Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766-1874).

Frédéric Brechenmacher.
Laboratoire de mathématiques Lens (LML, EA 2462).
Université d'Artois (IUFM du Nord Pas de Calais).

frederic.brechenmacher@euler.univ-artois.fr

Prépublications consultables en ligne :

- For a paper in english on this subject see: *Algebraic generality vs arithmetic generality in the controversy between C. Jordan and L. Kronecker (1874).* http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0712/0712.2566.pdf

- *L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766-1874)*, **http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0704/0704.2931.pdf**

Nouvelle version mise à jour sur

http://fredericbrechenmacher.noosblog.fr/

Résumé. Cet exposé questionne l'identité algébrique d'une pratique propre à un corpus de textes publiés sur une période antérieure à l'élaboration de théories algébriques, comme la théorie des matrices, ou de disciplines, comme l'algèbre linéaire, qui donneront à cette pratique l'identité d'une méthode de transformation d'un système linéaire par la décomposition de la forme polynomiale de l'équation caractéristique associée. Dans les années 1760-1775, Lagrange élabore une pratique algébrique spécifique à la mathématisation des problèmes mécaniques des petites oscillations de cordes chargées d'un nombre quelconque de masses ou de planètes sur leurs orbites. La spécificité de cette pratique s'affirme par opposition à la méthode des coefficients indéterminés, elle consiste à exprimer les solutions des systèmes linéaires par des factorisations polynomiales d'une équation algébrique particulière, *l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes*. Elaborée en un jeu sur les primes et les indices des coefficients des systèmes linéaires, la pratique de Lagrange est à l'origine d'une caractéristique des systèmes issus de la mécanique, la disposition en miroirs des coefficients de systèmes que nous désignons aujourd'hui comme symétriques. Elle est également à l'origine d'une discussion sur la nature des racines de l'équation qui lui est associée. Nous questionnerons l'identité algébrique de cette discussion qui se développera sur plus d'un siècle en étudiant les héritages, permanences et évolutions de la pratique élaborée par Lagrange au sein de différentes méthodes élaborées dans divers cadres théoriques par des auteurs comme Laplace, Cauchy, Weierstrass, Jordan et Kronecker. Nous verrons que, préalablement à l'élaboration d'une théorie des formes dont la nature, algébrique ou arithmétique, suscitera une vive controverse entre Jordan et Kronecker en 1874, le caractère algébrique de la *discussion* renvoie davantage à l'identité historique d'un corpus qu'à une identité théorique et s'avère indissociable d'une constante revendication de généralité. Entre 1766 et 1874, la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires permet de mettre en évidence différentes représentations associées à une même pratique algébrique ainsi que des évolutions dans les philosophies internes portées par les auteurs du corpus sur la généralité de l'algèbre.

Introduction

On sait qu'il existe une infinité de manières de ramener un polynôme bilinéaire

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \ (\alpha=1,2,\ldots,n,\ \beta=1,2,\ldots,n)$$

à la forme canonique $x_1y_1+\ldots+x_my_m$, […] par des transformations linéaires opérées sur les deux systèmes de variables $x_1,..,x_n$, $y_1,..,y_n$. Parmi les diverses questions de ce genre que l'on peut se proposer, nous considérons les suivantes :

1. Ramener un polynôme bilinéaire P à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées les unes sur $x_1,\ldots,x_n$, les autres sur $y_1,\ldots,y_n$.
2. Ramener P à une forme canonique simple par des substitutions linéaires quelconques opérées simultanément sur les x et les y.
3. Ramener simultanément à une forme canonique deux polynômes P et Q par des substitutions linéaires quelconques, opérées isolement sur chacune des deux séries de variables. [Jordan 1873, p. 1487].

