MÉTHODES D’ENTROPIE POUR LES EDP

JEAN DOLBEAULT

RÉSUMÉ. Cours donné à l’Université de Tunis (février 2019) sur les *Méthodes d’entropie pour les EDP*
1. Diffusions linéaires et taux de convergence
2. Diffusions non-linéaires et inégalités d’interpolation
3. Inégalités fonctionnelles, symétrie et flots
4. Introduction à l’hypocoercivité

INTRODUCTION

Une *entropie* est une quantité calculée à partir d’une solution, qui décroît au cours du temps lorsque la solution obéit à une équation d’évolution, et qui n’est stationnaire que pour les solutions stationnaires de l’équation. En physique l’entropie décrit l’irréversibilité dans un processus comme l’équation de Boltzmann, et relève d’une notion encore plus précise en thermodynamique et en physique statistique, comme la mesure du désordre dans un système et la tendance à aller vers des états de plus en plus désordonnés. La notion d’entropie a été utilisé dans beaucoup d’autres domaines, par exemple pour caractériser des solutions en mécanique des fluides (des liens peuvent effectivement être établis avec des notions de thermodynamique dans certains cas), en théorie de l’information, ou encore en probabilités et en particulier en théorie des processus de Markov. Les *méthodes d’entropie* se sont particulièrement développées depuis une vingtaine d’années en théorie des EDP et obéissent à différents objectifs. Dans le domaine des équations cinétiques, il s’est agi de donner des estimations *a priori* avant de chercher à déterminer des taux de convergence. Dans le domaine des équations paraboliques comme dans celui des processus de Markov, donner des taux, si possible optimaux, revient à déterminer des constantes, éventuellement optimales, dans des inégalités fonctionnelles associées. C’est un point de vue qui a suscité un énorme intérêt au travers de la théorie du transport de masse (en lien avec la distance de Wasserstein) et plus généralement de la théorie des flots gradients.

Si l’on s’en tient aux équations cinétiques, déterminer des taux optimaux, globaux, de convergence, est autrement plus difficile et semble pour l’instant essentiellement hors de portée. La notion d’*hypo-coercivité* a été proposée par T. Gallay précisément pour de tels problèmes. L’objectif est typiquement de contrôler l’entropie au temps t par l’entropie initiale que multiplie une constante C (toujours plus grande que 1) et un facteur de décroissance exponentielle, avec un taux de décroissance exponentielle aussi bon que possible en temps grand. Cette théorie s’inspire de la théorie hypo-elliptique de L. Hörmander, et le mot hypo-coercivité rend compte de la relation entre l’entropie et sa dérivée par rapport à t. Il y aurait coercivité si $C = 1$, ce qui n’est clairement pas possible dans la plupart des cas considérés en théorie cinétique.

Voici quelques monographies qui peuvent servir de points d’entrée dans la littérature des méthodes d’entropie pour les EDP :
• Le livre [3] de D. Bakry, I. Gentil et M. Ledoux présente dans un cadre principalement linéaire les résultats obtenus par la méthode du *carré du champ* et ses extensions. Il s’agit d’une présentation synthétique d’un très grand nombre de travaux, qui reste parfaitement accessible avec une formation d’analyste.
• Dans [10], A. Jüngel a donné une présentation concise des méthodes d’entropie sur quelques exemples bien choisis, qui comprennent entre autres le cas de l’équation de diffusion rapide. Ce livre est une excellente introduction aux méthodes d’entropie appliquées à des équations paraboliques non-linéaires.
• Le livre [11] de C. Villani sur le transport de masse est une référence incontournable. Bien que très complet, il reste d’accès relativement facile. Sur les flots gradients, on pourra se référer à [2] qui suppose toutefois un niveau technique, en mathématiques, beaucoup plus avancé.
• Bien qu’il ne s’agisse pas (encore) d’un livre, les notes de cours de C. Schmeiser sont accessibles en ligne à l’adresse

https://homepage.univie.ac.at/christian.schmeiser/Entropy-course.pdf

et ont l’avantage d’être accompagnée de la video intégrale

https://www.sciencesmaths-paris.fr/fr/le-cours-de-christian-schmeiser-963.htm

du cours qu’il a donné à l’Institut Henri Poincaré à l’automne 2018.

La suite de ce texte est un plan détaillé du cours, qui destiné à fournir quelques points de repère, en particulier bibliographiques. Pour des notes de cours sur *Symmetry and nonlinear diffusion flows*, qui ne suivent pas exactement le plan ci-dessous, on pourra se référer à

https://www.ceremade.dauphine.fr/~dolbeaul/Teaching/files/UChile-2017/LectureNotes.pdf

en particulier pour les φ-entropies et tous les résultats concernant les diffusions non-linéaires et les applications aux inégalités fonctionnelles et à l'étude de la brisure de symétrie.

1. Diffusions linéaires et taux de convergence : des équations paraboliques aux équations cinétiques

1.1. Equations de diffusion linéaires. L'équation de la chaleur, méthodes classiques pour l'étude en temps long : principe de comparaison, fonction de Green, analyse spectrale, transformation de Fourier

L'équation de la chaleur, les variables auto-similaires, l'équation de Fokker-Planck et l'équation de Ornstein-Uhlenbeck. Un cas simple de la méthode de Bakry-Emery pour démontrer l'inégalité de Poincaré à poids gaussien. La méthode de Beckner pour interpoler entre norme L^2 (on admet l'inégalité de Sobolev logarithmique pour commencer) et entropie de Gibbs. Deux applications principales : les taux de convergence, et les inégalités fonctionnelles. Raffinements et inégalités améliorées.

