

Sur le problème des deux corps

Jacques Féjoz (mai 2007)

En mécanique classique, la loi de l'attraction universelle veut qu'un corps quelconque en attire un autre en proportion de sa masse et en raison inverse du carré de leur distance mutuelle. Selon Isaac NEWTON (1643-1727), si le corps a une symétrie sphérique, son action à distance est la même que si toute sa masse était concentrée en son centre de masse. Dans le système solaire, par exemple, cela permet de remplacer légitimement les corps célestes par des points matériels. Par ailleurs, la masse du Soleil étant largement supérieure à celle des planètes, en première approximation chaque planète subit l'attraction du seul Soleil qui, en retour, est peu perturbé par les planètes. Autrement dit, chaque planète se meut sensiblement comme le ferait un point matériel attiré par un seul autre point matériel très massif et presque fixe.

La détermination du mouvement général de deux points matériels qui s'attirent, classiquement appelée *problème des deux corps*, a été résolue elle aussi par NEWTON dans ses *Principes mathématiques de philosophie naturelle*. La cohérence de sa solution avec les trois lois établies empiriquement par l'astronome Johannes KEPLER (1571-1630) a confirmé magistralement la loi de l'attraction universelle.

Soient deux points matériels de masses $m_1, m_2 > 0$. Supposons l'évolution de leurs positions $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in \mathbb{R}^3$ régie par les équations

$$m_1 \vec{q}_1'' = f(r) \frac{\vec{q}_2 - \vec{q}_1}{r} \quad \text{et} \quad m_2 \vec{q}_2'' = f(r) \frac{\vec{q}_1 - \vec{q}_2}{r},$$

où les apostrophes désignent des dérivations, f est une fonction de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $r = \|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\|$. Nous nous concentrerons sur le cas de l'*attraction newtonienne* :

$$f(r) = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

où G est un réel > 0 , mais il est instructif de comprendre ce qui dépend de la forme particulière de l'attraction newtonienne et ce qui n'en dépend pas.

Le centre de masse

$$\vec{q}_0 = \frac{m_1 \vec{q}_1 + m_2 \vec{q}_2}{m_1 + m_2},$$

a une accélération nulle : $\vec{q}_0'' = 0$; cela se voit en dérivant \vec{q}_0 deux fois, et est la manifestation du principe d'inertie. Nous supposerons que le repère de référence est attaché au centre de masse : $\vec{q}_0 = 0$. Puisque la position de chacun des deux corps se déduit de la position relative $\vec{q} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$ des deux corps par une homothétie :

$$\vec{q}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{q} \quad \text{et} \quad \vec{q}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{q},$$

le problème se réduit à déterminer l'évolution de \vec{q} . L'équation satisfaite par \vec{q} s'obtient en dérivant deux fois :

$$\mu \vec{q}'' = -f(r) \frac{\vec{q}}{r}, \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Donc, le corps fictif de masse μ et de position \vec{q} se meut comme s'il subissait la seule force exercée par un autre corps situé constamment à l'origine. Fixons l'unité de masse pour que $\mu = 1$:

$$\vec{q}'' = -f(r)\frac{\vec{q}}{r}, \quad \text{avec } r = \|\vec{q}\|,$$

et, dans le cas de l'attraction newtonienne, l'unité de temps pour que $Gm_1m_2 = 1$:

$$f(r) = \frac{1}{r^2}.$$

Exercice Justifier qu'on puisse supposer $\vec{q}_0 = 0$ sans perte de généralité.

Réponse. Les vecteurs $\vec{Q}_1 = \vec{q}_1 - \vec{q}_0$ et $\vec{Q}_2 = \vec{q}_2 - \vec{q}_0$ ont un centre de masse à l'origine et, parce que $\vec{q}_0'' = 0$, ils satisfont les mêmes équations que \vec{q}_1 et \vec{q}_2 . L'évolution de \vec{Q}_1 et de \vec{Q}_2 étant déterminée, on retrouve ensuite \vec{q}_1 et \vec{q}_2 par la translation rectiligne uniforme inverse.

