

# À quoi et à qui servent les mathématiques ?

Une conversation (à sens unique) avec Jean-Michel

Ivar Ekeland

CEREMADE, Université Paris-Dauphine

27 Juin 2018

- Galilée: les mathématiques sont le langage de la **nature** .
  - *"La philosophie est écrite dans ce livre immense qui est continuellement ouvert devant nos yeux (je veux dire l'univers), mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'emploie auparavant à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lequel il est écrit. Il est écrit en langue mathématique, et les caractères en sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques"* Il Saggiatore
- Du 16ème au 20ème siècle, on développe les mathématiques de la nature, autour de la mécanique
  - mécanique classique, mécanique quantique; mécanique du point, mécanique des milieux continus
  - physique et biologie
- Progrès concomitant des mathématiques:
  - optimisation, la question de l'**intentionnalité** ( Fermat, Maupertuis, Darwin)
  - *"si Dieu agit en vue d'une fin, c'est donc qu'il aspire à quelque chose qui lui manque"* (Spinoza)
  - le monde est variationnel

- Notre génération a eu le privilège d'assister (et de contribuer) à la naissance d'une ère nouvelle: les mathématiques de **l'esprit humain**:
  - retour de l'intentionnalité: "*The economic approach to human behaviour*" (Becker)
  - les mathématiques comme langage de l'esprit
  - modélisation de l'économie, puis de la politique: asymétrie d'information (Laffont)
- Progrès concomitants des mathématiques
  - comportement stratégique des individus (théorie des jeux, MFG)
  - fortune du calcul stochastique
- Nouvelle science, nouvelle industrie: la finance

# Reprise du thème, 1: le triomphe des mathématiques dans les sciences de la nature

- Wigner: *On the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* (CPAM, 1960)
- Extension du domaine de la nature: de la physique à la chimie, puis à la géologie, puis à la biologie, puis aux modèles climatiques intégrés. Les mathématiques comme **langage commun** d'une science globale qui prétend désormais s'étendre à l'homme.
- Extension de l'emprise de l'homme sur la nature et sur les sociétés grâce aux progrès de la technique: révolution industrielle puissance militaire, colonisation et mondialisation, ouverture des marchés. Quel est le rôle des mathématiques ?
- La mathématisation du réel et de la société par la **mesure**. Pas de science sans mesure, pas d'industrie sans mesure, pas d'économie ni de gestion sans mesure. De ce point de vue, Descartes est le premier des mathématiciens et le plus grand. Monge et la géométrie descriptive, remplacée aujourd'hui par les programmes 3D

# Reprise du thème, 2: le triomphe des mathématiques dans les sciences de l'esprit

## Mathématisation de l'économie (Cournot, Walras, Debreu, Samuelson, Becker)

### ● Dauphine en 1970

- recherche opérationnelle; programmation linéaire, multiplicateurs et prix; théorie des jeux: le programme de von Neumann
- formation MASS: pour la première fois, on associe l'enseignement des maths à une formation en sciences humaines

### ● Dauphine en 2018

- triomphe de la modélisation en économie; on a même encaissé un changement de paradigme: l'asymétrie d'information; **extension à d'autres domaines**: finance, assurances, marketing, organisation industrielle, psychologie (Tirole)
- développement de nouvelles techniques mathématiques: calcul différentiel stochastique, MFG
- le traitement de l'information prend une place de plus en plus prépondérante (au détriment des maths?)
- les programmes MASE ont été transférés au niveau national, puis mondial

# Une autre lecture: la question de l'intentionnalité

Les mathématiques ont pu passer de la nature à l'homme moyennant deux conditions:

- Le retour de l'intentionnalité. La théorie postule que si les êtres humains font quelque chose, c'est qu'ils ont une raison pour le faire. Cela pose deux questions:
  - *La rationalité.* Rationnel ou raisonnable ? Rationalité des moyens, ou rationalité des fins ? La question de la vie bonne. Qu'est-ce qui fait vivre les hommes (Tolstoi) ? Le PIB comme mesure du bien-être dans les études sur le réchauffement climatique. Pas de fondement rationnel à la justice. Le cercle de Vienne.
  - *La liberté.* Quel est le processus de décision ? Le raisonnement intervient-il à priori, comme guide, ou à posteriori, comme justification ? Pourquoi l'état et les entreprises consacrent-elles tant de ressources à l'éducation, la publicité, le marketing, la communication ?
    - *les hommes se croient libres parce qu'ils ignorent les causes qui les font agir (Spinoza)*

# Une autre lecture: la question de la valeur

- L'extension de la mesure (quantitative, peu/beaucoup) au domaine humain, jusque-là marqué par des jugements de valeur (qualitatifs, bien/mal). Cela nécessite la création d'une **unité de mesure** (l'argent, l'util) et **d'indicateurs de performance**, or
  - L'indicateur est nécessairement réducteur, et modifie le comportement (Supiot)
  - L'introduction de l'argent comme mesure de la valeur est propre à notre société; il modifie les comportements individuels en profondeur et détruit les sociétés fondées sur d'autres valeurs
  - L'école "Law and economics": efficient breach of contract
- Les modèles mathématiques existants (type Ramsey) ne sont pas neutres. Au contraire, ils portent deux valeurs, qui sont celles de l'économie classique depuis Adam Smith:
  - nous voulons être riches
  - nous ne voulons pas mourir

- Wittgenstein:

- *Notre civilisation est caractérisée par le mot de progrès. Le progrès est sa forme. Son activité consiste à édifier une structure toujours plus compliquée. Je ne suis pas autant intéressé par la construction d'édifices que par le fait d'obtenir une image claire des fondements pour des structures possibles. Mon but est donc autre que celui des scientifiques et le mouvement de ma pensée diffère du leur.*



# Y a-t-il eu progrès dans la connaissance de l'homme ?

Histoire, sociologie, psychologie. Droit, éthique, philosophie

- Mathématisation par la **mesure**. L'école des Annales en histoire: Braudel, Delumeau, Leroy-Ladurie. La longue durée, la fin de l'histoire événementielle.
- Mais on n'a pas vu apparaître de nouvelle **théorie**. On assiste au contraire à l'abandon des anciennes et à un renoncement de la pensée. La fin de l'histoire ? Réapparition des vieilles interprétations du monde (the end of evil, millénarisme).
- Sur le terrain, bilan mitigé. Accroissement de la population mondiale, diminution du nombre de pauvres. Mais accroissement des inégalités, réchauffement climatique, insécurité géopolitique. Crise dans l'UE.
- La **rationalité individuelle** peut être un guide parmi d'autres pour décrypter le fil des événements. Mais (a) ce n'est pas la tendance actuelle des historiens, (b) je ne vois pas de progrès en la matière depuis les analyses de Thucydide ou de Guicciardini, et (c) l'analyse de Spinoza n'a pas été réfutée par la psychologie moderne.

# Y a-t-il eu progrès dans les mathématiques ?

Nous sommes toujours dans le cadre défini par Descartes, et nous n'avons rien trouvé au 20ème siècle qui puisse étonner les mathématiciens du 19ème. L'optimisation naît avec Fermat, la théorie des probabilités avec Pascal, le calcul différentiel avec Leibniz, le chaos avec Poincaré. La thèse de Bachelier date du 19eme siècle ! Progrès il y a, mais pas de rupture comme il y en a eu en physique ou en biologie

Le phénomène marquant de ces cinquante dernières années est la domination du **numérique**: quantité de données, puissance du traitement. Les mathématiques apparaissent comme des auxiliaires, dont le rôle est de plus en plus réduit:

- Les grands modèles: écoulement des fluides (avions, bateaux, navettes spatiales), bombes atomiques, finances, météorologie, climat. Les mathématiques préparent (analyse numérique)
- La force brute contre le calcul: le jeu d'échecs. Les premières tentatives modélisaient les stratégies, les dernières ajustent les réseaux de neurones. Les mathématiques ne servent plus à grand'chose.

