

Partiel d'Analyse complexe

Des réponses explicites et justifiées sont attendues.
Le barème est de deux points par question.

1 $\mathbb{C}$ -dérivabilité

1. L'application $\mathbb{R}$ -linéaire $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est-elle $\mathbb{C}$ -linéaire ?
2. Déterminer les fonctions $\mathbb{C}$ -dérivables dont la partie réelle est xy .

Corrigé

1. On a $f(i) = 1 - i$ et $if(1) = i(1 + i) = -1 + i$. Comme ces deux nombres diffèrent, f n'est pas $\mathbb{C}$ -linéaire.

Autre calcul possible parmi de nombreux autres :

$$f(z) = (1 + i)\frac{z + \bar{z}}{2} + (1 - i)\frac{z - \bar{z}}{2i} = (\dots)z + i\bar{z}.$$

Comme le coefficient devant $\bar{z}$ est non nul, f n'est pas $\mathbb{C}$ -linéaire.

2. Soit $F = f + ig$ une fonction $\mathbb{C}$ -dérivable avec $f = xy$. Ses parties réelle et imaginaire doivent satisfaire les équations de Cauchy-Riemann :

$$\partial_x f = \partial_y g, \quad \partial_x g = -\partial_y f.$$

La première impose que $\partial_y g = y$, donc que g soit de la forme

$$g(x, y) = \frac{y^2}{2} + \varphi(x),$$

où φ est dérivable. La seconde impose que $\partial_x g = -x$, donc que $\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + c$, où $c \in \mathbb{R}$. Donc

$$F(x, y) = xy + i \left(\frac{y^2 - x^2}{2} + c \right).$$

Les telles fonctions sont satisfait les équations de Cauchy-Riemann, donc sont $\mathbb{C}$ -dérivables.

2 Connexité simple

Soient D un domaine simplement connexe et f une fonction holomorphe sur D qui ne possède pas de zéro dans D .

1. Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe sur D telle que $f = e^g$ (on dit que g est un logarithme de f) ; on pourra commencer par montrer que f'/f possède une primitive.

2. En déduire qu'il existe une fonction h holomorphe sur D telle que $f = h^2$ (on dit que g est une racine carrée de f).

Corrigé

1. Si g est un logarithme de f , $g' = f'/f$.

Or, par hypothèse, la fonction f'/f est holomorphe dans D . Comme D est simplement connexe, f'/f possède une primitive g . Alors

$$(fe^{-g})' = e^{-g}(f' - fg') = 0,$$

donc il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$f = ce^g.$$

Comme $f \neq 0$, $c \neq 0$. Donc il existe $c' \in \mathbb{C}$ tel que

$$f = e^{c'+g},$$

d'où l'affirmation en remplaçant g par $c' + g$.

2. Il suffit de prendre $h = e^{g/2}$.

3 Indice d'un lacet

Soient $\gamma : I = [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet de classe C^1 et $D = \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.

1. Montrer que D possède une unique composante connexe non bornée.

2. Calculer, pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{C(z,1)} (\zeta - z)^n d\zeta ;$$

on a noté $C(z,1)$ le cercle de centre z et de rayon 1.

Soit maintenant $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ fixé. Pour tout $t \in I$, on définit

$$\varphi(t) = \exp \left(\int_{\alpha}^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \right),$$

3. Montrer que

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \quad (t \in I)$$

et en déduire que la fonction $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}$ est constante sur I .

On définit maintenant l'indice de γ par rapport à z ,

$$\text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

4. Déduire de la question précédente que $\text{ind}_\gamma(z)$ est un nombre entier relatif.

5. Montrer que $\text{ind}_\gamma(z)$ est une fonction localement constante de $z \in D$, qui est nulle sur la composante connexe non bornée de D .

Supposons maintenant que le lacet $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ est seulement de classe C^0 . Soit toujours $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.

6. Montrer qu'il existe une suite de lacets $\gamma_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , qui converge uniformément vers γ .

7. Montrer que, si m et n sont assez grands, les indices de γ_m et de γ_n par rapport à z coïncident.

On définit l'indice $\text{ind}_\gamma(z)$ comme cette valeur commune. On admettra que cette valeur ne dépend pas de la suite d'approximation (γ_n) choisie.

8. En déduire que, si γ_0 et γ_1 sont deux lacets continus homotopes dans un domaine D et si $z \notin D$, $\text{ind}_{\gamma_0}(z) = \text{ind}_{\gamma_1}(z)$. Donner une interprétation géométrique de l'indice.

Corrigé

1. $\gamma(I)$ est compact, donc inclus dans un disque $D(0, R)$. le complément de $D(0, R)$ est connexe et contenu dans D . La composante connexe de D contenant $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$ est non bornée.

Par ailleurs, cette composante non bornée est unique puisque les autres composantes sont incluses dans $D(0, R)$ et sont donc bornées.

2.

$$\int_{C(z,r)} (\zeta - z)^n d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

3. La dérivée de φ vaut

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \right)' = \varphi(t) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z},$$

d'où l'égalité demandée. On en déduit que

$$\left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} \right)' = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0.$$

Donc la fonction $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}$ est constante sur I .