Exercice Pour le système Soleil-Jupiter, $m_1/m_2 \simeq 1000$. Montrer que le Soleil est presque fixe.

Réponse. $\|\vec{q}_1\|/\|\vec{q}_2\| = m_2/m_1 = 1/1000 \ll 1$.

La position \vec{q} satisfait une équation différentielle explicite, du second ordre, et dont le membre de droite est de classe C^1 (et même analytique dans le cas newtonien) en dehors des collisions $\vec{q} = 0$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour toute condition initiale ($\vec{q}(0) \neq 0, \vec{q}'(0)$), il existe une solution maximale $\vec{q}(t)$ unique.

Lemme 1. *La position $\vec{q}(t)$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par $\vec{q}(0)$ et $\vec{q}'(0)$.*

Proof. Soient L ce sous-espace vectoriel et $\vec{Q}(t)$ la courbe paramétrée obtenue à partir de $\vec{q}(t)$ par symétrie par rapport à L . Les courbes $\vec{q}(t)$ et $\vec{Q}(t)$ satisfont la même équation différentielle et les mêmes conditions initiales. Donc, $\vec{Q}(t)$ aussi est maximale et, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\vec{Q}(t) = \vec{q}(t)$ pour tout t . \square

On peut, par conséquent, supposer que $\vec{q} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (*a fortiori* si $\vec{q}(0)$ et $\vec{q}'(0)$ sont colinéaires). L'équation de \vec{q} est équivalente au système des deux équations scalaires du second ordre suivantes :

$$x'' = -f(r)\frac{x}{r} \quad \text{et} \quad y'' = -f(r)\frac{y}{r}, \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Les solutions de ces équations sont les projections sur $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ des solutions du système du premier ordre suivant dans $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, u, v)\}$:

$$x' = u, \quad y' = v, \quad u' = -f(r)\frac{x}{r}, \quad v' = -f(r)\frac{y}{r}.$$

Le *potentiel* $U(r)$ est une fonction, définie à une constante près, primitive de f ; par exemple le potentiel newtonien vaut $U(r) = -1/r$. L'*énergie*, notée H

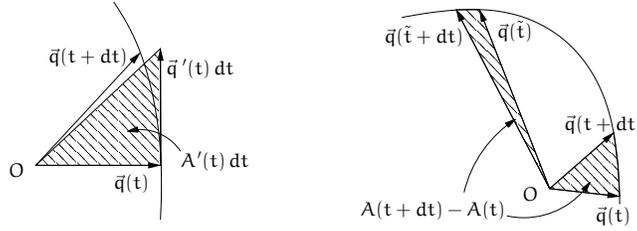


Figure 1: Aire balayée pendant dt

par Joseph-Louis LAGRANGE (1736-1813) en hommage semble-t-il à Christiaan HUYGENS (1629-1685) est la fonction

$$H(x, y, u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + U(r) ;$$

le *moment cinétique* est la fonction

$$C(x, y, u, v) = \det(\vec{q}, \vec{q}') = xv - yu.$$

Lemme 2. Les fonctions H et C sont constantes le long des solutions ; on dit que ce sont des intégrales premières (intégrale dans le sens ancien de quantités constantes au cours du temps ; première parce que ce sont des fonctions des positions et de leurs dérivées premières par rapport au temps).

Proof. Le long d'une solution,

$$H(x(t), y(t), u(t), v(t))' = uu' + vv' + f(r)r' = -\frac{f(r)}{r}(xu + yv) + \frac{f(r)}{r}(xu + yv) = 0$$

et

$$C(x(t), y(t), u(t), v(t))' = \det(\vec{q}', \vec{q}') + \det(\vec{q}, \vec{q}'') = -\frac{f(r)}{r}\det(\vec{q}, \vec{q}) = 0.$$

□

Exercice Existe-t-il des intégrales secondes dont l'invariance ne découle de l'invariance d'aucune intégrale première ?

