilisons l'"expansion en séries de Clebsch-Gordan" des produits d'harmoniques sphériques que l'on trouve dans (Khersonskii et al., 1988).
Une fois le potentiel total linéarisé, on applique la méthode des équipotentielles pour chaque ordre.
Ceci permet d'obtenir finalement l'expression du rayon de la couche externe, et donc la forme de la planète. Il nous reste à valider la généralisation de notre modèle au cas non linéaire.

TABLE 2 – Valeurs de l^2 et des $J_{2k}\,(1 \leqslant k \leqslant 3)$ pour 1 couche homogène (sphéroïde de Maclaurin), via notre modèle (colonne du milieu) et la solution analytique (colonne de droite) pour $q' = 1$ et $\varepsilon = 10^{-3}$, i.e. $q = 10^{-3}$.

Paramètres	Modèle (ordre 3)	EDO
l^2	$2.5054.10^{-3}$	$2.5054.10^{-3}$
J_2	$4.9982.10^{-4}$	$4.9982.10^{-4}$
J_4	$-5.3533.10^{-7}$	$-5.3533.10^{-7}$
J_6	$7.4405.10^{-10}$	$7.4325.10^{-10}$

6 Validation de notre modèle non linéaire

6.1 Sphéroïde de Maclaurin

Le sphéroïde de Maclaurin correspond au cas d'une unique couche homogène dans l'approximation non linéaire et en l'absence de forces de marée. Ce cas est intéressant pour la validation, car il existe une solution analytique, qui est un ellipsoïde de révolution.

Le paramètre d'excentricité l^2 défini par $l^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1$ se calcule en résolvant (numériquement) l'équation non linéaire suivante (Hubbard, 2012) :

$$q = \frac{3}{2l^2}[(3 + l^2)\arctan l - 3l],$$

avec $q = q'\varepsilon$. Les valeurs de $J_{2k} = -C_{2k;0}$ sont alors une fraction rationnelle en l^2 :

$$J_{2k} = \frac{3(-1)^{1+k} l^{2k}}{(2k+1)(2k+3)(1+l^2)^k}.$$

Le programme a été lancé avec les paramètres $q' = 1$ et $\varepsilon = 10^{-3}$, soit avec $q = 10^{-3} \ll 1$. Les résultats à l'ordre 3 sont regroupés dans la Table (2).

A l'ordre 1, le programme donne que $k_2 = 1.5$, ce qui correspond à la valeur théorique attendue.

Les valeurs de l^2 et J_{2k} retournés par notre programme sont cohérentes avec la solution analytique et ne commencent à s'écarter significativement qu'à l'ordre le plus élevé pour lequel J_k est non nul (ici, $k = 6$).

Pour des paramètres identiques à ceux de WASP-103b, i.e. $q' = 2.122$ et $\varepsilon = 4.956.10^{-2}$, i.e. $q = 0.1052$, les résultats sont également cohérents avec la solution exacte, mais avec un écart observable dès l'ordre le plus bas – cf. Table 3. Comme q a une valeur 100 plus élevée

TABLE 3 – Valeurs de l^2 et des $J_{2k}\,(1 \leqslant k \leqslant 3)$ pour 1 couche homogène (sphéroïde de Maclaurin), via notre modèle (colonne du milieu) et la solution analytique (colonne de droite) pour $q' = 2.122$ et $\varepsilon = 0.04956$, i.e. $q = 0.1052$.

Paramètres	Modèle (ordre 3)	EDO
l^2	0.3389	0.3403
J_2	$5.1362.10^{-2}$	$5.0781.10^{-2}$
J_4	$-5.4798.10^{-3}$	$-5.5259.10^{-3}$
J_6	$8.6539.10^{-4}$	$7.7947.10^{-4}$

par rapport au cas $q = 10^{-3}$, cela rend le développement perturbatif moins précis.

Nous observons aussi que la solution calculée à l'ordre le plus élevé est bien un ellipsoïde de révolution dans le cas $q = 10^{-3}$ – cf. Figure (8). Cependant, pour $q = 0.1052$, il y a un écart observable entre la solution "sphéroïdale" et la solution exacte qui est un ellipsoïde. Ceci montre bien que l'erreur entre la solution donnée par le développement perturbatif et la solution exacte (qui est un ellipsoïde) augmente lorsque la valeur de q (ou de ε) devient plus élevée.