4. Les valeurs de cette dernière fonction en α et β coïncident :

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\gamma(\alpha) - z} = \frac{\varphi(\beta)}{\gamma(\beta) - z}.$$

Comme $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$,

$$\varphi(\beta) = \varphi(\alpha) = 1,$$

donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \in 2\pi i \mathbb{Z},$$

et donc

$$\text{ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \in \mathbb{Z}.$$

5. Le théorème de $\mathbb{C}$ -dérivation sous le signe d'intégration montre que $z \mapsto \text{ind}_{\gamma}(z)$ est holomorphe et donc continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$. Comme cette fonction est à valeurs entières, elle est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.

Quand $z \rightarrow \infty$, le théorème de convergence dominée montre que $\text{ind}_{\gamma}(z) \rightarrow 0$. Donc l'indice de γ est nul sur toute la composante connexe non bornée de D .

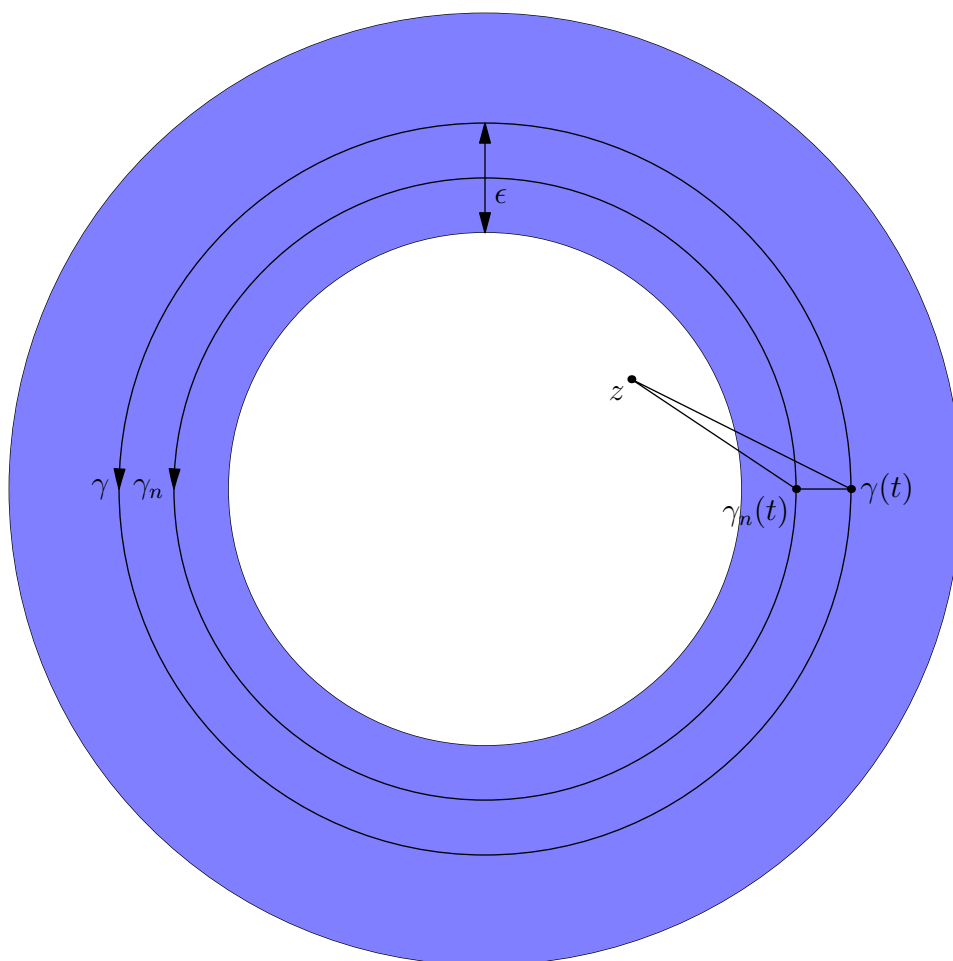
6. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de lacets polynomiaux trigonométriques γ_n , qui converge uniformément vers γ .

7. Soit $\epsilon > 0$ assez petit pour que la distance de z à γ soit $< \epsilon$. Si n est assez grand, $\|\gamma_n - \gamma\|_{C^0} < \epsilon$. Alors $\Gamma(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + s\gamma_n(t)$ est une homotopie entre γ et γ_n . Montrons que qu'elle ne passe pas par z . D'après l'inégalité triangulaire, pour tous s, t ,

$$|\Gamma(s, t) - z| \geq |\gamma(t) - z| - |\gamma(t) - \Gamma(s, t)| > 0 ;$$

on a en effet $|\gamma(t) - z| > \epsilon$ par définition de ϵ , tandis que

$$|\gamma(t) - \Gamma(s, t)| \leq s|\gamma_n(t) - \gamma(t)| \leq s\epsilon \leq \epsilon.$$



Si m est assez grand, on peut construire de même une homotopie entre γ_m et γ . Par transitivité, γ_n et γ_m sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. D'après le théorème de Cauchy, leurs indices coïncident.

(L'argument montre aussi que cet indice ne dépend pas de la suite d'approximation choisie, puisque tout ce qu'on a utilisé de γ_n et γ_m est que ces deux lacets sont C^0 -proches de γ .)

8. On approche les deux lacets C^0 par des lacets C^1 , dont les indices sont, d'après la question précédente, stationnaires. Comme les deux lacets initiaux sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, il en va de même des lacets des deux suites, à partir d'un certain rang. Donc les indices coïncident.

Comme le montre le calcul plus haut de l'indice d'un cercle, l'indice calcule donc le nombre de tours orientés que le lacet fait autour du point.