Réponse. Non, puisque si une fonction $g(x, y, x', y', x'', y'')$ est constante le long des solutions, il en est de même de l'intégrale première $g(x, y, x', y', -f(r)x/r, -f(r)y/r)$.

La conservation du moment cinétique peut être interprétée géométriquement de la façon suivante.

Proposition 3 (deuxième loi de Kepler, ou loi des aires). L'aire balayée par le vecteur position $\vec{q}(t)$ varie linéairement avec le temps.

Proof. Notons $A(t)$ l'aire balayée par \vec{q} en fonction de t , initialisée en posant par exemple $A(0) = 0$. Quand dt tend vers 0,

$$\vec{q}(t + dt) = \vec{q}(t) + \vec{q}'(t) dt + o(dt),$$

donc, au premier ordre, l'aire balayée pendant l'intervalle de temps dt est l'aire du triangle ayant $\vec{q}(t)$ et $\vec{q}'(t) dt$ comme côtés adjacents (voir la figure 1) :

$$A(t + dt) - A(t) = \frac{1}{2} \det(\vec{q}(t), \vec{q}'(t)) dt + o(dt) = \frac{C}{2} dt + o(dt)$$

(si $C < 0$, l'aire balayée est comptée négativement). À la limite,

$$A'(t) = \frac{C}{2},$$

donc, comme C est une intégrale première, $A(t) - A(0) = Ct/2$. \square

Une autre conséquence de la conservation du moment cinétique est que, en coordonnées polaires (r, θ) , il est possible d'étudier le mouvement radial (coordonnée r), à moment cinétique fixé, indépendamment du mouvement angulaire (coordonnée θ).

Lemme 4. *L'énergie vaut*

$$H = \frac{r'^2}{2} + \frac{C^2}{2r^2} + U(r)$$

et r satisfait l'équation différentielle

$$r'' = \frac{C^2}{r^3} - f(r).$$

Proof. Un calcul direct montre que le moment cinétique et l'énergie valent

$$C = r^2 \theta' \quad \text{et} \quad H = \frac{r'^2}{2} + \frac{r^2 \theta'^2}{2} + U(r),$$

d'où l'expression de H en éliminant θ' .

Par ailleurs, $r^2 = x^2 + y^2$, donc, le long d'une solution,

$$rr' = xx' + yy' ;$$

donc, en dérivant une fois de plus,

$$r'^2 + rr'' = x'^2 + y'^2 + xx'' + yy'' = x'^2 + y'^2 - rf(r),$$

soit

$$\begin{aligned} r'' &= \frac{1}{r} (-r'^2 + x'^2 + y'^2) - f(r) = \frac{-(xx' + yy')^2 + (x'^2 + y'^2)(x^2 + y^2)}{r^3} - f(r) \\ &= \frac{(xy' - yx')^2}{r^3} - f(r) = \frac{C^2}{r^3} - f(r). \end{aligned}$$

\square

Exercice Dans le cas d'un mouvement non circulaire, démontrer l'équation différentielle du lemme en dérivant l'expression de l'énergie par rapport au temps.

Réponse. $0 = \left(r'' - \frac{C^2}{r^3} + f(r) \right) r'$. Si la vitesse radiale r' n'est pas identiquement nulle sur un ouvert, on peut diviser par r' là où $r' \neq 0$, et conclure par continuité (si $r' \equiv 0$, le fait que $r = C^2$ découle de ce qui suit).

Une condition initiale ($\vec{q}(0) \neq 0, \vec{q}'(0)$) étant donnée, soit $]t_-, t_+[$ l'intervalle de temps contenant 0, avec $t_-, t_+ \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, sur lequel la solution maximale est définie.

Définition 5. Le mouvement final dans le futur (*comportement asymptotique au temps t_+^-*) est

1. borné, ou de type B^+ , si $0 < \liminf r(t) \leq \limsup r(t) < \infty$;
2. de collision, ou de type C^+ , si $\lim r(t) = 0$;
3. d'éjection, ou de type E^+ , si $\lim r(t) = \infty$.