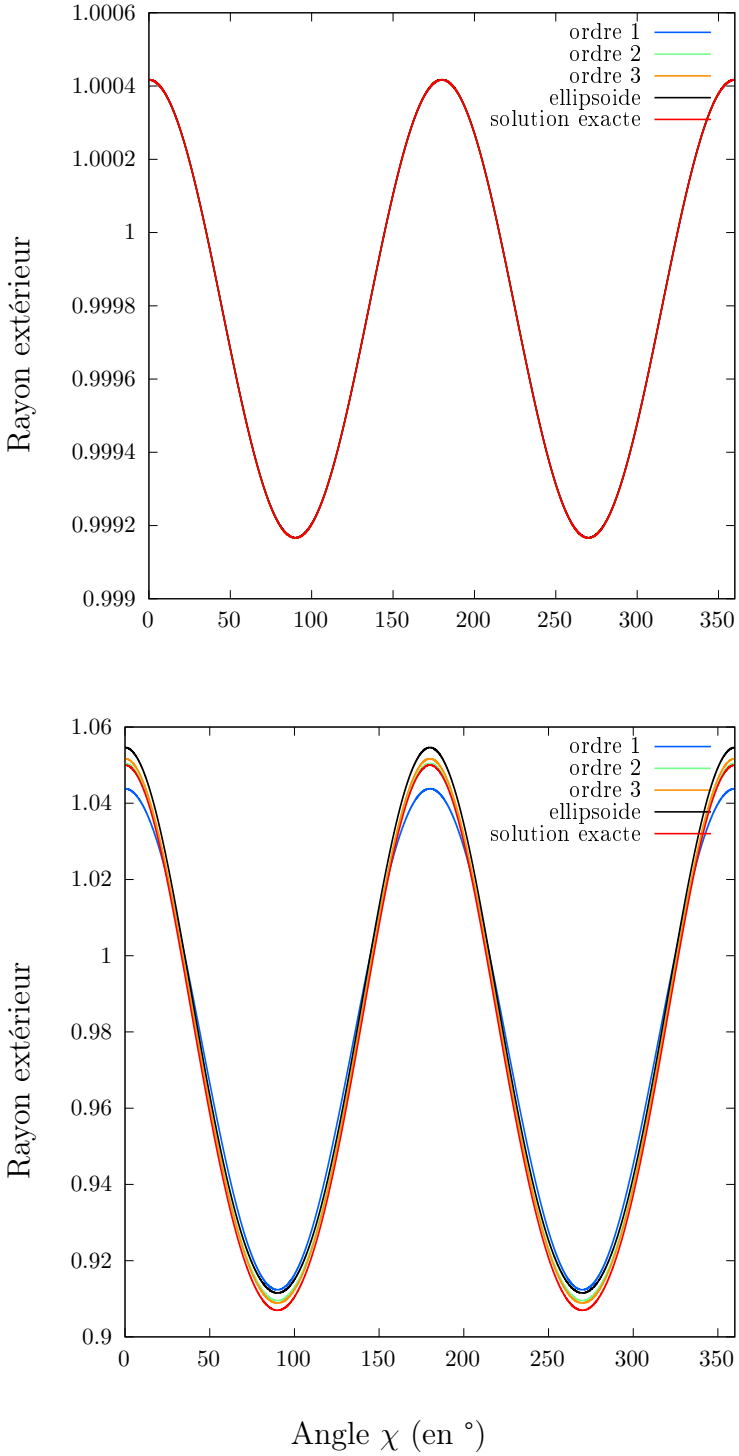

FIGURE 8 – Rayon extérieur de la planète en fonction de l'angle χ mesuré dans le plan (xz) depuis le centre de la planète entre la position d'un point de la surface et l'axe (Ox) (direction de l'étoile), à différents ordres pour $q = 10^{-3}$ (figure en haut) et $q = 0.1052$ (figure en bas) ; la courbe "ellipsoïde" correspond à la solution donnée par le programme lorsque l'on impose que la forme soit un ellipsoïde en entrée, et la courbe rouge correspond à la solution exacte.

7 Application au cas de WASP-103b

7.1 Description des résultats

Pour WASP-103b, on rappelle les paramètres d'entrée : $q' = 2.122$ et $\varepsilon = 4.956.10^{-2}$.

Nous traçons la surface de la planète dans le plan (xz) jusqu'à l'ordre 4 (cf. Figure (9)) pour un modèle de polytrope d'ordre 1 ($P \propto \rho^2$).
On observe bien une surface aplatie au niveau des pôles et étirée au niveau de l'équateur.
La solution à l'ordre 4 présente une légère dissymétrie dans la direction (Ox) par rapport à l'ellipsoïde qui est symétrique, ce qui est dû à la présence de l'étoile (vers $+x$). Dans tous les cas, la planète est très allongée, d'où le qualificatif de "ballon de rugby".

Nous traçons aussi la surface dans le plan (yz) qui est le plan d'observation de la planète lorsque celle-ci est au centre du transit – cf. Figure (10).

Nous calculons plusieurs grandeurs en sortie pour tester notre programme :

— le nombre de Love $k_2 = \frac{V'}{V_{\text{src}}}$ (à l'ordre 1),

— le rapport $\dfrac{a-b}{a-c}$ ($= \frac{3}{4}$ dans la théorie linéaire des marées considérée dans (Barros et al., 2022)),

— le rapport $\dfrac{C_{22}}{C_{20}} (= -\frac{3}{10}$ dans le cas linéaire),

— les valeurs de $J_{2k} = -C_{2k;0}$.

A l'ordre 1, nous retrouvons bien $\frac{a-b}{a-c} = \frac{3}{4}$ et $\frac{C_{22}}{C_{20}} = -\frac{3}{10}$, ce qui justifie que notre modèle est cohérent avec les résultats connus dans le cadre de la théorie linéaire des marées.

