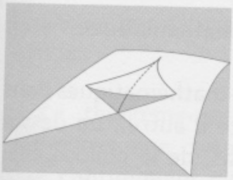

Hommage à René Thom

Ivar Ekeland

La première fois que j'ai vu René Thom[1], en 1970, il était déjà une légende des mathématiques. Les histoires sur lui ne manquaient pas (on ne prête qu'aux riches), et on se les racontait avec révérence. On disait, par exemple, qu'il avait fait sa thèse sous la direction de Cartan, et qu'il se serait avéré incapable de rédiger les démonstrations à la satisfaction de celui-ci ; un autre éminent mathématicien aurait alors dissipé les scrupules de Cartan par cette phrase admirable : « *Peu importe : il y a bien dix personnes au monde capables de démontrer ces théorèmes, mais il n'y en a qu'une qui soit capable de les trouver* ».

J'étais allé, je ne sais pourquoi, à un séminaire à l'IHÉS. Je venais de terminer ma thèse, ou j'étais en passe de le faire, et je cherchais à changer de sujet. Les séminaires, à l'époque, avaient lieu dans la bibliothèque, au fond du jardin, il avait fallu prendre le train, tout cela était un peu irréel quand on gravitait entre les salles de l'École Normale et celles de l'IHP, et cette impression d'étrangeté un peu magique m'a vraiment pris à la gorge quand j'ai vu cet homme qui ne ressemblait absolument pas à un professeur de mathématiques, qui se servait du tableau pour faire des figures et non des calculs, et qui s'appelait René Thom. Depuis, Thom est toujours pour moi resté un magicien ; il m'ouvrait les portes d'un monde merveilleux que j'avais cru quitter en rentrant à l'École Normale.

Au lycée et en prépa, j'avais adoré la géométrie sous toutes ses formes, les inversions et les transformations anallagmatiques, les courbes planes, avec leurs développantes, leurs développées, et leurs enveloppes, les courbes de l'espace et le trièdre de Frenet, la géométrie analytique, les asymptotes du cercle et les points cycliques, les solutions des équations différentielles, et le mystère des solutions singulières, le tout bien sûr agrémenté de figures, tracées à main levée au tableau ou au tire-ligne sur une épure. Tout cela s'était arrêté net à l'École Normale. Toute velléité de faire de la géométrie m'avait été retirée comme avec la main par un « cours aux carrés », destiné à nous introduire à la topologie algébrique, fait par une gloire du sujet, et dont la première séance avait consisté en une démonstration par le menu du « lemme des cinq », à grand renfort de diagrammes commutatifs. Comme je ne comprenais ni ce que l'on cherchait à démontrer ni à quoi cela pouvait bien servir, j'en avais conclu, trop vite peut-être, que la topologie algébrique n'était pas pour moi. J'avais alors cherché quelque part sur la place de Paris un cours sur les équations différentielles ordinaires, et j'avais dû me rendre à l'évidence : nulle part, ni à la Sorbonne ni à Orsay, il n'y avait de cours sur le sujet qui aille au-delà du

[1]On m'excusera d'écrire cet article sur un mode personnel. C'était plus facile ainsi, mais mon expérience a été partagée par bien d'autres mathématiciens dont je voudrais me faire l'interprète, notamment Alain Chenciner et Marc Chaperon, avec lesquels j'ai discuté du contenu de cet article et que je remercie pour leurs critiques et leurs commentaires.

théorème d'existence locale de Cauchy-Lipschitz. Mon destin mathématique s'était alors orienté vers d'autres voies.

D'où le choc Thom. C'était un géomètre, il voyait les objets mathématiques dans sa tête, et tout lui était bon pour les faire passer dans la tête d'autrui, un dessin au tableau, une analogie tirée de la biologie, ou, pourquoi pas, de la philosophie. Il ne trouvait pas la théorie des enveloppes ridicule, et il n'interposait pas l'algèbre entre la géométrie et l'entendement. Il cherchait à faire comprendre pourquoi les théorèmes étaient vrais. Les démonstrations, on allait les chercher ailleurs, mais c'est chez Thom que l'on cherchait le pourquoi des choses. Et une fois que l'on s'était engagé dans cette voie, quelle richesse mathématique l'on découvrait : le théorème de préparation différentiable, dû à Bernard Malgrange, les stratifications de Whitney, les sept catastrophes élémentaires et toute la classification des singularités des applications différentiables, menée à son terme par John Mather, avec la découverte des « nice dimensions ». Ce sont des mathématiques absolument superbes, d'une beauté transcendante, et je me souviens encore du plaisir que nous avions à les travailler et à les enseigner.

Bien sûr, il y a aussi la théorie du cobordisme, et tout le travail de Thom en topologie algébrique, à laquelle je n'ai pas accès. Mais s'il me fallait retenir une seule chose de cette œuvre, je choisirais, pour ma part, le théorème de transversalité. Encore une idée de géomètre : dans quelle mesure les objets sont-ils flexibles ? Peut-on bouger un peu la figure pour que la tangente ne soit plus tangente, et pour que les racines multiples se déploient en racines simples ? En géométrie algébrique, c'est une méthode bien connue, mais le génie de Thom est de l'avoir énoncé dans le cas différentiable : encore un de ces théorèmes que dix personnes peuvent démontrer, mais qu'une seule peut imaginer. La démonstration, comme tant de choses en topologie différentielle, repose sur le théorème des fonctions implicites, auquel vient se joindre le théorème de Baire. C'est l'utilisation de ce dernier, plutôt que de la théorie de la mesure, qui permet au théorème de transversalité de s'appliquer aux espaces de fonctions (et plus précisément, aux espaces de jets), qui sont de dimension infinie. Saluons au passage l'œuvre de Charles Ehresmann, à laquelle Thom se plaisait à rendre hommage : c'est lui qui a inventé ces espaces de jets, qui permettent de traiter de façon géométrique (et, faut-il le dire, étonnamment simple : les conditions d'intégrabilité ont tout simplement disparu) les dérivées successives, et qui fournissent le cadre naturel de la topologie différentielle.

Entre les mains de Thom, le théorème de transversalité est devenu beaucoup plus qu'un outil mathématique. Il répond à une question générale, qui devrait être à l'avant-plan de la réflexion de tout scientifique : qu'est-ce qui est ordinaire, qu'est-ce qui est exceptionnel ? Où est le général, où est le singulier ? Est-ce que je suis en train d'étudier un cas pathologique, ou est-ce que je suis sur la piste d'une loi universelle ?

On sait qu'une propriété est générique au sens de Thom si l'ensemble des points qui la satisfont contient une intersection dénombrable d'ouverts denses (et si l'espace ambiant est complet). Cette définition est utilisable, par exemple, dans les espaces de fonctions différentiables, qui ne possèdent pas de probabilité naturelle (invariante par translation). Une propriété générique se trouve donc être « générale », en un sens naturel : si P et Q sont génériques, il en est de même de $[PetQ]$[2]. Cela

[2]Et même de toute intersection dénombrable de propriétés génériques