La terminologie est analogue dans le passé (B^-, C^-, E^-).

Proposition 6. Supposons que l'attraction est newtonienne ($U(r) = 1/r$).

(1) Les mouvements finaux sont ainsi classifiés :

$C \neq 0$	$C = 0$
$H < 0 \mid B^- B^+$	$H < 0 \mid C^- C^+$
$H \geq 0 \mid E^- E^+$	$H \geq 0 \mid E^- C^+ \text{ ou } C^- E^+$

Une solution maximale ne peut cesser d'exister en un temps fini ($|t_\pm| < \infty$) qu'en cas de collision ;

(2) au voisinage d'une collision, indépendamment de l'énergie :

$$r \sim \left(\frac{3}{\sqrt{2}} |t_\pm - t| \right)^{2/3} \quad \text{et} \quad r' \sim \left(\frac{3}{4} |t_\pm - t| \right)^{-1/3} ;$$

(3) pour une éjection,

$$\lim r' = \sqrt{2H}.$$

La propriété selon laquelle une solution maximale sans collision est définie pour tout temps reste vraie avec trois corps. Mais il existe des solutions sans collision dans le problème des cinq corps avec éjection en temps fini (l'un des corps a un mouvement final nouveau qualifié d'*oscillatoire*, sa coordonnée r ayant une limite inférieure nulle et une limite supérieure infinie). On conjecture que de telles solutions existent aussi avec quatre corps dans le plan.

Démonstration de la proposition. La projection d'une orbite sur le plan $\{(r, r')\}$ est incluse dans une courbe de niveau de H . Quelle est la topologie de ces

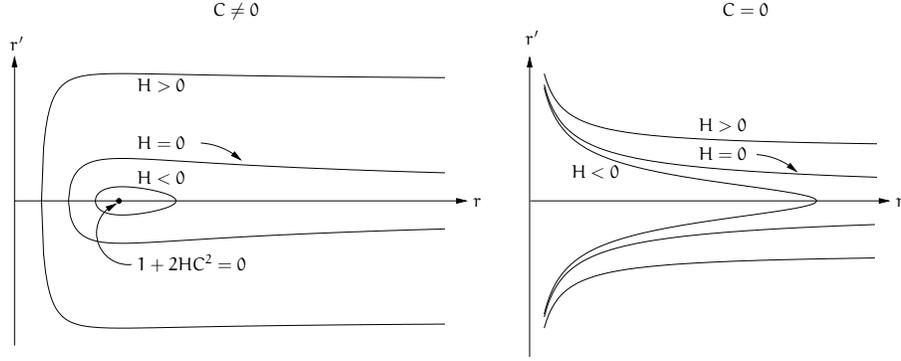


Figure 2: Courbes d'énergie constante à moment cinétique fixé

courbes de niveau symétriques par rapport à l'axe des r ? Supposons pour commencer $C \neq 0$. La fonction H atteint sa valeur minimum $H_0 = -1/(2C^2)$ au point $(r, r') = (C^2, 0)$; ce niveau singulier, constitué d'un seul point, correspond à une orbite circulaire. Si $H_0 < H < 0$, la courbe de niveau de H est une courbe fermée encerclant le minimum, qui est la réunion du graphe de deux fonctions de r définies sur un même intervalle compact de $]0, +\infty[$. Si $H \geq 0$, l'équation détermine une courbe non bornée, qui est la réunion du graphe de deux fonctions de r définies sur un intervalle de la forme $[r_0(H, C), +\infty[$. Quand le moment cinétique est nul, le minimum de H est reporté en $r = 0$, et les courbes de niveau de H sont donc toutes non compactes dans $\{(r, r'), r > 0\}$. Ces considérations sont résumées dans la figure 2. De plus, le minimum de H est l'unique point d'équilibre dans le plan $\{(r, r'), r > 0\}$, à cause de l'équation différentielle de r . Donc, les composantes connexes des courbes de niveaux de H sont exactement les orbites dans le plan $\{(r, r')\}$ des solutions maximales de l'équation différentielle de r . La classification des mouvements finaux en découle.