On remarque aussi que les valeurs de J_{2k} varient significativement en fonction de l'indice polytropique n, de même que les paramètres d'excentricité p^2 et l^2, correspondant respectivement aux directions (Oy) et (Oz) – cf. Tables (4) et (5).
Les paramètres p^2 et l^2 sont les plus pertinents ici, car ils représentent la forme de la planète. Celle-ci est estimée grâce aux mesures de courbes de transit. En revanche, on ne mesure pas pour les exoplanètes leur champ gravitationnel : il n'est donc pas possible de mesurer les valeurs des J_{2k} (contrairement au cas de Jupiter par exemple où des sondes ont été envoyées spécialement à cet effet).

La variation observée selon l'indice polytropique choisi semble suggérer qu'il serait envisageable de contraindre l'indice du polytrope équivalent de la planète à partir des valeurs des excentricités.

On constate aussi sur la Figure (10) que l'ellipsoïde ne coïncide pas avec la surface à l'ordre le plus élevé (avec un écart maximum de l'ordre de 0.01), ce qui justifie a posteriori

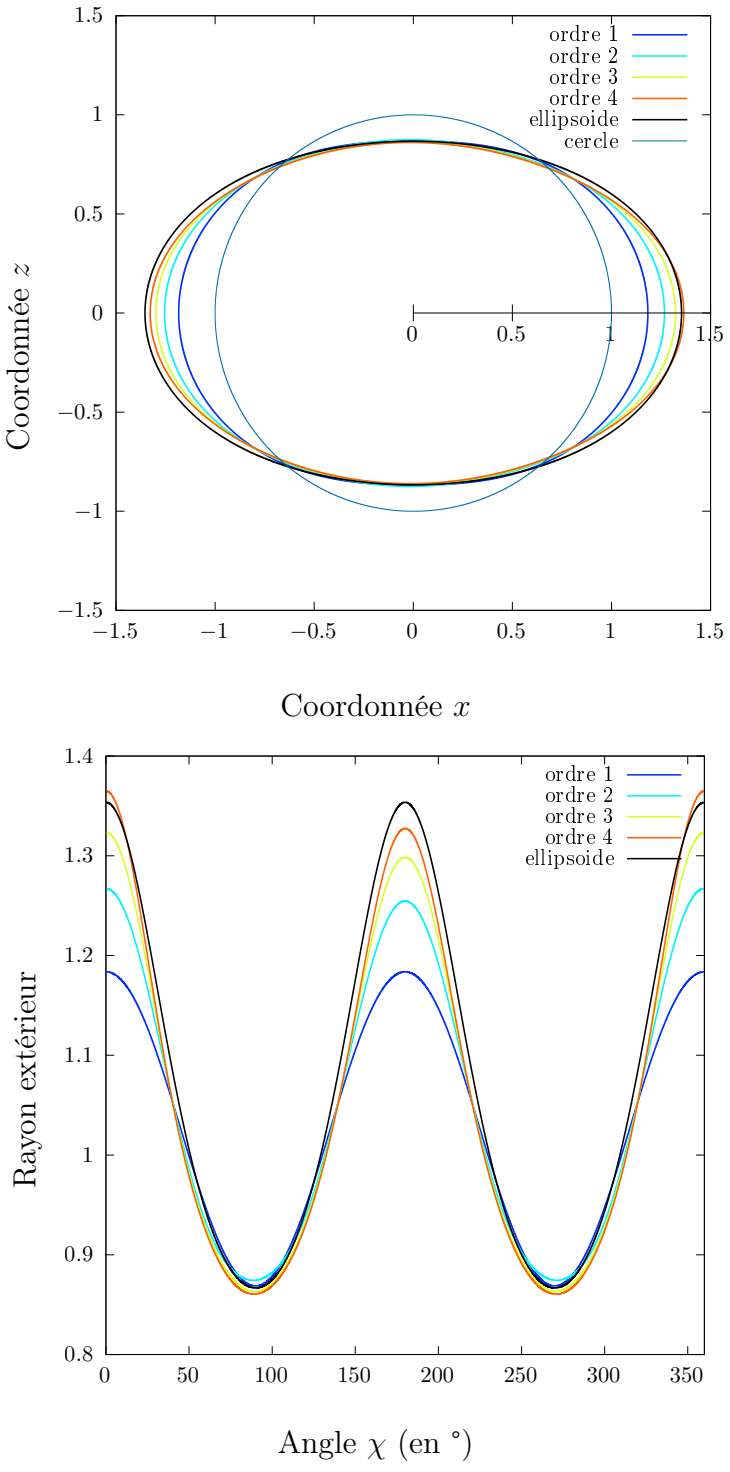

FIGURE 9 – Rayon extérieur de la planète en fonction de l'angle χ mesuré dans le plan (xz) depuis le centre de la planète entre la position d'un point de la surface et l'axe (Ox) (direction de l'étoile), à différents ordres pour un polytrope d'ordre 1 ($N_c = 50$ couches) en représentation polaire (figure du haut) et cartésienne (figure en bas) ; la courbe "ellipsoïde" correspond à la solution donnée par le programme lorsque l'on impose que la forme soit un ellipsoïde en entrée.