Ces problèmes, ainsi qu'ils sont posés ici [dans la note de Jordan de 1873], manquent tout à fait de précision même si le mot « canonique » suivant son sens propre donne justement l'impression qu'il pourrait s'agir de quelque chose absolument déterminé. […] La signification de l'expression « forme canonique » ou « forme canonique simple » utilisée par Mr. Jordan pour préciser la question [de la théorie des formes bilinéaires et quadratiques], n'a aucune pertinence générale ou décisive et désigne une notion sans aucun contenu objectif. […] Si de telles expressions générales sont trouvées, on pourrait au besoin leur donner a posteriori une même désignation de formes canoniques pour des motivations de simplicité et de généralité. Mais si on ne veut pas en rester à ces aspects uniquement formels qui ont souvent été mis en avant par les travaux d'algèbre les plus récents -certainement pas au profit de la défense de la science–, alors on ne peut omettre de déduire le bien fondé de l'établissement des formes canoniques pour des raisons internes. En réalité, les dites formes canoniques ou formes normales sont effectivement déterminées uniquement par l'orientation donnée à l'étude et doivent donc seulement être considérées comme les moyens, mais non comme le but de la recherche. Cela ressort notamment clairement partout où le travail algébrique est effectué au service d'autres disciplines mathématiques, dont il reçoit ses fins et dont dépendent ses objectifs. Toutefois l'algèbre peut naturellement elle-même susciter également des motifs suffisants visant à l'établissement de formes canoniques, comme par exemple lorsque Mr. Weierstrass et moi-même avons été conduits dans les deux travaux cités par Mr. Jordan, à l'introduction de certaines formes normales, dont la place relative a été explicitement et clairement soulignée. [Kronecker 1874a, p. 367, traduction F.B.]
Toutefois, il ne faut pas du tout être surpris que pour un développement à la fois tout à fait général et uniforme, comme [Jordan] en donne dans son travail cité, l'auteur soit nécessairement contraint de prouver certains nouveaux principes ; et il faudrait nous étonner au contraire, si conformément aux affirmations de Jordan (« Les méthodes nouvelles que nous proposons sont, au contraire extrêmement simples... » « On voit par une discussion très simple, que l'on peut transformer... ») les moyens les plus simples devraient suffire. […] Car on est habitué –en particulier dans les questions algébriques – à trouver des difficultés largement nouvelles, si on veut se détacher de la restriction à ces cas, que l'on a coutume de désigner comme généraux.
Aussitôt que l'on perce la surface de la prétendue généralité, excluant chaque particularité, on pénètre l'intérieur de la vraie généralité que toutes les singularités recouvrent, et l'on trouve généralement ainsi seulement les difficultés réelles de l'étude, ainsi que les abondants nouveaux points de vue et phénomènes qu'elle contient dans ses profondeurs. […] Ceci se confirme partout dans les rares questions algébriques qui sont mises en œuvre complètement jusqu'à leurs moindres détails, notamment dans la théorie des faisceaux des formes quadratiques qui a été développée plus haut dans ses caractéristiques principales. Parce que, pendant si longtemps, on n'osait pas faire tomber la condition que le déterminant ne contient que des facteurs inégaux, on est arrivé avec cette question connue de la transformation simultanée de deux formes quadratiques; qui a été si souvent traitée depuis un siècle, mais de manière sporadique, à des résultats très insuffisants et les vrais aspects de l'étude ont été ignorés. Avec l'abandon de cette condition, le travail de Weierstrass de l'année 1858 a conduit à un aperçu plus élevé et notamment à un règlement complet du cas, dans lequel n'existent que des diviseurs élémentaires simples. Mais l'introduction générale de cette notion de diviseur élémentaire, dont seule une étape provisoire était alors accomplie, intervient seulement dans le mémoire de Weierstrass de l'année 1868, et une lumière tout à fait nouvelle est ainsi faite sur la théorie des

faisceaux pour n'importe quel cas, avec la seule condition que le déterminant soit différent de zéro. Quand j'ai aussi dépouillé cette dernière restriction et l'ai développé à partir de la notion de diviseur élémentaire des faisceaux élémentaires généraux, la clarté la plus pleine s'est répandue sur une quantité de nouvelles formes algébriques, et par ce traitement complet de l'objet des vues plus élevées ont été acquises sur une théorie des invariants comprise dans sa vraie généralité. [Kronecker 1874c, p. 404, traduction F.B.]