Il reste à montrer que t_{\pm} est fini *si et seulement* s'il se produit une collision, et à déterminer les estimations données sur r et r' au voisinage d'une collision ou d'une éjection. Rappelons que, pour une équation différentielle quelconque, une solution maximale ne peut cesser d'exister après un temps fini qu'à la condition qu'elle sorte en ce temps fini de tout compact du domaine de définition du champ de vecteurs. Or l'ouvert de définition des équations du premier ordre est $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$. Donc, il suffit d'étudier les trois cas suivants quand $t \rightarrow t_+^-$ (le cas du passé étant analogue) :

$$\liminf r(t) = 0, \quad \limsup r'(t) = +\infty \quad \text{ou} \quad \limsup r(t) = +\infty.$$

D'après ce qui précède, ces limites inférieures ou supérieures sont des limites. Donc, les deux premiers cas, qui coïncident d'après l'expression de H , caractérisent les collisions ; le dernier cas caractérise les éjections.

— *Cas des collisions.* On sait que $C = 0$. Il existe un instant $t_0 \in [0, t_+[$ tel que $r' < 0$ sur l'intervalle $[t_0, t_+[$. En résolvant l'équation donnant H , par

rapport à la variable r' sur cet intervalle, on obtient l'équation différentielle explicite

$$r' = -\sqrt{2\left(H + \frac{1}{r}\right)},$$

dont la solution est

$$t - t_0 = \int_{r(t)}^{r(t_0)} \frac{dr}{\sqrt{2(H + 1/r)}} \quad (t_0 \leq t < t_+).$$

À la limite quand $t \rightarrow t_+^-$ le membre de droite reste fini ; pour qu'il en soit de même du membre de gauche, il faut $t_+ < \infty$. Alors,

$$t_+ - t_0 = \int_0^{r(t_0)} \frac{dr}{\sqrt{2(H + 1/r)}}.$$

Asymptotiquement, quand $t_0 \rightarrow t_+^-$,

$$t_+ - t_0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{r(t_0)} \sqrt{r} \, dr = \frac{\sqrt{2}}{3} r(t_0)^{3/2},$$

d'où l'équivalent de r en posant $t = t_0$, puis celui de r' en utilisant la conservation de l'énergie.

— *Cas des éjections.* Il existe un réel $t_0 \in [0, t_+[$ tel que, cette fois, $r' > 0$ sur l'intervalle $[t_0, t_+[$. Comme $\lim r = +\infty$, l'expression de H montre que $r' \rightarrow \sqrt{2H}$. Donc r' est bornée, disons par un réel $v > 0$, et l'estimation

$$0 < r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t r'(s) \, ds \leq r(t_0) + v(t - t_0)$$

montre que $t_+ = +\infty$. □

Exercice Peut-on déduire de la proposition que les solutions bornées sont périodiques ?

Réponse. Non. Pour des solutions bornées, d'après ce qui précède, la coordonnée r est une fonction périodique du temps. Mais on ne sait pas *a priori* si le couple $(r, \theta \pmod{2\pi})$ est périodique, c'est-à-dire si, pendant une période, la variable θ augmente d'un multiple rationnel de 2π .

Exercice Pour le potentiel $U(r) = -1/r^2$, les solutions de collision ont-elles toutes un moment cinétique nul ?

Réponse. Non, parce que le terme de potentiel et le terme d'énergie cinétique angulaire sont chacun en $1/r^2$. Il existe des mouvements en spirale.

Exercice Classifier les mouvements finaux du potentiel élastique $U(r) = r^2$.

Réponse. Le champ de vecteurs étant polynomial, il n'a pas de singularité aux collisions $r = 0$. Toutes les solutions maximales sont définies pour tout temps et sont de type $B^- B^+$ (les solutions de moment cinétique nul connaissent une

infinité de collisions et, dans ce cas, il est naturel d'autoriser r à varier dans \mathbb{R}).