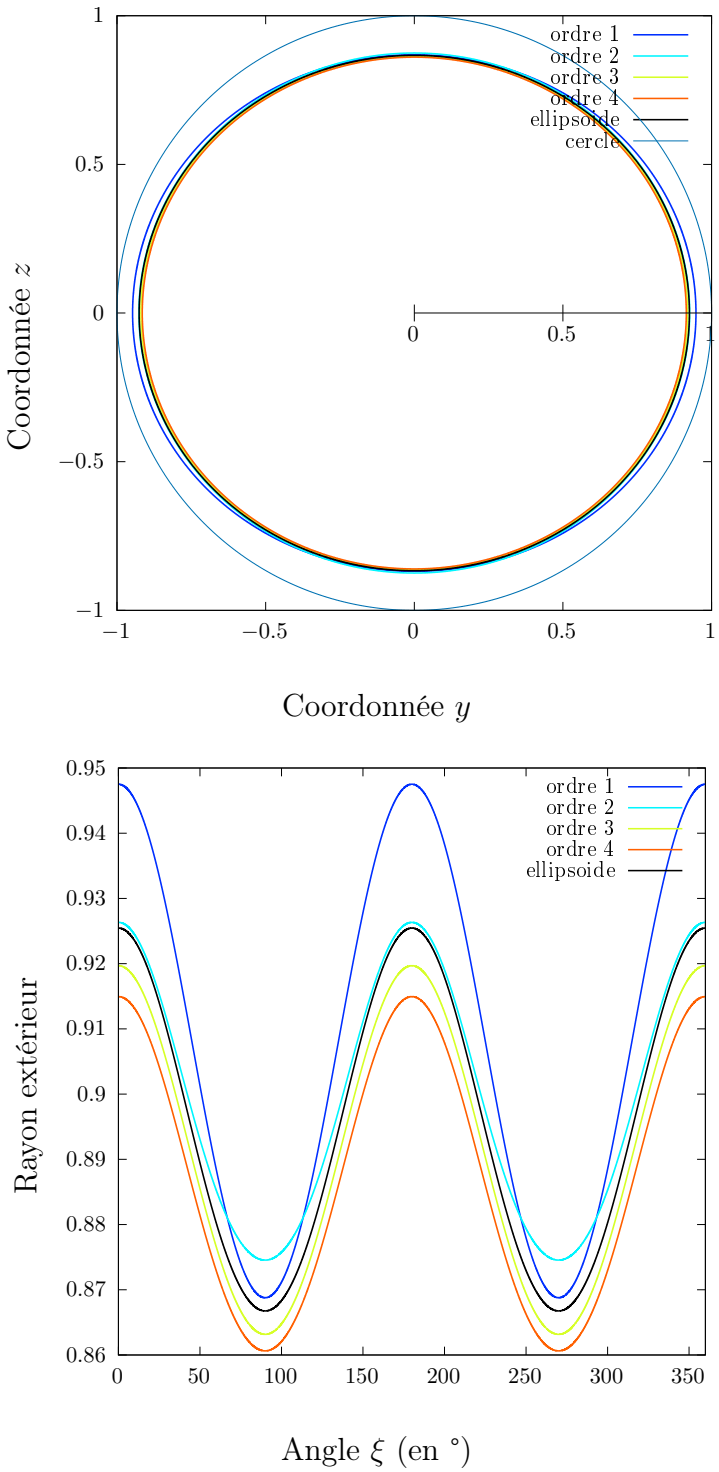

FIGURE 10 – Rayon extérieur de la planète en fonction de l'angle ξ mesuré dans le plan (yz) depuis le centre de la planète entre la position d'un point de la surface et l'axe (Oy), à différents ordres pour un polytrope d'ordre 1 ($N_c = 50$ couches) en représentation polaire (figure du haut) et cartésienne (figure en bas) ; la courbe "ellipsoïde" correspond à la solution donnée par le programme lorsque l'on impose que la forme soit un ellipsoïde en entrée.

TABLE 4 – Valeurs du nombre de Love k_2 et des J_{2k} $(1 \leqslant k \leqslant 4)$ pour le modèle de Barros et al. (2022) et les polytropes d'indice 1 et 3 ; le calcul a été effectué à l'ordre 4 en ε et avec $N_c = 50$ couches.

Paramètres	Théorie linéaire (Barros et al., 2022)	$n = 1$	$n = 3$
k_2	0.59	0.4973	0.2940
J_2	-	$3.344.10^{-2}$	$1.909.10^{-2}$
J_4	-	$-4.551.10^{-3}$	$-1.805.10^{-3}$
J_6	-	$6.516.10^{-4}$	$2.404.10^{-4}$
J_8	-	$4.107.10^{-4}$	$1.121.10^{-4}$

TABLE 5 – Valeurs des paramètres d'excentricité p^2 et l^2, des rapports $\frac{a-b}{a-c}$ et $\frac{C_{22}}{C_{20}}$ pour le modèle de Barros et al. (2022), et les polytropes d'indice 1 et 3 ; le calcul a été effectué à l'ordre 4 en ε et avec $N_c = 50$ couches.

