

# Le tournant des mathématiques financières

*Pièce en trois actes*

I. Ekeland

IHP, 1er Décembre 2010

**La scène:** *On ne s'occupera ici que des produits financiers, c'est-à-dire des flux d'argent (actions, obligations, produits dérivés). Par opposition aux biens économiques, ils peuvent être produits et stockés gratuitement. Ces produits sont achetés et vendus sur des marchés spécialisés. On dit qu'un produit est risqué si le flux n'est pas connu à l'avance. Il existe deux prototypes de produits non risqués:*

- *les obligations du Trésor américain*
- *les comptes au jour le jour*

## Les personnages par ordre d'entrée en scène

- LE RISQUE DE MARCHE. *Les cours peuvent descendre aussi bien que monter, les performances passées ne garantissent pas les performances futures. C'est le personnage principal et sympathique, et tous les autres sont des parasites qui lui empoisonnent l'existence*

## Les personnages par ordre d'entrée en scène

- LE RISQUE DE MARCHE. *Les cours peuvent descendre aussi bien que monter, les performances passées ne garantissent pas les performances futures. C'est le personnage principal et sympathique, et tous les autres sont des parasites qui lui empoisonnent l'existence*
- LE RISQUE DE CREDIT *Votre contrepartie peut ne pas honorer ses engagements.*

## Les personnages par ordre d'entrée en scène

- LE RISQUE DE MARCHE. *Les cours peuvent descendre aussi bien que monter, les performances passées ne garantissent pas les performances futures. C'est le personnage principal et sympathique, et tous les autres sont des parasites qui lui empoisonnent l'existence*
- LE RISQUE DE CREDIT *Votre contrepartie peut ne pas honorer ses engagements.*
- LE RISQUE DE LIQUIDITE *Vous ne pouvez pas vendre votre produit au moment où vous en avez besoin*

## Les personnages par ordre d'entrée en scène

- LE RISQUE DE MARCHE. *Les cours peuvent descendre aussi bien que monter, les performances passées ne garantissent pas les performances futures. C'est le personnage principal et sympathique, et tous les autres sont des parasites qui lui empoisonnent l'existence*
- LE RISQUE DE CREDIT *Votre contrepartie peut ne pas honorer ses engagements.*
- LE RISQUE DE LIQUIDITE *Vous ne pouvez pas vendre votre produit au moment où vous en avez besoin*
- LE RISQUE OPERATIONNEL *Pour une institution financière, c'est un défaut d'organisation ou de surveillance qui conduit à une perte: un trader qui prend des positions à l'insu de sa hiérarchie*

## Les personnages par ordre d'entrée en scène

- LE RISQUE DE MARCHE. *Les cours peuvent descendre aussi bien que monter, les performances passées ne garantissent pas les performances futures. C'est le personnage principal et sympathique, et tous les autres sont des parasites qui lui empoisonnent l'existence*
- LE RISQUE DE CREDIT *Votre contrepartie peut ne pas honorer ses engagements.*
- LE RISQUE DE LIQUIDITE *Vous ne pouvez pas vendre votre produit au moment où vous en avez besoin*
- LE RISQUE OPERATIONNEL *Pour une institution financière, c'est un défaut d'organisation ou de surveillance qui conduit a une perte: un trader qui prend des positions a l'insu de sa hierarchie*
- LE RISQUE SYSTEMIQUE *C'est l'effet domino: je ne peux pas te payer parce que quelqu'un d'autre ne m'a pas payé*

## Les personnages par ordre d'entrée en scène

- LE RISQUE DE MARCHE. *Les cours peuvent descendre aussi bien que monter, les performances passées ne garantissent pas les performances futures. C'est le personnage principal et sympathique, et tous les autres sont des parasites qui lui empoisonnent l'existence*
- LE RISQUE DE CREDIT *Votre contrepartie peut ne pas honorer ses engagements.*
- LE RISQUE DE LIQUIDITE *Vous ne pouvez pas vendre votre produit au moment où vous en avez besoin*
- LE RISQUE OPERATIONNEL *Pour une institution financière, c'est un défaut d'organisation ou de surveillance qui conduit a une perte: un trader qui prend des positions a l'insu de sa hierarchie*
- LE RISQUE SYSTEMIQUE *C'est l'effet domino: je ne peux pas te payer parce que quelqu'un d'autre ne m'a pas payé*
- L ALEA MORAL *Je ne sais pas ce que pensent les autres, ni ce qu'ils feront quand j'aurai le dos tourné*



