Vladimir Arnold, les mathématiques et Paris-Dauphine

Jacques Féjoz

Le 30 juin 2018

Le mathématicien Vladimir Igorevitch Arnold (né à Odessa en 1937, décédé à Paris en 2010) a marqué les esprits. Sa vision géométrique lui permettait de percevoir des relations entre des problèmes qu'on pensait déconnectés. Et ent toute chose il montrait la même vivacité, mentale ou physique : qu'il débatte d'histoire des sciences ou d'enseignement des mathématiques, qu'il skie par grand froid, ou qu'il nage sous le Golden Gate Bridge au milieu des courants marins.

Son travail en Systèmes dynamiques [1] est emblématique. Poursuivant, au début des années 1960 à Moscou, les travaux de son directeur de thèse A. Kolmogorov, il a établi la stabilité d'un modèle simplifié de notre Système solaire connu sous le nom de Problème des trois corps planétaire, montrant qu'une majorité de conditions initiales de planètes dont les masses seraient suffisamment petites conduisent à des mouvements réguliers, quasi-périodiques dit-on. Au XIXe siècle, H. Poincaré avait envisagé sans y croire la possibilité de tels mouvements, et K. Weierstrass n'était pas parvenu à en démontrer l'existence. De façon audacieuse, Arnold a ensuite conjecturé un analogue global [2] de ces résultats en petite dimension, qui a considérablement influencé l'école française de Systèmes dynamiques ultérieurement conduite par M. Herman et J.-C. Yoccoz.

À l'article d'Arnold de plus de 100 pages sur la stabilité du problème des trois corps, que peu de mathématiciens lurent, a succédé en 1964 un article de 4 pages, qui fut énormément lu et commenté pendant 50 ans, et continue de l'être. Arnold y décrit un exemple génial d'instabilité dynamique. Il l'a imaginé en cherchant un mécanisme d'instabilité universel, tout en exhibant une situation qui évite les difficultés techniques redoutables (et toujours non-surmontées) pour mettre en évidence ce mécanisme dans les situations habituelles. Il en a formé la *conjecture de la diffusion d'Arnold*, qui affirme, dans le cas du problème des trois corps, que, si les planètes s'écartent arbitrairement peu des mouvements réguliers, les phénomènes d'instabilité sont la règle, de sorte que l'évolution à long terme du Système solaire ressemblerait moins à celle d'une belle horloge qu'à une partie de tennis dans une forêt. La conclusion du théorème de stabilité laisse en effet amplement la place à des mouvements beaucoup moins réguliers : collisions entre planètes ou

1. Les Systèmes dynamiques sont la généralisation moderne, créée par H. Poincaré, des équations différentielles.

2. *Global* signifie ici : pour des systèmes dynamiques qui ne sont pas de petites modifications de systèmes dynamiques simples et bien compris.

éjections à l'extérieur du Système solaire, pour ne citer que les possibilités les plus spectaculaires. Après que mathématiciens et astronomes ont tenté, pendant des siècles, de démontrer la stabilité du Système solaire (que Newton attribuait toutefois à des interventions divines), à la fin du XIXe siècle Poincaré avait réuni un faisceau d'arguments qui battaient en brèche le dogme de la stabilité, auquel la conjecture d'Arnold a terminé de porter un coup fatal. L'instabilité généralisée, sur des intervalles de temps de l'ordre de quelques centaines de millions d'années (donc sur des temps largement inférieurs à la durée de vie physique du Soleil) a été mise en lumière par les simulations numériques de l'évolution du (vrai) Système solaire, par l'astronome Jacques Laskar, à l'Observatoire de Paris à partir des années 1990.

Arnold a aussi été l'un des premiers à comprendre le langage unificateur, appelé la *géométrie symplectique*,[3] de nombreux domaines de la physique mathématique, tels que la mécanique, le calcul des variations, l'optique, la thermodynamique, l'analyse microlocale des équations aux dérivées partielles, ou la quantification. Il a par exemple montré le caractère invariant de l'indice de Maslov, un nombre dont dépendent les solutions de l'équation des ondes dans la limite des hautes fréquences, et qui explique le déphasage observé des signaux lumineux au passage par un point focal. Son livre *Méthodes mathématiques de la mécanique classique* a renouvelé l'intérêt des mathématiciens pour ces sujets.

Ce langage de la géométrie symplectique a rapidement soulevé de profondes questions globales. Ici encore, Arnold a été un pionnier. Partant d'un théorème de Poincaré-Birkhoff sur l'existence de points fixes des homéomorphismes de l'anneau, en 1965 il a conjecturé une généralisation audacieuse, qui marqua la naissance de la *topologie symplectique*.[4] L'université Paris-Dauphine s'est illustrée dans ce domaine à partir des années 1980, sous l'impulsion d'Ivar Ekeland et de ses étudiants, notamment au sujet d'une autre conjecture fondamentale, due à Alan Weinstein, qui affirme l'existence d'orbites périodiques pour de nombreux systèmes dynamiques conservatifs.[5] Claude Viterbo a démontré cette conjecture en 1987 dans un premier cas particulièrement important, en utilisant la fameuse *fonctionnelle d'action duale* de Clarke-Ekeland-Lasry, et l'a ensuite généralisée avec Hofer en proposant une magnifique construction de sphères holomorphes, inspirée de travaux fondateurs de Misha Gromov. Ces développements se poursuivent activement aujourd'hui, avec par exemple la récente démonstration par Qun Wang, qui termine sa thèse en 2018 à Dauphine, de l'existence d'orbites périodiques symétriques dans des systèmes de vortex.