Paramètres	Théorie linéaire (Barros et al., 2022)	$n = 1$	$n = 3$
p^2	0.179	1.226	0.9156
l^2	0.249	1.515	1.133
$\frac{a-b}{a-c}$	0.75	0.8923	0.8801
$\frac{C_{22}}{C_{20}}$	-	-0.4136	-0.3824

l'intérêt d'utiliser un modèle de sphéroïdes quelconques, sans forcer a priori que les couches d'équilibre soient des ellipsoïdes.

Cependant, cela augmente aussi le temps de calcul : par exemple pour $N_c = 50$ couches et un indice de polytrope $n = 3$, le calcul avec une forme "ellipsoïdale" prend environ 2 min alors que le calcul avec des couches de forme spheroïdale prend environ 28 min. En effet, le système d'équations est de taille constante dans le cas du calcul "ellipsoïdal" (ici, nous utilisons 150 variables), alors que celle-ci augmente avec l'ordre dans le cas du calcul "spheroïdal" – nous utilisons $400, 1200, 2400, 4000$ variables pour les ordres $1, 2, 3$ et 4 respectivement.

Nous pourrions ainsi envisager d'utiliser une forme ellipsoïdale pour le calcul, car l'erreur commise – qui est de l'ordre de 1% – est faible par rapport à l'écart maximum observé entre l'ordre 1 et l'ordre 4 – qui est d'environ 3%. Cela permettrait de regarder un ordre de troncature plus élevé ou d'augmenter le nombre de couches utilisé.

7.2 Comparaison des résultats

Nous comparons les résultats de notre modèle, que l'on appelle "polytrope sphérique", avec ceux retournés par un code développé de manière indépendante à l'Université de Bordeaux par Jean-Marc Huré et Clément Staelen. Nous appelons ce modèle "polytrope ellipsoïdal". Celui-ci résout l'équation d'état polytropique couplée avec l'équation d'équilibre hydrostatique de manière numérique, contrairement au modèle que nous avons développé qui est analytique.
Ils utilisent deux types de résolution : un calcul "basse résolution" (LR) utilisant une grille de 32x32x32 et un calcul "haute résolution" (HR) utilisant une grille de 64x64x64 cellules. Les résultats sont présentés sur la Figure (11).

Jean-Marc Huré et Clément Staelen obtiennent le même comportement $\frac{c}{a} = f\left(\frac{b}{a}\right)$, qui semble assez robuste. On constate toutefois que les mêmes valeurs retournées par les deux modèles correspondent à des indices polytropiques différents. Ceci semble être dû au fait que nous n'utilisons pas la même définition du modèle de densité polytropique.
En effet, comme nous le mentionnons en introduction, l'équation d'état de notre modèle de planète déformée n'est pas polytropique : en réalité, c'est la planète non déformée sphérique "à l'infini", qui a une équation d'état polytropique. Ses couches conservent ensuite les mêmes densités lorsqu'on l'amène sans sa configuration réelle. L'équation d'état du modèle utilisé par l'équipe de Bordeaux est au contraire polytropique.

On peut noter sur la Figure (11) que les modèles non linéaires s'écartent significativement de la théorie linéaire des marées, ce qui justifie l'intérêt d'appliquer dans le futur un modèle non linéaire aux données de CHEOPS pour obtenir de nouvelles contraintes sur les rapports $\frac{c}{a}$ et $\frac{b}{a}$. Ces contraintes seront différentes de celles données actuellement par le modèle linéaire utilisé par Barros et al. (2022) (et représentées par le trait plein en bleu sur la Figure (11)).
Cela permettrait de mieux contraindre la distribution de masse à l'intérieur de la planète à partir de la mesure de ses déformations, et en particulier de sonder si la planète possède un coeur dense ou non.