## Les personnages par ordre d'entrée en scène

- LE RISQUE DE MARCHE. *Les cours peuvent descendre aussi bien que monter, les performances passées ne garantissent pas les performances futures. C'est le personnage principal et sympathique, et tous les autres sont des parasites qui lui empoisonnent l'existence*
- LE RISQUE DE CREDIT *Votre contrepartie peut ne pas honorer ses engagements.*
- LE RISQUE DE LIQUIDITE *Vous ne pouvez pas vendre votre produit au moment où vous en avez besoin*
- LE RISQUE OPERATIONNEL *Pour une institution financière, c'est un défaut d'organisation ou de surveillance qui conduit à une perte: un trader qui prend des positions à l'insu de sa hiérarchie*
- LE RISQUE SYSTEMIQUE *C'est l'effet domino: je ne peux pas te payer parce que quelqu'un d'autre ne m'a pas payé*
- L ALEA MORAL *Je ne sais pas ce que pensent les autres, ni ce qu'ils feront quand j'aurai le dos tourné*
- LA SELECTION ADVERSE *Je vais devoir traiter avec des gens qui ont plus d'information que moi*

# Acte 1: de 1973 a 2008.

Black et Scholes

Le RISQUE DE MARCHE vit heureux et prospère. Toute l'organisation des marchés financiers est faite pour le protéger des risques parasites, et cela marche !

- on dispose d'un paradigme (Black et Scholes) qui permet de construire des produits dérivés, á partir des produits existants, de nouveaux produits, taillés sur mesure pour chaque investisseur ou chaque spéculateur, et surtout de les couvrir. Cela donne du travail á une nuée de jeunes scientifiques formés aux statistiques, aux EDP et à l'analyse numérique

# Acte 1: de 1973 a 2008.

Black et Scholes

Le RISQUE DE MARCHE vit heureux et prospère. Toute l'organisation des marchés financiers est faite pour le protéger des risques parasites, et cela marche !

- on dispose d'un paradigme (Black et Scholes) qui permet de construire des produits dérivés, á partir des produits existants, de nouveaux produits, taillés sur mesure pour chaque investisseur ou chaque spéculateur, et surtout de les couvrir. Cela donne du travail á une nuée de jeunes scientifiques formés aux statistiques, aux EDP et à l'analyse numérique
- les marchés financiers se découvrent une utilité sociale: ce sont des marchés où l'on achète et où l'on vend du risque. Ils permettent donc a la société, en vertu des théorèmes classiques de l'économie du bien-être, d'atteindre un optimum de Pareto.

# Acte 1: de 1973 a 2008.

## Les dérivés de crédit

Cela marche même tellement bien que l'on fait appel au RISQUE DE CREDIT pour venir prêter main-forte au RISQUE DE MARCHE:

- L'idée initiale est d'assurer les acheteurs d'obligations contre les défaillances possibles des émetteurs. Comme ces produits sont très rémunérateurs, ils deviennent vite très populaires, en engendrant d'autres, et représentent en 2008 une part considérable du marché

# Acte 1: de 1973 a 2008.

## Les dérivés de crédit

Cela marche même tellement bien que l'on fait appel au RISQUE DE CREDIT pour venir prêter main-forte au RISQUE DE MARCHE:

- L'idée initiale est d'assurer les acheteurs d'obligations contre les défaillances possibles des émetteurs. Comme ces produits sont très rémunérateurs, ils deviennent vite très populaires, en engendrent d'autres, et représentent en 2008 une part considérable du marché
- Le malheur c'est que l'on n'a pas de données historiques pour caler les modèles et fixer les prix. Qu'à cela ne tienne, on découvre une formule mathématique (la *copule de Li*) qui tourne la difficulté, et qui devient le Black et Scholes de l'industrie. Plus que jamais, les scientifiques ont du travail

## Acte 2: la crise de 2008

En 2008, le RISQUE DE LIQUIDITE fait une entrée fracassante. Quelques-uns des plus grandes banques mondiales (Northern Rock, Lehman Brothers, Bears&Stern) et le plus grand assureur mondial (AGI) font faillite

- toutes les banques fonctionnent en empruntant à court terme et en prêtant à long terme, ce qui est un pari implicite sur le fait que les dépositaires ne viendront pas réclamer leur argent, et que s'il le font, on pourra se refinancer à court terme. Les banques sont tenues par la loi de garder en caisse, immédiatement disponible 8% (fonds propres) au moins ce qu'elles ont prêté à l'extérieur (levier de 12,5)

## Acte 2: la crise de 2008

Il ouvre la porte au RISQUE SYSTEMIQUE. Celui-ci fait tellement peur que le gouvernement americain decide de sauver Goldman-Sachs et les banques restantes, et les gouvernements europeens emboitent le pas. C'est la doctrine du "*too big to fail*"

L'ALEA MORAL sort alors d'un placard où il était caché durant tout le premier acte. Il s'avère que les banques, avaient des leviers de 40 ou plus, bien au-dela du maximum legal de 12,5. Viennent s'y ajouter les scandales Madoff et Kerviel, qui montrent que les autorités de régulation (internes et externes) font mal leur travail

## Acte 3:

Le personnage principal est dorénavant la `SELECTION ADVERSE`.