L'intégration des équations différentielles du mouvement de rotation d'un corps solide, soumis à l'action de la pesanteur, a été présentée pour la première fois par l'illustre auteur de la *Mécanique analytique*, dans le cas des petites oscillations. […]Lagrange forme trois équations différentielles du second ordre, entre lesquelles il élimine l'une des trois inconnues. Pour abréger j'écrirai le résultat de l'élimination comme il suit :

$$(a)\begin{cases} g\dfrac{d^2u}{dt^2}+a\dfrac{d^2s}{dt^2}+cu=0, \\ f\dfrac{d^2s}{dt^2}+a\dfrac{d^2u}{dt^2}+cs=0, \end{cases}$$

[…] Elles fournissent l'équation caractéristique

$$\frac{c^2}{\rho^4}-(f+g)\frac{c}{\rho^2}+fg-a^2=0$$

Faisant abstraction du signe des racines, et désignant leurs valeurs absolues par ρ et ρ', on a les expressions suivantes de *s* et de *u* :

$$(f)\begin{cases} s=\alpha\sin(\rho t+\beta)+\alpha'\sin(\rho' t+\beta') \\ u=\dfrac{a\rho^2}{c-g\rho^2}\alpha\sin(\rho t+\beta)+\dfrac{a\rho'^2}{c-g\rho'^2}\alpha'\sin(\rho' t+\beta') \end{cases}$$

[…] Au reste dit Lagrange, comme cette solution est fondée sur l'hypothèse que *s, u* et $\frac{d\theta}{dt}$ soient de très petites quantités il faudra, pour qu'elle soit légitime :

1° que les constantes *α, α'* et *h* soient aussi très petites ;

2° que les racines *ρ* et *ρ'* soient réelles et *inégales,* afin que l'angle *t soit toujours sous le signe des sinus […]* C'est sur la seconde des conditions ici énoncées que je me permets d'appeler l'attention de l'Académie. Je dis qu'il n'est pas nécessaire que cette condition soit remplie, pour que les petites oscillations se maintiennent.[…] J'ai cru devoir appeler l'attention des géomètres sur un point assez important de la théorie des équations linéaires, et qui n'occupe pas une place suffisante dans les traités sur cette matière. Peut-être la question que je soulève a-t-elle déjà été résolue ; mais il faut croire que la solution n'est pas généralement connue, puisque l'incorrection que je signale dans la *Mécanique analytique* a pu échapper à un géomètre aussi érudit que le savant auteur de la nouvelle édition d'un ouvrage devenu classique. [Yvon-Villarceau, 1870, 762]

1. La discussion sur
l' « équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes ».

Section *V* de la *Mécanique Analytique*, "Solutions de différens problêmes de Dynamique" [1788, 243-286].

$$0 = (I)\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + (I,2)\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + (I,3)\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&c + [I]\ \xi + [I,2]\ \psi + [I,3]\varphi + \&c.$$
$$0 = (2)\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + (I,2)\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&c + [2]\psi + [I,2]\xi + [2,3]\varphi + \&c$$
$$0 = (3)\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + (I,3)\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + \&c + [3]\varphi + [I,3]\xi + [2,3]\psi + \&c$$
&c.

équations qui étans sous une forme linéaire avec des cœfficient constants, peuvent être intégrées rigoureusement & généralement par les méthodes connues. […] les variables dans ces sortes d'équations ayent entr'elles des rapports constants; c'est-à-dire que l'on ait $\psi = f\xi$, $\phi = g\xi$, *&c*, le système s'écrit alors :

$$((I) + (I,2)f + (I,3)g + \&c)\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + ([I] + [I,2]f + [I,3]g + \&c\ )\xi = 0$$
$$((2)f + (I,2) + (2,3)g + \&c)\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + ([2]f + [I,2] + [2,3]g + \&c)\ \xi = 0$$
$$((3)g + (I,3) + (2,3)f + \&c)\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + ([3]g + [I,3] + [2,3]f + \&c)\ \xi = 0$$
&c,

lesquelles donnent $\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\ \xi = 0$, en faisant

$$K = \frac{[I]+[I,2]f+[I,3]g+\&c}{(I)+(I,2)f+(I,3)g+\&c} = \frac{[2]f+[I,2]+[2,3]g+\&c}{(2)f+(I,2)+(2,3)g+\&c} = \frac{[3]g+[I,3]+[2,3]f+\&c}{(3)g+(I,3)+(2,3)f+\&c}$$

Maintenant l'équation $\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\ \xi = 0$, donne par l'intégration $\xi = E\sin(t\sqrt{K} + \varepsilon)$.