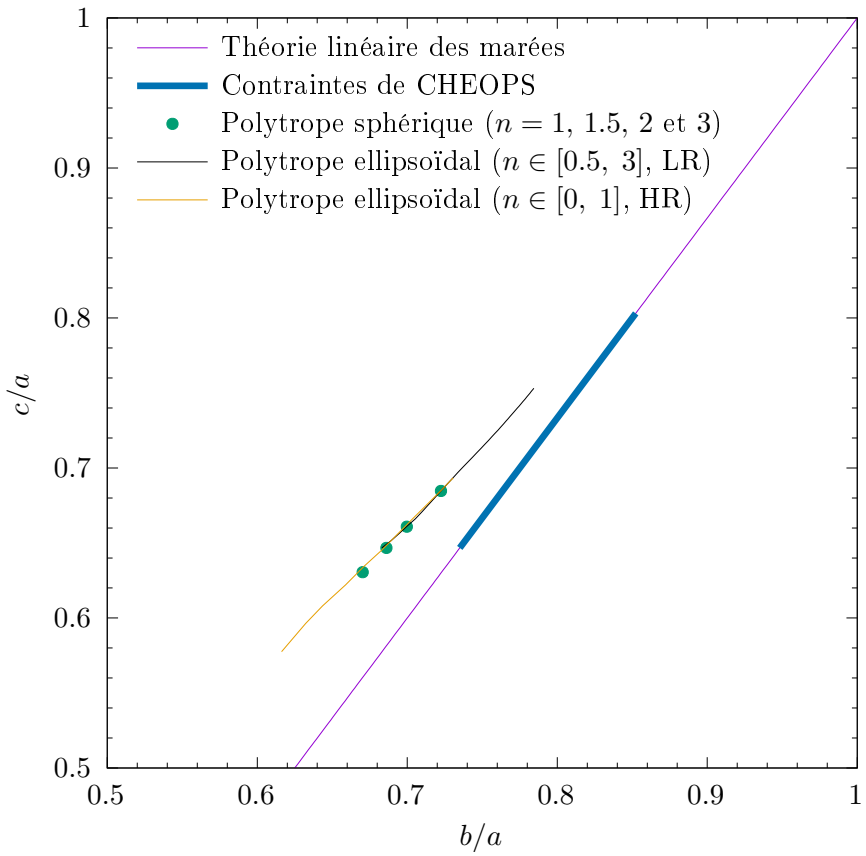

FIGURE 11 – Dépendance de $\frac{c}{a}$ en fonction de $\frac{b}{a}$ dans le cas de la théorie linéaire des marées - cf. Equations (1), (2) et (3), et des modèles "polytrope sphérique" et "polytrope ellipsoïdal".

7.3 Courbe de transit

Nous avons enfin voulu tracer la courbe de transit lorsque la planète passe devant son étoile. On suppose que l'orbite est contenu dans le plan de l'équateur, ce qui est une bonne approximation d'après la valeur du paramètre d'impact qui est de l'ordre de 4% – cf. (Barros et al., 2022). La position de la planète est repérée par l'angle $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ avec l'axe de visée.

On calcule la surface de la planète projetée sur la voûte céleste, i.e. dans le plan $(y'z')$, où les coordonnées primées désignent le repère fixe par rapport à l'observateur. Pour cela, connaissant les coordonnées cartésiennes normalisées (X, Y, Z) d'un point de la surface, on leur applique la matrice de rotation d'angle $-\alpha$ pour obtenir l'expression du rayon dans les coordonnées primées :

$$R_0(X, Y, Z) = R_0(\mathcal{R}(-\alpha)(X', Y', Z')),$$

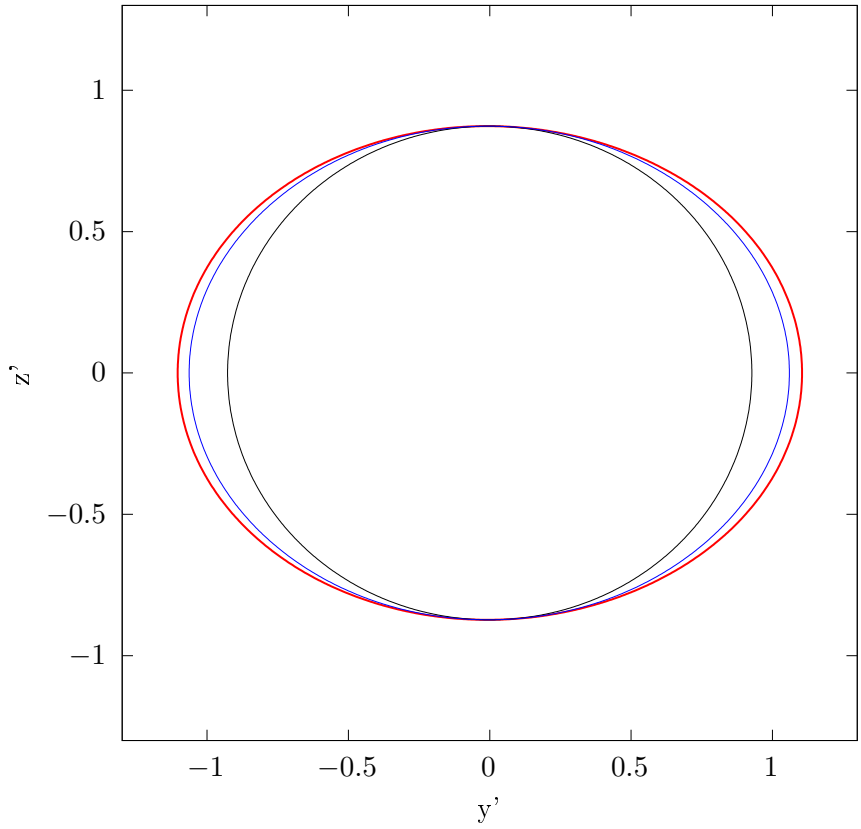

FIGURE 12 – Surface projetée de la planète dans le plan $(y'z')$ pour $\alpha = 45$ degrés (courbe rouge) et $\alpha = 0$ degré (courbe noire), ainsi que la section de la surface correspondant à $X' = 0$ (courbe bleue).

où $\mathcal{R}(-\alpha)$ est donnée par :

$$\mathcal{R}(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le contour de la planète projetée sur la voûte céleste est alors le lieu des points où la normale à sa surface est orthogonale à la ligne de visée.