- les banques détiennent des actifs (créances hypothécaires, dérivés de crédit) qui, s'ils étaient vendus aujourd'hui, les mettraient probablement en faillite. Elles se gardent bien de les vendre, et même de révéler combien elles en ont.



## Acte 3:

Le personnage principal est dorénavant la `SELECTION ADVERSE`.

- les banques détiennent des actifs (créances hypothécaires, dérivés de crédit) qui, s'ils étaient vendus aujourd'hui, les mettraient probablement en faillite. Elles se gardent bien de les vendre, et même de révéler combien elles en ont.
- Mais comme elles savent que les autres banques sont dans la même situation, elles se gardent bien de leur prêter de l'argent. Personne ne prête à personne, sauf à la BCE. Celle-ci reprête aux banques, ce qui crée une sorte de boucle très favorable pour celles-ci: leur niveau de profit (et les bonus) sont revenus au niveau d'avant la crise

## Acte 3:

Le personnage principal est dorénavant la **SELECTION ADVERSE**.

- les banques détiennent des actifs (créances hypothécaires, dérivés de crédit) qui, s'ils étaient vendus aujourd'hui, les mettraient probablement en faillite. Elles se gardent bien de les vendre, et même de révéler combien elles en ont.
- Mais comme elles savent que les autres banques sont dans la même situation, elles se gardent bien de leur prêter de l'argent. Personne ne prête à personne, sauf à la BCE. Celle-ci reprête aux banques, ce qui crée une sorte de boucle très favorable pour celles-ci: leur niveau de profit (et les bonus) sont revenus au niveau d'avant la crise
- comme les comptes des banques ne sont pas accessibles, et que les investisseurs cherchent des valeurs refuges, l'inquiétude se reporte naturellement sur les comptes des états, qui sont transparents, et on voit reparaître le spectre du **RISQUE SYSTEMIQUE**

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche appliquée

- pour l'essentiel, "*business as usual*" : quelques acteurs ont disparu, ceux qui restent sont d'autant plus prospères. L'évaluation et la couverture de produits dérivés ont encore de beaux jours devant eux

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche appliquée

- pour l'essentiel, "*business as usual*" : quelques acteurs ont disparu, ceux qui restent sont d'autant plus prospères. L'évaluation et la couverture de produits dérivés ont encore de beaux jours devant eux
- une préoccupation nouvelle: les mesures de risque. Le régulateur (Bâle I, II et III) impose aux banques de calculer certains indicateurs (notamment la  $V@R$ , *value at risk*, pour le risque de marché, mais il y a aussi le risque opérationnel, etc.. ), et de ne pas dépasser certains niveaux.

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche appliquée

- pour l'essentiel, "*business as usual*" : quelques acteurs ont disparu, ceux qui restent sont d'autant plus prospères. L'évaluation et la couverture de produits dérivés ont encore de beaux jours devant eux
- une préoccupation nouvelle: les mesures de risque. Le régulateur (Bâle I, II et III) impose aux banques de calculer certains indicateurs (notamment la  $V@R$ , *value at risk*, pour le risque de marché, mais il y a aussi le risque opérationnel, etc.. ), et de ne pas dépasser certains niveaux.
- une problématique nouvelle pour la gestion de portefeuille

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche appliquée

- pour l'essentiel, "*business as usual*" : quelques acteurs ont disparu, ceux qui restent sont d'autant plus prospères. L'évaluation et la couverture de produits dérivés ont encore de beaux jours devant eux
- une préoccupation nouvelle: les mesures de risque. Le régulateur (Bâle I, II et III) impose aux banques de calculer certains indicateurs (notamment la  $V@R$ , *value at risk*, pour le risque de marché, mais il y a aussi le risque opérationnel, etc.. ), et de ne pas dépasser certains niveaux.
- une problématique nouvelle pour la gestion de portefeuille
  - ▶ optimisation sous contrainte de risque

# Quel role pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche appliquée

- pour l'essentiel, "*business as usual*" : quelques acteurs ont disparu, ceux qui restent sont d'autant plus prospères. L'évaluation et la couverture de produits dérivés ont encore de beaux jours devant eux
- une préoccupation nouvelle: les mesures de risque. Le régulateur (Bâle I, II et III) impose aux banques de calculer certains indicateurs (notamment la  $V@R$ , *value at risk*, pour le risque de marché, mais il y a aussi le risque opérationnel, etc.. ), et de ne pas dépasser certains niveaux.
- une problématique nouvelle pour la gestion de portefeuille
  - ▶ optimisation sous contrainte de risque
  - ▶ optimisation sous contrainte de liquidité