E, ε étant des constantes arbitraires ; ainsi comme on a supposé $\psi = f\xi$, $\varphi = g\ \xi$, &c, on a aussi les valeurs de *ψ, φ,* &c. Cette solution n'est que particulière, mais elle est en même temps double, triple, &c, selon le nombre des valeurs de K ; par conséquent en les joignant ensemble, on aura la solution générale […]. Dénotant par *K', K'', K''', &c,* les différentes valeurs de *K*, c'est-à-dire, les racines de l'équation en *K* […]

$$\xi = E'\sin(t\sqrt{K'} + \varepsilon') + E''\sin(t\sqrt{K''} + \varepsilon'') + E'''\sin(t\sqrt{K'''} + \varepsilon''') + \&c,$$
$$\psi = f'E'\sin(t\sqrt{K'} + \varepsilon') + f''E''\sin(t\sqrt{K''} + \varepsilon'') + f'''E'''\sin(t\sqrt{K'''} + \varepsilon''') + \&c,$$
$$\varphi = g'E'\sin(t\sqrt{K'} + \varepsilon') + g''E''\sin(t\sqrt{K''} + \varepsilon'') + g'''E'''\sin(t\sqrt{K'''} + \varepsilon''') + \&c,$$
&c,

2. La spécificité de la pratique algébrique élaborée par Lagrange pour le « problème des oscillations très petites d'un système quelconque de corps ».

Lagrange, "Solutions de différents problèmes de calculs intégral" [1766,519-535].
Principe pour réduire l'ordre d'une équation différentielle dont on connaît des solutions particulières :
Les équations proposées seront intégrables algébriquement, si l'on peut trouver, […] autant de valeurs particulières de chacune des quantités *y,y',y'',…*qu'il y a d'unités dans la somme des exposants des plus hautes différences de ces variables." […]
Méthode générale pour déterminer le mouvement d'un système quelconque de corps qui agissent les uns sur les autres, en supposant que ces corps ne fassent que des oscillations infiniment petites autour de leurs points d'équilibre.
Soit n le nombre des corps qui composent le système, et nommons *y',y'',y''',…*les espaces infiniment petits que ces corps décrivent dans leurs oscillations pendant le temps t ; on aura, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre et des ordres plus élevés des équations de cette forme

$$(a)\begin{cases} \dfrac{d^2y'}{dt^2}+A'y'+B'y''+C'y'''+\ldots+N'y^{(n)}=0 \\ \dfrac{d^2y''}{dt^2}+A''y'+B''y''+C''y'''+\ldots+N''y^{(n)}=0 \\ \dfrac{d^2y'''}{dt^2}+A'''y'+B'''y''+C'''y'''+\ldots+N'''y^{(n)}=0 \\ \ldots \\ \dfrac{d^2y^{(n)}}{dt^2}+A^{(n)}y'+B^{(n)}y''+C^{(n)}y'''+\ldots+N^{(n)}y^{(n)}=0 \end{cases}$$

A', B', C',…, A'', B'', C'',… étant des constantes données par la nature du problème. Pour intégrer ces équations suivant la méthode expliquée ci-dessus, on multipliera la première par $\lambda' e^{\rho t}dt$, la seconde *par* $\lambda'' e^{\rho t}dt$, et ainsi de suite, λ', λ'', λ''', … étant, ainsi que ρ, des constantes indéterminées ; ensuite on les ajoutera ensemble, et on en prendra l'intégrale en faisant disparaître de dessous le signe ∫ les différences des variables *y', y'', y''',....* ; après quoi on fera les coefficients des quantités $\int y'e^{\rho t}dt$, $\int y''e^{\rho t}dt$, $\int y'''e^{\rho t}dt,\ldots$ égaux à zéro ; de cette manière on aura d'abord l'équation intégrale

$$(b)\ [\lambda'(\frac{dy'}{dt}-\rho y')+\lambda''(\frac{dy''}{dt}-\rho y'')+\lambda'''(\frac{dy'''}{dt}-\rho y''')+\ldots+\lambda^{(n)}(\frac{dy^{(n)}}{dt}-\rho y^{(n)})]e^{\rho t}=const.$$