# Y a-t-il eu progrès dans la connaissance du monde ?

- Un savoir de plus en plus morcelé, inassimilable par l'être humain, mais mis à la disposition de tous.
- Si je mets sur mon téléphone portable une app qui m'annonce le temps en chaque endroit du globe dans la prochaine semaine, est-ce que j'ai appris quelque chose ?
- Le propre de la technique, c'est que tout le monde peut s'en servir, comme d'une Kalachnikov
- Le numérique est une technique nouvelle, que nous ne maîtrisons pas, mais qui va transformer la société, comme l'avait fait la technique industrielle
  - disparition de certains métiers, qualifiés (traders, analyses de laboratoire, policiers) ou non qualifiés (caissiers, pompistes); flicage généralisé (NSA, objets connectés, GAFA), fin de l'asymétrie d'information; transformation de notre relation au monde (médiation de l'image, immédiateté, réalité virtuelle)

# Comment penser la situation actuelle ?

## *Coexistence avec la technique:*

- Quand les robots recrutent, jugent et tuent sans intervention humaine
- Comment jouer aux échecs ou faire de la finance aujourd'hui ?
- Comment parler si nous savons que nous sommes écoutés ?

## *Coexistence avec la nature*

- Le réchauffement climatique et l'extinction des espèces
- La passivité est-elle raisonnable ?
  - • *And enterprises of great pith and moment / With this regard their currents turn awry / And lose the name of action (Hamlet)*

## *Coexistence avec les autres*

- Le retour des valeurs non marchandes
- Les formes du pouvoir

- N\*\*\* (13 ans) "*Maman, je crois que quand je serai grand je devrai aller vivre sur une autre planète*"

- N\*\*\* (13 ans) *"Maman, je crois que quand je serai grand je devrai aller vivre sur une autre planète "*
- Jeff Bezos (Amazon) *"We will have to leave this planet, and we are going to leave it, and it's going to make this planet better. We'll come and go, and people who want to stay will stay. By the way, this is not something we can choose to do. This is something we must do. We need to do a better job of communicating how important it is, because this mission is so big "* (May 29, 2018)

- N\*\*\* (13 ans) *"Maman, je crois que quand je serai grand je devrai aller vivre sur une autre planète "*
- Jeff Bezos (Amazon) *"We will have to leave this planet, and we are going to leave it, and it's going to make this planet better. We'll come and go, and people who want to stay will stay. By the way, this is not something we can choose to do. This is something we must do. We need to do a better job of communicating how important it is, because this mission is so big "* (May 29, 2018)
- Est-ce l'enfant qui est adulte ou le décideur qui est puéril ? Ou en est notre réflexion sur l'avenir ?

- À quoi servent les mathématiques ?
  - À montrer qu'il y a une vérité (Descartes, Spinoza), et une beauté, communes à tous les êtres humains
  - À concentrer la pensée (puissance du calcul, modélisation)
- À qui servent les mathématiques ?
  - À ceux qui imposent les modèles: nous volons au secours de la victoire
  - Les mathématiques ont porté le triomphe de l'économisme et justifié ses conclusions
- Pour une mathématique critique !



# Qu'est-ce qui restera ?

On considère dans  $R^{2n}$  l'opérateur  $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$  et une hypersurface bornée  $S = \{x \mid H(x) = 1\}$ , où  $H$  est régulière, convexe,  $H(x) \geq 0$  et  $H(0) = 0$ . L'équation  $\dot{x} = JH'(x)$  définit un flot tangent à  $S$ : c'est le **flot hamiltonien**.

