Le principe variationnel d'Ekeland

Ivar Ekeland

Juillet 2018

écrit pour le cinquantième anniversaire de l'Université
à paraître dans l'ouvrage collectif publié pour l'occasion

Je suis très honoré que le CEREMADE m'ait demandé de parler du principe dont je porte le nom. Je vais essayer de décrire la genèse de la découverte, la manière dont elle a été accueillie, et ce qu'elle représente pour moi aujourd'hui.

Quand j'étais à l'ENS, j'avais partagé la chambre d'un externe belge, un dénommé Meeuws, qui un jour a préparé un exposé sur le théorème de Bishop-Phelps. Nous avons parlé, il m'a expliqué la démonstration, qui m'a paru extrêmement ingénieuse, car elle partait d'une idée très simple, un cône qu'il fallait placer au bon endroit. L'idée était simple, toute la démonstration en découlait naturellement, encore fallait-il l'avoir. Grâce à elle, Bishop et Phelps avaient ridiculisé un nombre considérable de collègues, qui avaient publié un nombre infini d'articles sur une catégorie spéciale d'espaces de Banach, appelés "subreflexive". L'article de B&P s'intitulait tout simplement *"A proof that all Banach spaces are subreflexive"*[1]!

Quelques annés plus tard, j'étais en thèse avec Pallu de la Barrière, j'étudiais l'analyse convexe, et Terry Rockafellar est venu faire un cours à l'INRIA. Je l'ai étudié soigneusement, il introduisait dans un coin la notion de ε-sous-gradient, et j'y ai retrouvé un joli cône. Quelques années plus tard encore, j'étais déjà professeur à Dauphine, la mode était aux problèmes de contrôle optimal sans convexité, Felix Browder est venu faire un séminaire à Paris, il a expliqué les théorèmes d'Edelstein sur les projections[2], et il a donné quelques résultats de son cru, où j'ai rencontré de nouveau un cône sympathique.

A ce moment j'ai eu un déclic. Rockafellar travaillait avec des fonctions convexes, B&P avec des ensembles convexes, Browder avec des ensembles non convexes. Ce qui n'avait pas été fait, c'est

---

[1] Bull. AMS 67 (1961), 97-98

[2] Soit E un espace de Banach et B un fermé borné, non nécessairement convexe. Appelons G l'ensemble des points *x* de E tels qu'il existe dans B un point et un seul qui minimise la distance à x. Alors G contient une intersection dénombrable d'ouverts denses. Le même résultat vaut en remplaçant le minimum par le maximum.

de faire le même travail sur des fonctions non convexes (semi-continues inférieurement et bornées inférieurement). J'ai su tout de suite que c'était une bonne idée. Echaudé par l'expérience (j'avais déjà eu une bonne idée et j'avais eu le malheur d'en parler trop tôt), je me dépêche de publier une note CRAS[3], j'écris l'article correspondant, et je l'envoie a J.L. Lions pour publication.

C'est à ce moment que je découvre une grande loi de la vie intellectuelle : les idées novatrices dérangent, et si on veut les imposer il faut se battre. Lions me répond qu'il a transmis mon article au Journal de Bellman, JMAA[4], qui n'était même pas peer-reviewed ! J'étais jeune, je devais beaucoup à Lions, c'était un enterrement de troisième classe, mais je n'ai pas osé protester. Deux personnes ont sauvé le principe variationnel : Frank Clarke et Felix Browder. Frank Clarke, qui était une star montante des mathématiques appliquées, me dit "C'est exactement ce dont nous avons besoin en contrôle optimal». Il utilisa le principe variationnel pour donner une démonstration simple et puissante du principe de Pontryagin, et il le popularisa auprés de la communauté du contrôle optimal déterministe et de l'optimisation non convexe. Felix Browder comprit immédiatement ce dont il s'agissait, et me demanda un article de fond pour le Bulletin de l'AMS[5], ce qui me donna l'occasion de faire un expose un peu exhaustif du principe variationnel et de ses premières conséquences. Il m'invitera plusieurs fois à Chicago, il me proposera des problèmes, il travaillera lui-même sur le sujet[6], et il fera tout ce qu'il pouvait pour me mettre en avant. Il vient de mourir, et je lui dois énormément.

À partir de ce moment, le principe variationnel d'Ekeland vit sa vie. Il est très populaire et fréquemment utilisé dans le milieu de l'optimisation et de l'analyse dite "non convexe", où l'on utilise des fonctions "à coins" et des dérivées généralisées, alors que le milieu de l'analyse classique rechigne à se servir de se nouvel outil. Pendant quelques années, je cherche à vaincre cette résistance en montrer son utilité pour résoudre des problèmes classiques. Je démontre (avec Lebourg) que si, sur un espace de Banach il existe une fonction différentiable, qui vaut 1 en 0 et qui est nulle en dehors de la boule unité, alors toute fonction convexe sur cet espace est différentiable sur une intersection dénombrable d'ouverts denses. C'était une vieille conjecture d'Asplund, mais la communauté banachique s'en désintéresse, et cite plutôt un article postérieur qui démontre la même chose pour les espaces qui possèdent la propriété de Radon-Nikodym. Je fais également des tentatives en direction des systèmes dynamiques et de la topologie

---

3 "*Sur les problèmes variationnels*", CRAS Paris 275 (1972), 1057-59; 276 (1973), 1347-48

4 Ekeland, "*On the variational principle*", J. Math. An. Appl. 47 (1974), 324-53

5 Ekeland, "*On the variational principle*", Bull. AMS 1.3 (1979), 443-474

6 Brézis and Browder, "*A general ordering principle in nonlinear functional analysis*", Advances in Math. 21 (1976), 355-64

différentielle, où je démontre un théorème de Hopf-Rinow en dimension infinie, sans plus de succès.