On présente sur la Figure (12) la forme de la surface projetée pour $\alpha = 45^o$ et $\alpha = 0^o$, ainsi que la section de la surface correspondant à $X' = 0$. On veut vérifier que celle-ci se situe entre les deux courbes précédentes, ce qui est bien le cas.

On tient ensuite compte du fait que la planète n'est pas centrée à l'origine du repère

d'observation en appliquant la translation suivante aux coordonnées (y', z') obtenues :

$$\begin{aligned} y' &\leftarrow y' + d\sin(\alpha), \\ z' &\leftarrow z. \end{aligned}$$

On considère ensuite le profil de brillance surfacique de l'étoile, qui tient compte de l'assombrissement apparent au bord de l'étoile, modèle appelé *limb darkening*. On reprend un des modèles utilisé dans (Barros et al., 2022) qui est une loi puissance d'ordre 2 :

$$I(\mu) = 1 - c_I(1 - \mu^2),$$

avec $c_I \approx 0.57$ et $\mu = \cos(\theta) \in [0, \pi/2]$ qui est l'angle (non orienté) par rapport à l'axe de visée.

Le flux intercepté par la planète lorsqu'elle passe devant son étoile est alors :

$$F_{\mathrm{i}} = \int_0^{R_\star} I(\mu(u))l(u)du,$$

où u est la distance entre un point de la surface projetée et le centre du disque stellaire, et $l(u)$ est la longueur d'arc de rayon u intersectant la surface projetée.

u et μ sont reliées par : $\mu(u) = \sqrt{1 - u^2}$.

La courbe de transit de lumière $F(\alpha)$ est finalement donnée par :

$$F(\alpha) = 1 - F_{\mathrm{i}}(\alpha).$$

On trace la courbe de transit pour les différents ordres de troncature sur la Figure (13).

La différence entre l'ordre linéaire et l'ordre le plus élevé – ici, l'ordre 3 – a un maximum d'environ 550 ppm, ce qui serait observable sur les résidus des spectres mesurés dans (Barros et al., 2022) : en effet, les maximums des résidus entre les fits du modèle sphérique (ordre 0) et du modèle ellipsoïdal (ordre 1) vont d'un peu moins de 100 ppm à environ 200 ppm.
L'écart obtenu est donc non négligeable : comme nous le voyons aussi sur la Figure (11), le modèle non linéaire construit permettrait bien d'apporter des améliorations significatives à l'interprétation des mesures effectuées par CHEOPS.

