PROBLÈMES D'ÉVOLUTION EN TEMPS GRAND : RETOUR À L'ÉQUILIBRE, INÉGALITÉS FONCTIONNELLES ET HYPOCOERCIVITÉ

JEAN DOLBEAULT [#,1] ET BRUNO NAZARET [#,2]

Abstract. L'objectif de ce cours est de donner des estimations explicites de la vitesse de retour à l'équilibre des solutions d'une équation aux dérivées partielles, linéaire ou non-linéaire.

(1) Sur des exemples simples comme l'équation de la chaleur, on introduira la notion d'états asymptotiques intermédiaires et on montrera que l'inégalité de Poincaré à poids gaussien ou l'inégalité de Sobolev logarithmique donnent des descriptions des solutions en temps grand dans différents espaces fonctionnels. Ces inégalités seront abordés sous différents points de vue. On les démontrera par la méthode de Bakry-Emery ou par une approche spectrale avant de les établir sous une forme plus générale.
(2) Dans un deuxième temps, on étudiera les équations des milieux poreux ou à diffusion rapide. Les estimations linéaires seront étendues au cas des diffusions non-linéaires par les méthodes d'entropie. On abordera aussi les problèmes linéarisés qui permettent de donner les résultats les plus généraux en temps grand, au prix de constantes non explicites mais avec des taux de convergence optimaux.
(3) La troisième partie est consacrée à la théorie de l'hypocoercivité. Il s'agit d'une méthode nouvelle qui fait l'objet de nombreuses recherches et s'applique à des équations dans lesquelles interviennent un opérateur correspondant à une dynamique purement réversible avec certaines propriétés de mélange, et un opérateur de type opérateur diffusif (comme dans les points 1 et 2) ou plus généralement de type dissipatif, mais n'agissant que sur certaines variables. Cette théorie s'applique à des modèles de physique statistique, d'astrophysique (équations de Fokker-Planck) ou de mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes).
(4) La quatrième partie sera consacrée aux flots gradients.

Ces notes sont disponibles à l'adresse
`http://www.ceremade.dauphine.fr/~dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/index.pdf`
Utiliser `EDP` comme identifiant et `MAD` comme mot de passe pour accéder aux références

Lien avec le projet ANR *Dissipative EVOLutions and convergence to equilibrium:*
`http://www.math.univ-toulouse.fr/EVOL/`

Date: Jean Dolbeault: 1er, 8, et 15 février 2011, et 1er mars 2011
Bruno Nazaret: 8, 15 et 22 mars 2011.

Plan du cours

Cours 1. Méthodes d'entropie pour les équations de diffusion linéaires et inégalités fonctionnelles:
- équation de la chaleur: cas d'un domaine borné
- équation de la chaleur dans l'espace euclidien, asymptotiques intermédiaiares
- inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique, cas gaussien et cas euclidien
- méthode d'entropie – production d'entropie
- inégalités de Poincaré généralisées
- inégalité de Csiszár-Kullback

Cours 2. Equations de diffusion non linéaires, inégalités de Gagliardo-Nirenberg
- changement d'échelle dépendant du temps
- énergie libre
- inégalités de Gagliardo-Nirenberg
- asymptotiques intermédiaires
- preuve des inégalités de Gagliardo-Nirenberg: approche variationnelle et méthode de Bakry-Emery

Cours 3. Equations de diffusion non linéaires et linéarisation
- linearisation de l'entropie et de l'information de Fisher généralisées
- inégalités de Hardy-Poincaré
- application au comportement asymptotique en temps grand des solutions de l'équation des milieux rapides

Exemples
- le modèle de Keller-Segel
- les équations de Navier-Stokes en dimension deux
- limites diffusives d'équations cinétiques

Cours 4. Introduction à l'hypocoercivité

1. From Poincaré to logarithmic Sobolev inequalities

For a brief historical overview of *Entropy methods in partial differential equations*, see
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/Historical.pdf`
A more complete introduction is available at
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/References/ACDDJLMTV.pdf`
Some notes can be found at
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/Linear.pdf`

1.1. **Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities.** Poincaré inequality in a bounded domain (Dirichlet, Neumann, and connection with first and second eigenvalue problems) or with respect to the Gaussian measure - Harmonic oscillator and a spectral proof:
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/Harmonic.pdf`

1.2. **The entropy – entropy production method of Bakry & Emery.** Case of the heat equation in the euclidean space - Various forms of the logarithmic Sobolev inequality in the euclidean and in the Gaussian case

1.3. **The Poincaré inequality and a family of interpolating inequalities.** A proof of Beckner's generalized Poincaré inequalities by the entropy – entropy production method of Bakry & Emery - case of the Ornstein-Uhlenbeck equation
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/DNS.pdf`
Also see Beckner's paper:
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/References/Beckner89.pdf`

1.4. **Comparison of the generalized Poincaré inequalities.** Logarithmic Sobolev inequality is the strongest one. As far as sharp values of the constants are not concerned, generalized Poincaré inequalities are equivalent to the Gaussian Poincaré inequality.

1.5. **Properties of the generalized Poincaré inequalities.** The Holley-Stroock lemma
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/Perturbations.pdf`

1.6. **Tensorization and sub-additivity properties.**
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/Tensorization.pdf`

2. Interpolation inequalities

2.1. **Introduction.** For a general introduction to porous media and fast diffusion equations, see
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/References/Vazquez/Vazquez`

2.2. **First results.** The entropy - entropy production applied to porous media and fast diffusion equations (Bakry-Emery approach):
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/References/Carrillo-Toscan`
A variational method for proving the interpolation inequalities:
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/References/delPino-Dolbeau`

2.3. **A useful tool: the Gidas-Ni and Nirenberg theorem.** This is a standard result of the qualitative theory of elliptic partial differential equations. Under some conditions, solutions inherit of the symmetry properties of the equation:
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/References/Gidas-Ni-Nirenb`
`http://www.ceremade.dauphine.fr/∼dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/References/Gidas-Ni-Nirenb`

2.4. **Relative entropies.** A recent approach is based on the linearization of the entropy - entropy production inequalities, using additional properties of the solutions. This amounts to interpolate with an additional uniform estimate, in relative variables.
`http://www.ceremade.dauphine.fr/~dolbeaul/Teaching/files/EDP-MAD2011/References/BBDGV-1.pdf`

3. Hypocoercvity

Some references:
• Villani C., *Hypocoercivity*, to appear in Memoirs of the AMS:
`http://www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani/Cedrif/B09.Hypoco.pdf`
• Mouhot C., Neumann L., *Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus*, Nonlinearity 19 (2006) 969-998
`http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/08/71/73/PDF/MN-17.pdf`
• Dolbeault J., Mouhot C., Schmeiser C., *Hypocoercivity for kinetic equations with linear relaxation terms*, to appear in Notes CRAS Paris
`http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/36/02/87/PDF/DMS-0-13.pdf`

#Ceremade, Université Paris Dauphine, Place de Lattre de Tassigny, F-75775 Paris Cédex 16, France
(1) J. Dolbeault : bureau B.514ter, E-mail: dolbeaul@ceremade.dauphine.fr
Tél. (33) 1 44 05 47 68
(2) B. Nazaret : Bureau B.623, E-mail : nazaret@ceremade.dauphine.fr
Tél. (33) 1 44 05 46 77