# Quel role pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche appliquée

- pour l'essentiel, "*business as usual*" : quelques acteurs ont disparu, ceux qui restent sont d'autant plus prospères. L'évaluation et la couverture de produits dérivés ont encore de beaux jours devant eux
- une préoccupation nouvelle: les mesures de risque. Le régulateur (Bâle I, II et III) impose aux banques de calculer certains indicateurs (notamment la  $V@R$ , *value at risk*, pour le risque de marché, mais il y a aussi le risque opérationnel, etc.. ), et de ne pas dépasser certains niveaux.
- une problématique nouvelle pour la gestion de portefeuille
  - ▶ optimisation sous contrainte de risque
  - ▶ optimisation sous contrainte de liquidité
  - ▶ optimisation simultanée sur plusieurs marchés : black pools, high-frequency trading



# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche théorique: du côté des mesures de risque

- il est bien connu que la  $V@R$  n'est pas sous-additive: on peut avoir une position qui a une  $V@R$  positive, et la répartir entre deux filiales de manière à avoir une  $V@R$  nulle

$$V@R_\lambda (X) = \inf \{x \mid P [X(\omega) \geq x] \leq \lambda\}$$

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche théorique: du côté des mesures de risque

- il est bien connu que la  $V@R$  n'est pas sous-additive: on peut avoir une position qui a une  $V@R$  positive, et la répartir entre deux filiales de manière à avoir une  $V@R$  nulle

$$V@R_\lambda(X) = \inf \{x \mid P[X(\omega) \geq x] \leq \lambda\}$$

- d'où une approche axiomatique des mesures de risque: on recherche des applications de  $L^\infty$  dans  $R$  qui vérifient certaines propriétés (invariance en loi, sous-additivité, etc..)

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche théorique: du côté des mesures de risque

- il est bien connu que la V@R n'est pas sous-additive: on peut avoir une position qui a une V@R positive, et la répartir entre deux filiales de manière à avoir une V@R nulle

$$V@R_\lambda(X) = \inf \{x \mid P[X(\omega) \geq x] \leq \lambda\}$$

- d'où une approche axiomatique des mesures de risque: on recherche des applications de  $L^\infty$  dans  $R$  qui vérifient certaines propriétés (invariance en loi, sous-additivité, etc..)
- et un problème ouvert: définir une mesure de risque dynamique et *cohérente*: si une position est jugée plus risquée qu'une autre aujourd'hui, elle le sera encore demain

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche théorique: du côté de l'asymétrie d'information

Quelques problèmes importants:

- comment évaluer des produits financiers sous asymétrie d'information ? Acheteur informé et vendeur informé

Quelques outils mathématiques nouveaux que ces problèmes ont suscité:

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche théorique: du côté de l'asymétrie d'information

Quelques problèmes importants:

- comment évaluer des produits financiers sous asymétrie d'information ? Acheteur informé et vendeur informé
- le problème de la responsabilité limitée : comment les actionnaires peuvent-ils aligner les intérêts des managers sur les leurs ?

Quelques outils mathématiques nouveaux que ces problèmes ont suscité:

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche théorique: du côté de l'asymétrie d'information

Quelques problèmes importants:

- comment évaluer des produits financiers sous asymétrie d'information ? Acheteur informé et vendeur informé
- le problème de la responsabilité limitée : comment les actionnaires peuvent-ils aligner les intérêts des managers sur les leurs ?
- le problème de la responsabilité limitée : quelle réglementation imposer aux banques pour limiter les risques qu'elles prennent ?

Quelques outils mathématiques nouveaux que ces problèmes ont suscité:

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche théorique: du côté de l'asymétrie d'information

Quelques problèmes importants:

- comment évaluer des produits financiers sous asymétrie d'information ? Acheteur informé et vendeur informé
- le problème de la responsabilité limitée : comment les actionnaires peuvent-ils aligner les intérêts des managers sur les leurs ?
- le problème de la responsabilité limitée : quelle réglementation imposer aux banques pour limiter les risques qu'elles prennent ?

Quelques outils mathématiques nouveaux que ces problèmes ont suscité:

- l'optimisation sous contrainte de convexité globale

# Quel rôle pour les mathématiques financières aujourd'hui ?

Dans la recherche théorique: du côté de l'asymétrie d'information

Quelques problèmes importants:

- comment évaluer des produits financiers sous asymétrie d'information ? Acheteur informé et vendeur informé
- le problème de la responsabilité limitée : comment les actionnaires peuvent-ils aligner les intérêts des managers sur les leurs ?
- le problème de la responsabilité limitée : quelle réglementation imposer aux banques pour limiter les risques qu'elles prennent ?

Quelques outils mathématiques nouveaux que ces problèmes ont suscité:

- l'optimisation sous contrainte de convexité globale
- en utilisant le théorème de représentation des martingales, Sannikov a montré comment se ramener d'un problème d'alea moral a un probleme de controle optimal