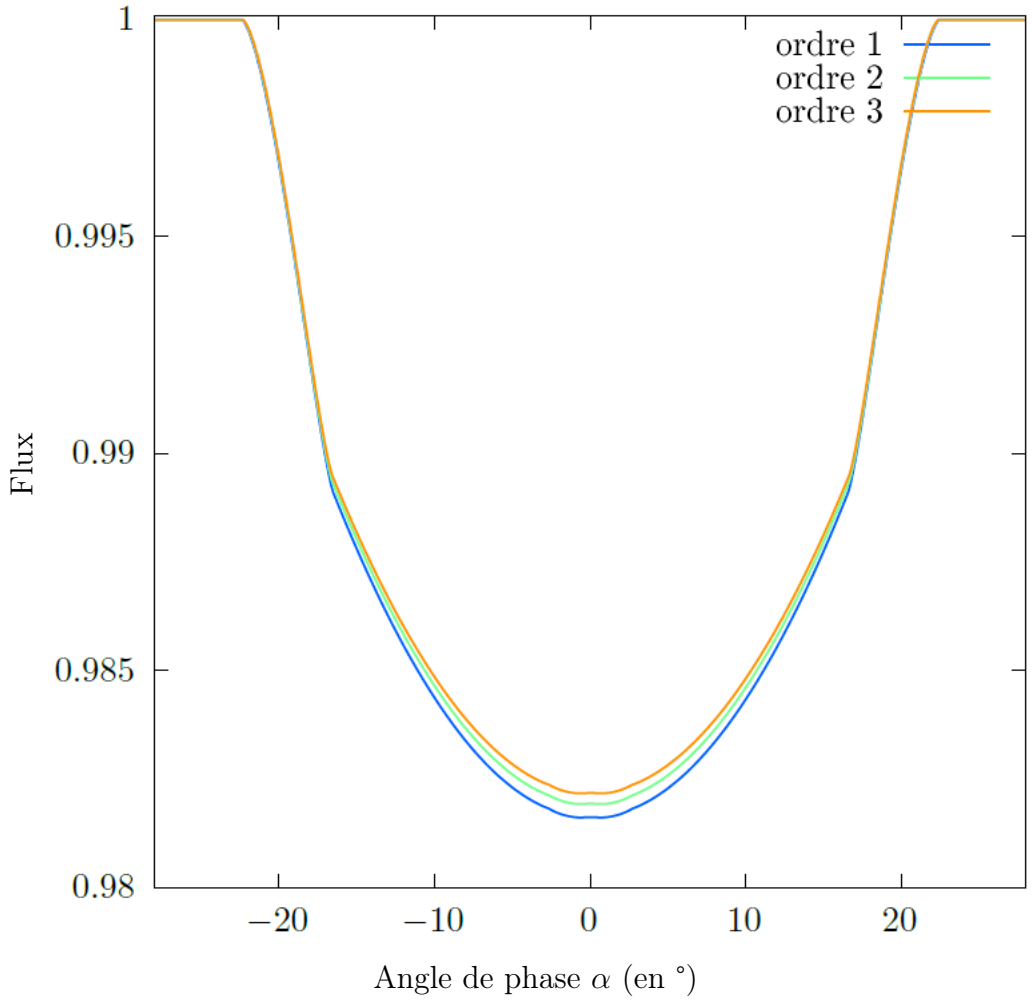

FIGURE 13 – Flux de lumière émise par l'étoile et reçu par l'observateur en fonction de l'ordre de troncature utilisé.

8 Conclusion

Au cours de ce stage, nous avons construit un modèle non linéaire visant à calculer la surface d'équilibre d'une exoplanète en orbite proche autour de son étoile. Celle-ci est plongée dans le potentiel de marée provenant de son étoile compagnon, le potentiel centrifuge provenant de sa rotation propre et dans le potentiel gravitationnel généré par la planète elle-même.

Jusqu'à présent, les modèles existants étaient soit restreints au cas linéaire – (Barros et al., 2022), soit ne considéraient pas les forces de marée – (Hubbard, 2012) et (Hubbard, 2013).

Il s'agit d'un modèle perturbatif qui n'impose pas une forme a priori des surfaces d'équilibre, qui s'éloignent de l'ellipsoïde dans le cas général.

Ce modèle présente des limites : il ne s'applique que pour des rotateurs relativement lents (i.e. $\varepsilon \ll 1$), car il s'agit d'un développement perturbatif. De plus, le temps de calcul augmente rapidement avec l'ordre considéré.
En effet, dans le cas général, on utilise $O(i_c^3)$ variables dans le développement en harmoniques sphériques du rayon des surfaces d'équilibre, où i_c est l'ordre de la troncature. On utilise même $O(N_c i_c^3)$ variables au total, car il y a N_c couches pour échantilloner le profil de densité. La complexité en le nombre de couches est moins problématique, car on parallélise la plupart des boucles sur les couches. De plus, on effectue le calcul des potentiels uniquement pour des couches dites "génériques" une seule fois, que l'on évalue ensuite sur les couches "réelles" à l'aide d'un code orienté objet.

Ce code pourrait être utilisé pour mieux contraindre le profil de densité interne de la planète WASP-103b, à partir de la courbe $\frac{c}{a} = f\left(\frac{b}{a}\right)$ obtenue durant ce stage. Celle-ci serait alors utilisée pour ajuster les mesures de courbes de transit.

Références

Barros S. C. C., Akinsanmi B., Boué G., et al. : Detection of the tidal deformation of WASP-103b at 3 σ with CHEOPS. Astronomy & Astrophysics **657** :A52 (2022)

Gastineau M., Laskar J. : Trip : A computer algebra system dedicated to celestial mechanics and perturbation series. ACM Commun Comput Algebra **44**(3/4), 194–197, URL http://doi.acm.org/10.1145/1940475.1940518 (2011)

Hubbard W. B. : High-precision maclaurin-based models of rotating liquid planets. The Astrophysical Journal Letters **756**(1), L15, URL https://dx.doi.org/10.1088/2041-8205/756/1/L15 (2012)

Hubbard W. B. : Concentric maclaurin spheroid models of rotating liquid planets. The Astrophysical Journal **768**(1), 43, URL https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/768/1/43 (2013)

Jean-Marc Huré et Clément Staelen : Correspondances par mail avec Gwenaël Boué et Jean-Marc Huré (2023)

Khersonskii V. K., Moskalev A. N., Varshalovich D. A. : Quantum Theory Of Angular Momentum. World Scientific Publishing Company, DOI 10.1142/0270 (1988)

Lane H. J., Lane J. H. : On the theoretical temperature of the Sun, under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat, and depending on the laws of gases as known to terrestrial experiment. DOI 10.2475/ajs.s2-50.148.57, URL https://doi.org/10.2475/ajs.s2-50.148.57 (1870)

MacMillan W. : The Theory of the Potential. (MacMillan : Theoretical Mechanics), McGraw-Hill Book Company, Incorporated, URL https://books.google.fr/books?id=-PEgAAAAMAAJ (1930)

Sterne T. E. : Apsidal motion in binary stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **99**, 451–462 (1939)