Les raisonnements conduits jusqu'à présent sont valables pour tout champ de force central. *Dorénavant nous supposons que la force est newtonienne : $f(r) = 1/r^2$.*

Proposition 7 (première loi de Kepler). *Chaque orbite est une composante connexe de conique, et l'origine en est un foyer.*

La démonstration élégante qui suit est due à LAGRANGE. Elle n'utilise pas la conservation de l'énergie, et la trouver ne requiert pas de connaître le résultat *a priori*.

Proof. Fixons des conditions initiales

$$(x(0), y(0), x'(0), y'(0)) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times \mathbb{R}^2.$$

La clef de l'argument est que les solutions x^o , y^o et r^o correspondantes satisfont aussi les équations respectives suivantes, qui, chacune, sont linéaires et dépendent du temps :

$$z'' = -\frac{z}{r^o(t)^3} \quad \text{pour } x^o \text{ et } y^o, \quad (z)$$

et

$$r'' = -\frac{r}{r^o(t)^3} + \frac{C^2}{r^o(t)^3} \quad \text{pour } r^o; \quad (r)$$

le calcul en est tautologique. Les deux fonctions x^o et y^o satisfont donc la même équation différentielle linéaire. Si $C \neq 0$, les fonctions x^o et y^o sont indépendantes sur \mathbb{R} et forment donc une base du plan vectoriel des solutions de cette équation. Sinon, elles sont proportionnelles et le mouvement est rectiligne. De plus, l'équation (z) est la partie homogène de l'équation (r) satisfaite par r^o , dont l'espace des solutions est donc un plan affine dirigé par le plan vectoriel des solutions de l'équation en z . La fonction r^o est une solution particulière de (r), mais il est utile pour conclure de remarquer que la fonction constante $r^1(t) := C^2$ est aussi une solution particulière. Si $C \neq 0$, la solution générale de (r), donc en particulier $r^o(t)$, s'exprime comme la somme de la fonction constante r^1 et d'une combinaison linéaire de x^o et de y^o ; si $C = 0$, cela reste vrai de r^o . Dans les deux cas, il existe deux réels α et β tels que

$$r^o(t) = C^2 + \alpha x^o(t) + \beta y^o(t)$$

sur tout l'intervalle de temps sur lequel ces fonctions sont définies.

Dans l'espace $\{(x, y, r)\}$, la courbe paramétrée $(x^o(t), y^o(t), r^o(t))$ est tracée sur le plan d'équation $r = C^2 + \alpha x + \beta y$. Or elle l'est aussi sur le cône d'équation $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'orbite est donc incluse dans une conique, et sa projection sur le plan $\{(x, y)\}$ aussi (figure 3). L'équation de la projection,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C^2 + \alpha x + \beta y,$$

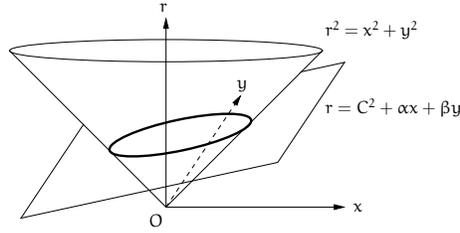


Figure 3: Conique dans l'espace $\{(x, y, r)\}$

obtenue en éliminant r , indique plus. En effet, le membre de gauche est la distance à l'origine. D'autre part, le membre de droite, divisé par $\epsilon := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, est la distance à la droite D d'équation

$$C^2 + \alpha x + \beta y = 0.$$

Donc, l'équation de l'orbite est $d(M, O) = \epsilon d(M, D)$, et l'orbite est bien contenue dans une conique dont un foyer est à l'origine (cela justifie l'appellation de *vecteur excentricité* pour l'intégrale première vectorielle $\vec{e} = (\alpha, \beta)$). La loi des aires impose qu'une solution maximale coïncide avec la composante connexe de la conique dans laquelle elle est incluse. \square

Corollaire 8. • Si $H = -\frac{1}{2C^2}$, le mouvement est circulaire uniforme ;

- si $-\frac{1}{2C^2} < H < 0$, le mouvement est elliptique (en particulier, périodique !);
- si $H = 0$, le mouvement est parabolique ;
- si $H > 0$, le mouvement est hyperbolique.