Cette brillante tradition de recherche ne fut pas étrangère au choix, fait par Arnold, d'accepter un poste de professeur à Paris-Dauphine, à l'instigation d'Ivar Ekeland, Pierre-Louis Lions et Yves Meyer, quand la Perestroïka le permit en 1993, alors que beaucoup de ses collègues mathématiciens soviétiques prirent des

3. Cette géométrie est née au XVIIIe siècle, dans les travaux de Lagrange sur les équations du mouvement des planètes, encore, et leurs symétries. Le terme de *symplectique* a été forgé par H. Weyl en 1939. Il est la transposition grecque du terme d'origine latine *complexe*, dont le sens était déjà chargé en mathématiques.

4. Qu'est-ce que la topologie ? R. Thom la définissait comme l'étude du passage du local au global...

5. Une orbite périodique est une trajectoire le long de laquelle on revient régulièrement, à intervalle de temps fixé, dans le même état.

postes, eux, aux USA. Arnold était admiratif de R. Thom, dont il avait suivi le séminaire à l'IHES pendant l'année 1965, et de J. Mather. Sa fascination pour la *théorie des singularités* n'a cessé de croître. Née des travaux du mathématicien américain H. Whitney, cette théorie décrit les façons de plier un espace sur un autre. Par exemple, quand on laisse tomber un drap par terre, en général il existe trois type de points : les points réguliers, les plis, et les fronces (là où les plis se terminent). Arnold a fait sienne et développé l'idée, chère à Thom, que l'étude d'un objet mathématique n'a de sens physique que lorsque cet objet est en "position générique" ou, s'il est plongé dans une famille, lorsque cette famille elle-même est en position générique. Avec ses étudiants, il a obtenu des résultats profonds et variés sur les singularités, découvrant des liens avec les géométries symplectique et de contact,[6] la topologie ou la géométrie algébrique.

À Dauphine, Arnold a enseigné à tous les niveaux du L1 au M2, des cours riches et exigeants. Il excellait à expliquer les idées importantes, sans jamais s'appesantir sur les détails techniques de telle ou telle démonstration... et il excellait aussi dans les prises de position provocatrices (mais non dénuées de fondement) sur l'enseignement. Il prétendait enseigner les "vraies mathématiques" et il n'hésitait pas à tester les candidats à un poste de maître de conférence, sur des questions mathématiques qu'il jugeait incontournables, mais que peu de collègues sauraient résoudre. En fait, Arnold a violemment critiqué l'enseignement des mathématiques en France (et dans le monde occidental en général), plaidant, dans la tradition russe, pour une meilleure connexion avec les autres disciplines (principalement, la physique) et pour l'intuition (géométrique) plutôt que les généralisations abstraites. En voici un concentré :

> L'identité de Jacobi (qui force les trois hauteurs d'un triangle à être concourantes) est tout autant un fait expérimental que la rotondité de la Terre [...] mais cela revient moins cher à vérifier ! [...] Comme les mathématiques scolastiques, séparées de la physique, ne sont adaptées ni à l'enseignement, ni à aucune application éventuelle à d'autres sciences, les mathématiciens se sont fait haïr des lycéens [...] et des utilisateurs. [...] Les zélotes de la mathématique superabstraite, privés par les Dieux de l'imagination géométrique, ont éliminé toute la géométrie de l'éducation, alors que c'est à travers elle que passent le plus souvent les relations avec la physique et le réel. (V. I. Arnold, Sur l'éducation mathématique, *Gazette des mathématiciens*, 1998.)

Le Ceremade n'a jamais perdu cette connexion des mathématiques avec des questions extra-mathématiques.

Merci à Abed Bounemoura, Alain Chenciner, Ivar Ekeland, Emmanuel Ferrand, Jean-Pierre Marco et Éric Séré pour leurs discussions et leur relecture. Pour (beaucoup) mieux connaître Arnold, je renvoie au livre *Arnold : swimming against the tide* (éditeurs scientifiques : Boris A. Khesin et Serge L. Tabachnikov), publié par l'American Math. Soc. en 2014.

6. Un contact mathématique est une tangence. La géométrie de contact décrit comment les tangences de familles d'objets s'organisent. Par exemple, elle explique, s'il en était besoin, pouquoi l'on peut garer une voiture en créneau, qui plus est sans faire crisser les pneus !