La méthode de Bakry-Emery expliquée dans le cas d'un potentiel log convexe pour des p-entropies (calcul à la manière de DNS). Un aparté sur le cas des domaines convexes. La généralisation aux φ-entropies.

Des outils complémentaires : le lemme de Holley-Stroock et les inégalités de Csiszár-Kullback-Pinsker.

Référence : [8]

1.2. Mesure de la décroissance en l'absence de confinement. La solution de l'équation de la chaleur décroît en norme L^2. Utilisation de l'inégalité de Nash et preuve. Référence : [5]

1.3. Un "toy model" pour comprendre l'enjeu des méthodes hypocoercives. Le toy model composé d'un système de deux EDO couplées. Deux directions de généralisation : [1] et l'analyse en Fourier, qui est l'une des motivations de l'étude de l'hypo-coercivité mode-par-mode et sera développée dans la suite de ce cours. Les deux grandes classes de noyaux de collision sont :
1. des opérateurs de diffusion agissant sur les vitesses, de type Fokker-Planck,
2. des opérateurs de scattering.

1.4. Equations cinétiques et hypocoercivité H^1. Le calcul de C. Villani. Généralisation aux p-entropies dans le cas de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck avec potentiel harmonique. Comment fait-on dans le cas où il n'y a pas de potentiel de confinement (*cf.* dernier cours) ? Référence : [8]

2. Diffusions non-linéaires et inégalités d'interpolation

On se place dans le cadre de l'espace Euclidien.

2.1. Inégalités de Gagliardo-Nirenberg. Introduction aux équations de diffusion non-linéaire : milieux poreux et diffusion rapide. Les différents régimes. Solutions de Barenblatt et changement de variables auto-similaire. L'approche entropie - production d'entropie et les inégalités de Gagliardo-Nirenberg. Méthode variationnelle. Référence : [6]

2.2. Taux asymptotiques. Les inégalités de Hardy-Poincaré. Taux asymptotiques et taux globaux. Améliorations. Référence : [4].

2.3. La méthode du carré du champ. Le calcul de Bakry-Emery en variables auto-similaires. Une reformulation dans le cadre des entropies de Rényi. Référence : [7].

3. INÉGALITÉS FONCTIONNELLES, SYMÉTRIE ET FLOTS

Voir notes Santiago : https://www.ceremade.dauphine.fr/~dolbeaul/Teaching/files/UChile-2017/LectureNotes.pdf

4. INTRODUCTION À L'HYPOCOERCIVITÉ

L'objectif est de présenter principalement les méthodes L^2 appliquées à des équations cinétiques linéaires, avec noyaux de collision.

4.1. **Un détour par les limites de diffusion.** Changement d'échelle parabolique et analyse formelle de la limite de diffusion : le cas linéaire et le cas des gaz polytropiques (lien avec les diffusions non-linéaires). Référence : [9]

4.2. **Hypocoercivité dans le tore ou en présence d'un potentiel de confinement.** Le résultat d'hypocoercivité abstrait. Application à des cas simples : tore et potentiel de fconfinement quadratique.

4.3. **Transformation de Fourier et analyse mode-par mode.** On réalise une transformation de Fourier en x de sorte que la variable de Fourier associée devient un simple paramètre. On fait ensuite l'analyse mode-par-mode de l'hypocoercivité.

4.4. **Taux de décroissance en l'absence de potentiel extérieur.** L'analyse mode-par-mode permet de donner des taux de décroissance globaux. Alternativement, on peut utiliser une inégalité de Nash et, pour des potentiels très faiblement confinants, des estimations de moments.

RÉFÉRENCES

[1] F. ACHLEITNER, A. ARNOLD, AND D. STÜRZER, *Large-time behavior in non-symmetric Fokker-Planck equations*, Riv. Math. Univ. Parma (N.S.), 6 (2015), pp. 1–68.

[2] L. AMBROSIO, N. GIGLI, AND G. SAVARÉ, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[3] D. BAKRY, I. GENTIL, AND M. LEDOUX, *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*, vol. 348 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer, Cham, 2014.

[4] A. BLANCHET, M. BONFORTE, J. DOLBEAULT, G. GRILLO, AND J.-L. VÁZQUEZ, *Asymptotics of the fast diffusion equation via entropy estimates*. to appear in Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2008.

[5] E. BOUIN, J. DOLBEAULT, AND C. SCHMEISER, *A variational proof of Nash's inequality*. working paper or preprint, 2018.

[6] M. DEL PINO AND J. DOLBEAULT, *Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions*, J. Math. Pures Appl. (9), 81 (2002), pp. 847–875.

[7] J. DOLBEAULT, M. J. ESTEBAN, AND M. LOSS, *Interpolation inequalities, nonlinear flows, boundary terms, optimality and linearization*, Journal of elliptic and parabolic equations, 2 (2016), pp. 267–295.

[8] J. DOLBEAULT AND X. LI, Φ-*Entropies : convexity, coercivity and hypocoercivity for Fokker-Planck and kinetic Fokker-Planck equations*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 28 (2018), pp. 2637–2666.

[9] J. DOLBEAULT, P. MARKOWICH, D. ÖLZ, AND C. SCHMEISER, *Non linear diffusions as limit of kinetic equations with relaxation collision kernels*, Arch. Ration. Mech. Anal., 186 (2007), pp. 133–158.

[10] A. JÜNGEL, *Entropy Methods for Diffusive Partial Differential Equations*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer International Publishing, 2016.

[11] C. VILLANI, *Optimal transport*, vol. 338 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 2009. Old and new.

J. DOLBEAULT: CEREMADE (CNRS UMR N° 7534), PSL UNIVERSITY, UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE, PLACE DE LATTRE DE TASSIGNY, 75775 PARIS 16, FRANCE

E-mail address: dolbeaul@ceremade.dauphine.fr