Exercice Que peut-on déduire directement à partir des deux premières lois de Kepler concernant la classification des mouvements finaux ?

Réponse. D'après la première loi de Kepler, une solution est une solution de collision *si et seulement si* elle est rectiligne, c'est-à-dire de moment cinétique nul. D'après la deuxième loi de Kepler, une solution de moment cinétique non nul ne peut cesser d'exister en un temps fini. Enfin, par continuité avec les solutions voisines de moment cinétique non nul, on voit qu'une collision est atteinte en temps fini et qu'une éjection de moment cinétique nul ne se produit qu'en un temps infini.

Exercice Pourquoi cette démonstration de la première loi de Kepler ne fonctionne pas pour une force f non newtonienne ?

Réponse. Dans l'équation $r'' = \frac{C^2 - r^3 f(r)}{r^3}$, le second terme du numérateur, $r^3 f(r)$, n'est linéaire par rapport à r que si $f(r) = k/r^2$, c'est-à-dire dans le cas newtonien (pour une force non newtonienne, on peut montrer que la conclusion elle-même de la proposition est fausse).

Exercice Montrer qu'avec la force élastique ($f(r) = r$) les orbites sont toutes des ellipses centrées à l'origine ; on pourra raisonner directement en coordonnées cartésiennes.

Réponse. Les équations sont $x'' = -x$ et $y'' = -y$. Une solution est de la forme $x = X \cos(t - \alpha)$, $y = Y \cos(t - \beta)$. En développant les cosinus, on voit qu'il existe un polynôme P du second degré tel que $P(x, y) \equiv 0$. Donc l'orbite est une conique. Comme elle est bornée, c'est une ellipse (éventuellement dégénérée si $C = 0$).

Remarquons que, en particulier, la solution est périodique. Un théorème dû à Joseph BERTRAND (1822-1900) affirme que les forces attractives newtonienne et élastique sont les seules forces centrales pour lesquelles toutes les solutions bornées sont périodiques.

Dorénavant, nous supposons de plus que l'énergie est strictement négative, ou, autrement dit, que le mouvement est elliptique, comme pour les planètes du système solaire.

Lemme 9. *Si a et ϵ sont le demi grand axe et l'excentricité de l'ellipse,*

$$H = -\frac{1}{2a} \quad \text{et} \quad C^2 = a(1 - \epsilon^2).$$

Proof. Les valeurs minimale et maximale de r le long d'une ellipse sont $a(1 - \epsilon)$ et $a(1 + \epsilon)$. Ces valeurs sont atteintes lorsque $r' = 0$, soit, d'après l'expression de H , lorsque

$$r^2 + \frac{r}{H} - \frac{C^2}{2H} = 0.$$

Donc

$$2a = -\frac{1}{H} \quad \text{et} \quad a^2(1 - \epsilon^2) = -\frac{C^2}{2H},$$

d'où découlent les deux expressions annoncées. □

Rappelons que l'aire d'une ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$ vaut $A = \pi ab$, puisque cette ellipse s'obtient par une affinité de rapport b/a à partir du disque de rayon a .

Proposition 10 (troisième loi de Kepler). *Le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand axe :*

$$T^2 = 4\pi^2 a^3.$$

Proof. D'après la deuxième loi de Kepler et l'égalité $C^2 = a(1 - \epsilon^2)$, la vitesse de balayage d'aire est constante et vaut

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}}{T} = \frac{|C|}{2} = \frac{\sqrt{a} \sqrt{1 - \epsilon^2}}{2}.$$

Il est remarquable que l'on puisse simplifier par $\sqrt{1 - \epsilon^2}$, de sorte que la période ne dépend pas de l'excentricité mais seulement du demi grand axe ; l'expression annoncée en découle. □