Notons  $N(S)$  le nombre d'**orbites périodiques** distinctes. Dans le cas linéaire ( $S$  est une ellipse),  $N(S) = n$  ou  $\infty$ . Que ce passe-t-il pour un **oscillateur non linéaire**?

On dit que  $S$  est  $\alpha$ -pincée si :

$$\max_{x \in S} \|x\| \leq \alpha \min_{x \in S} \|x\|$$

- Rabinowitz (1978) :  $N(S) \geq 1$

Conjecture:  $N(S) = n$  ou  $\infty$

- Rabinowitz (1978) :  $N(S) \geq 1$
- Ekeland-Lasry (Annals, 1979): si  $S$  est  $\sqrt{2}$ -pincée, alors  $N(S) \geq n$ .

Conjecture:  $N(S) = n$  ou  $\infty$

- Rabinowitz (1978) :  $N(S) \geq 1$
- Ekeland-Lasry (Annals, 1979): si  $S$  est  $\sqrt{2}$ -pincée, alors  $N(S) \geq n$ .
- Girardi (1984) si  $S$  est symétrique et  $\sqrt{3}$  pincée, alors  $N(S) \geq n$

Conjecture:  $N(S) = n$  ou  $\infty$

- Rabinowitz (1978) :  $N(S) \geq 1$
- Ekeland-Lasry (Annals, 1979): si  $S$  est  $\sqrt{2}$ -pincée, alors  $N(S) \geq n$ .
- Girardi (1984) si  $S$  est symétrique et  $\sqrt{3}$  pincée, alors  $N(S) \geq n$
- Ekeland-Lassoued (1985):  $N(S) \geq 2$

Conjecture:  $N(S) = n$  ou  $\infty$

- Rabinowitz (1978) :  $N(S) \geq 1$
- Ekeland-Lasry (Annals, 1979): si  $S$  est  $\sqrt{2}$ -pincée, alors  $N(S) \geq n$ .
- Girardi (1984) si  $S$  est symétrique et  $\sqrt{3}$  pincée, alors  $N(S) \geq n$
- Ekeland-Lassoued (1985):  $N(S) \geq 2$
- Hofer-Wysocki-Zehnder (Annals, 1998) : si  $n = 2$ , alors  $N(S) = 2$  ou  $\infty$

Conjecture:  $N(S) = n$  ou  $\infty$

- Rabinowitz (1978) :  $N(S) \geq 1$
- Ekeland-Lasry (Annals, 1979): si  $S$  est  $\sqrt{2}$ -pincée, alors  $N(S) \geq n$ .
- Girardi (1984) si  $S$  est symétrique et  $\sqrt{3}$  pincée, alors  $N(S) \geq n$
- Ekeland-Lassoued (1985):  $N(S) \geq 2$
- Hofer-Wysocki-Zehnder (Annals, 1998) : si  $n = 2$ , alors  $N(S) = 2$  ou  $\infty$
- Long-Zhu (Annals, 2002):  $N(S) \geq [n/2] + 1$

Conjecture:  $N(S) = n$  ou  $\infty$

- Rabinowitz (1978) :  $N(S) \geq 1$
- Ekeland-Lasry (Annals, 1979): si  $S$  est  $\sqrt{2}$ -pincée, alors  $N(S) \geq n$ .
- Girardi (1984) si  $S$  est symétrique et  $\sqrt{3}$  pincée, alors  $N(S) \geq n$
- Ekeland-Lassoued (1985):  $N(S) \geq 2$
- Hofer-Wysocki-Zehnder (Annals, 1998) : si  $n = 2$ , alors  $N(S) = 2$  ou  $\infty$
- Long-Zhu (Annals, 2002):  $N(S) \geq [n/2] + 1$
- Wang-Hu-Long (2007): si  $n = 3$ , alors  $N(S) = 3$  ou  $\infty$

Conjecture:  $N(S) = n$  ou  $\infty$



Exegi monumentum aere perennius !  
Bon anniversaire Jean-Michel