et ensuite les équations

$$(c)\begin{cases} \rho^2\lambda'+A'\lambda'+A''\lambda''+A'''\lambda'''+\ldots+A^{(n)}\lambda^{(n)}=0, \\ \rho^2\lambda''+B'\lambda'+B''\lambda''+B'''\lambda'''+\ldots+B^{(n)}\lambda^{(n)}=0, \\ \rho^2\lambda'''+C'\lambda'+C''\lambda''+C'''\lambda'''+\ldots+C^{(n)}\lambda^{(n)}=0, \\ \ldots \\ \rho^2\lambda^{(n)}+N'\lambda'+N''\lambda''+N'''\lambda'''+\ldots+N^{(n)}\lambda^{(n)}=0, \end{cases}$$

lesquelles serviront à déterminer les quantités ρ, λ', λ'', λ''',…[…]

$$\lambda'\frac{dy'}{dt}+\lambda''\frac{dy''}{dt}+\lambda'''\frac{dy'''}{dt}+\ldots+\lambda^{(n)}\frac{dy^{(n)}}{dt}\quad-\rho\quad[\lambda'y'-\lambda''y''-\ldots-\lambda^{(n)}y^{(n)}]$$
$$=[\lambda'V'+\lambda''V''+\lambda'''V'''+\ldots+\lambda^{(n)}V^{(n)}-\rho(\lambda'Y'+\lambda''Y''+\ldots+\lambda^{(n)}Y^{(n)})]\,e^{-\rho t}$$

[…]

$$(d)\ \lambda'y'+\lambda''y''+\ldots+\lambda^{(n)}y^{(n)}=[\lambda'Y'+\lambda''Y''+\ldots+\lambda^{(n)}Y^{(n)}]\,\frac{e^{\rho t}+e^{-\rho t}}{2}$$
$$+[\lambda'V'+\lambda''V''+\lambda'''V'''+\ldots+\lambda^{(n)}V^{(n)}]\,\frac{e^{\rho t}-e^{-\rho t}}{2\rho}$$

[…]

$$\theta=[\lambda'Y'+\lambda''Y''+\ldots+\lambda^{(n)}Y^{(n)}]\,\frac{e^{\rho t}+e^{-\rho t}}{2}\quad+[\lambda'V'+\lambda''V''+\lambda'''V'''+\ldots+\lambda^{(n)}V^{(n)}]\,\frac{e^{\rho t}-e^{-\rho t}}{2\rho}$$

[…]

$$\lambda'_1\, y' + \lambda''_1\, y'' + \ldots + \lambda^{(n)}_1\, y^{(n)} = \theta_1,$$
$$\lambda'_2\, y' + \lambda''_2\, y'' + \ldots + \lambda^{(n)}_2\, y^{(n)} = \theta_2,$$
$$\ldots\ldots$$
$$\lambda'_n\, y' + \lambda''_n\, y'' + \ldots + \lambda^{(n)}_n\, y^{(n)} = \theta_n,$$

[…] Pour en venir à bout, je multiplie la première de ces équations par μ', la seconde par μ'', la troisième par μ''', et ainsi de suite, $\mu', \mu'', \mu''',\ldots$ étant des coefficients indéterminés, puis je les ajoute ensemble, ce qui me donne […] la valeur d'une y quelconque, comme $y^{(s)}$, en égalant à zéro chacun des coefficients des autres y ; ainsi l'on aura

$$(e)\;\; y^{(s)} = \frac{\mu'\theta_1 + \mu''\theta_2 + \mu'''\theta_3 + \ldots + \mu^{(n)}\theta_n}{\mu'\lambda_1^{s} + \mu''\lambda_2^{(s)} + \mu'''\lambda_3^{(s)} + \ldots + \mu^{(n)}\lambda_n^{(s)}},$$

et ensuite ces équations de condition :

$$(f)$$
$$\mu'\lambda'_1 + \mu''\lambda'_2 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'_n = 0$$
$$\mu'\lambda''_1 + \mu''\lambda''_2 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'_n = 0$$
$$\ldots$$
$$\mu'\lambda_1^{(n)} + \mu''\lambda^{(n)}{}_2 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'_n{}^{(n)} = 0$$

à l'exception seulement de celle qui répondrait à l'exposant s.