Du côté des méthodes variationnelles, cela n’allait pas mieux. Ce sont des méthodes de min-max, c'est-à-dire que l'on cherche à identifier des cols dans un paysage montagneux. On sait qu'un col descend dans une direction et monte dans une autre, mais c'est parce que nos cartes sont en dimension deux. Si on était en dimension plus élevée, et même en dimension infinie, on pourrait descendre dans deux, trois dimensions ou plus encore: c'est ce qu'on appelle l'index de Morse du point critique, oups, pardon, du col. La situation géométrique est simple en général, mais elle est polluée par des difficultés techniques, que le principe variationnel permettait de survoler. Par exemple, il permet de démontrer que pour toute fonction différentiable et bornée inférieurement sur un espace de Banach, il existe une suite qui non seulement est minimisante, mais où, en plus, la dérivée tend vers zéro. La fameuse condition (C) de Palais-Smale stipule que de telles suites convergent. On en déduit immédiatement que si une fonction bornée inférieurement vérifie la condition (C), elle atteint son minimum ! Palais et Smale le savaient, évidemment, mais ils avaient besoin d’un outil technique pesant, le lemme de déformation, alors que là cela se faisait avec rien dans les mains ni dans les poches. Cette idée a été développée dans d’autres situations[7], mais c’est à Nassif Ghoussoub[8] que revient l’honneur de l’avoir développée systématiquement, et d’en avoir tiré des résultats nouveaux, permettant de localiser exactement les cols et de calculer leur index. Moi-même et Helmut Hofer en avons fait grand usage dans nos travaux sur les solutions périodiques de systèmes hamiltoniens et les capacités symplectiques, mais la communauté variationnelle, dans sa majorité, reste engluée dans les anciennes méthodes, et continue à utiliser le lemme de déformation, alors qu’il est vraiment pénible et nécessite des hypothéses de différentiabilité supplémentaires.

À partir des années 80, mes centres d'intérêt changent, je travaille en topologie symplectique avec Hofer, en théorie de la demande avec Pierre-André Chiappori. Entretemps le principe variationnel fait son chemin, petit à petit. La communauté EDP commence à l’utiliser, Ghoussoub, notamment, qui s’en sert pour démontrer une conjecture de de Giorgi, plusieurs manuels d’analyse faisant autorité (notamment ceux de Michael Struwe, Jean Mawhin et Michel Willem, Philippe Ciarlet) le citent parmi les résultats classiques , et je commence à rencontrer de jeunes étudiants qui l'ont appris en classe, et qui sont tout étonnés que l'Ekeland du principe ne soit pas aussi âgé que le Pythagore du théorème.

---

[7] Voir pour cela le livre de Djairo de Figueiredo, « *Lecture on the Ekeland variational principle zith variations and detours* », Tata Institute of fundamental research, Springer-Verlag, 1989

[8] Ghoussoub : "*Duality and perturbation methods in critical point theory*", Cambridge University Press, 1993

Mais je reste persuadé qu'il n'a pas donné tout ce qu'il pouvait. Louis Nirenberg m'a dit une fois: « On aurait pu le trouver au 19ème siècle ». Effectivement, c'est une conséquence du théorème de Baire, et les mathématiciens de l'époque, dont Baire lui-même, auraient dû le découvrir ! Pourquoi ne l'ont-ils pas fait ? Sans doute reste-t-il une part de hasard dans les mathématiques: il ne suffit pas qu'on ait les outils pour démontrer quelque chose, encore fait-il qu'une personne, un jour, ait l'idée de le faire. Cela veut probablement dire qu'il reste beaucoup de choses à trouve en mathématiques, même dans des domaines qui ont été beaucoup travaillés et que l'on croit épuisés depuis longtemps. Et s'ils l'avaient fait, qu'est-ce qui se serait passé ? Quant on pense à l'immense développement qu'a connu l'analyse fonctionnelle au 20ème siècle, on ne peut que répondre: beaucoup de choses. Les conséquences de principe variationnel d'Ekeland sont encore loin d'avoir été toutes tirées, il y a un siècle de retard à rattraper. Depuis mon départ à la retraite de Vancouver et mon retour au CEREMADE, je m'emploie combler ce retard. Déjà j'ai obtenu un théorème de surjection locale plus puissant, sous des hypothèses plus faibles, que les théorèmes connus, et, en collaboration avec Eric Séré, nous sommes en passe d'obtenir des résultats similaires pour des opérateurs avec perte de différentiabilité, style KAM. J'ai encore d'autres idées en tête, et j'espère vivre assez longtemps pour les mener à bien.