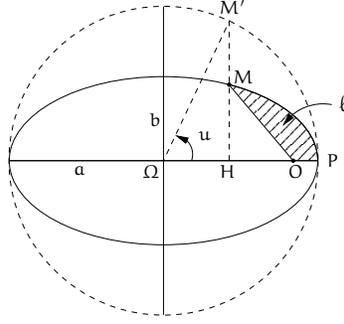


Figure 4: Éléments elliptiques

Exercice Pour une force centrale $f(r)$ quelconque, exprimer r'^2 et θ' en fonction de H , C , r et θ . En déduire une expression intégrale du temps Δt de parcours entre péricentre (minimum de r) et apocentre (maximum de r), ainsi qu'une équation différentielle définissant l'orbite en coordonnées polaires. Vérifier que le cas newtonien redonne les résultats déjà trouvés.

Réponse. $r'^2 = 2(H - \frac{C^2}{2r^2} - U(r))$ et $\theta' = C^2/r^2$.

De plus, $\Delta t = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{|r'|}$ et $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r'}{\theta'}$. Le changement de variable $h = 1/r$ permet de terminer les calculs dans le cas newtonien.

L'*anomalie moyenne* ℓ de \vec{q} est l'angle mesuré à partir du péricentre P de l'ellipse, proportionnel à l'aire balayée :

$$\ell := \frac{2\pi}{T} t \pmod{2\pi}$$

si le corps \vec{q} se trouve au péricentre à l'instant $t = 0$. Notons M le point extrémité du vecteur \vec{q} et M' l'image de M par l'affinité de rapport $1/\sqrt{1-\epsilon^2}$ dans la direction du petit axe de l'ellipse (voir la figure 4). L'*anomalie excentrique* u de \vec{q} est l'angle polaire du point M' par rapport au centre Ω de l'ellipse.

Proposition 11 (équation de Kepler).

$$\ell = u - \epsilon \sin u. \tag{k}$$

Proof. L'aire A grisée sur la figure 4 vaut $\frac{\pi ab}{2\pi} \ell$. Pour l'évaluer maintenant en fonction de u , on peut remarquer que c'est l'aire $A_{\Omega PM}$ de la portion d'ellipse ΩPM , à laquelle on soustrait l'aire $A_{\Omega OM}$ du triangle ΩOM . Or

$$A_{\Omega PM} = \frac{b}{a} \pi a^2 \frac{u}{2\pi} = \frac{abu}{2}$$

et

$$A_{\Omega OM} = \frac{b}{a} A_{\Omega OM'} = \frac{b}{a} \frac{1}{2} a^2 \epsilon \sin u = \frac{1}{2} ab \epsilon \sin u.$$

Donc

$$A = \frac{ab}{2}\ell = \frac{abu}{2} - \frac{1}{2}ab\epsilon \sin u,$$

d'où l'équation annoncée. □

On peut montrer que l'inverse de l'application

$$K_\epsilon : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad u \mapsto \ell = u - \epsilon \sin u$$

n'est pas une fonction élémentaire. L'inversion de l'équation de Kepler a une importance pratique considérable parce qu'elle permet de trouver la position du Soleil par rapport à la Terre en fonction du temps.

Exercice Proposer un algorithme pour calculer numériquement u en fonction d'une valeur de ℓ donnée, en supposant ϵ assez petite (notamment, l'excentricité de la Terre vaut 0,017).

Réponse. On peut supposer $-\pi \leq \ell \leq \pi$. De plus, on a $\ell = u - \epsilon \sin u$ si et seulement si $u = \ell + \epsilon \sin u$. On cherche donc un point fixe de l'application $f : u \mapsto \ell + \epsilon \sin u$. D'après le théorème des accroissements finis, cette dernière est une contraction dont le rapport de Lipschitz est majoré par $\epsilon : |f(u) - f(v)| \leq \epsilon|u - v|$. D'après le théorème de point fixe de Picard, u est donc la limite de la suite $(f^n(u_0))_{n \in \mathbb{N}}$ des itérées par f d'une condition initiale u_0 quelconque, et cette suite converge géométriquement.