Supposons que l'on ait en général

$$\mu'\lambda'_1 + \mu''\lambda'_2 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'_n = \Delta'$$
$$\mu'\lambda''_1 + \mu''\lambda''_2 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'_n = \Delta''$$
$$\ldots$$
$$\mu'\lambda_1^{(n)} + \mu''\lambda^{(n)}{}_2 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'_n{}^{(n)} = \Delta^{(n)},$$

et qu'il faille trouver la valeur d'une μ quelconque comme $\mu^{(m)}$. On multipliera ces équations par des coefficients indéterminés $\nu', \nu'', \nu''',\ldots,\nu^{(n)}$, et, après les avoir ajoutées ensemble, on fera les coefficients des quantités $\mu', \mu'', \mu''',\ldots$ chacun égal à zéro, excepté celui de la quantité $\mu^{(m)}$; de cette manière on aura

$$(\mathrm{g})\;\; \mu^{(m)} = \frac{\nu'\Delta' + \nu''\Delta'' + \nu'''\Delta''' + \ldots + \nu^{(n)}\Delta^{(n)}}{\nu'\lambda'_m + \nu''\lambda''_m + \nu'''\lambda'''_m + \ldots + \nu^{(n)}\lambda_m^{(n)}},$$

et la détermination des quantités $\nu', \nu'', \nu''',\ldots$ dépendra de cette condition que

$$(h)\;\; \nu'_m\,\lambda' + \nu'_m\,'\lambda'' + \ldots + \nu^{(n)}_m\,\lambda^{(n)} = 0$$

lorsque $\rho = \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots,\rho_n$ excepté ρ_m.

[…] [Multipliant par ν'; ν'',.. et ajoutant les lignes de l'équation (c)] :

$$(i)\left\{\begin{array}{l}
[\rho^2\upsilon' + A'\upsilon' + B'\upsilon'' + C'\upsilon''' + \ldots + N^{(n)}\upsilon^{(n)}]\lambda' \\
+[\rho^2\lambda'' + A''\upsilon' + B''\upsilon'' + C'''\upsilon''' + \ldots + N''\upsilon^{(n)}]\lambda'' \\
+[\rho^2\lambda''' + A'''\upsilon' + B'''\upsilon'' + C'''\upsilon''' + \ldots + N'''\upsilon^{(n)}]\lambda''' \\
\ldots \\
+[\rho^2\upsilon^{(n)} + A^{(n)}\upsilon' + B^{(n)}\upsilon'' + C^{(n)}\upsilon''' + \ldots + N^{(n)}\upsilon^{(n)}]\lambda^{(n)} = 0,
\end{array}\right.$$

$$(k)\left\{\begin{array}{l}
\rho^2\upsilon' + A'\upsilon' + B'\upsilon'' + C'\upsilon''' + \ldots + N^{(n)}\upsilon^{(n)} = 0, \\
\rho^2\lambda'' + A''\upsilon' + B''\upsilon'' + C'''\upsilon''' + \ldots + N''\upsilon^{(n)} = 0, \\
\rho^2\lambda''' + A'''\upsilon' + B'''\upsilon'' + C'''\upsilon''' + \ldots + N'''\upsilon^{(n)} = 0, \\
\ldots \\
\rho^2\upsilon^{(n)} + A^{(n)}\upsilon' + B^{(n)}\upsilon'' + C^{(n)}\upsilon''' + \ldots + N^{(n)}\upsilon^{(n)} = 0,
\end{array}\right.$$

Et il est bon de remarquer qu'en éliminant de ces équations les quantités $\nu', \nu'', \nu''',\ldots$, on aura une équation finale en ρ^2 qui sera nécessairement la même que celle qui résulte des équations (c) par l'évanouissement des quantités $\lambda', \lambda'', \lambda''',\ldots$; ce qui peut se voir aisément à *priori*.

Faisons maintenant $\rho=\rho_m$, nous aurons

$$\begin{cases} A'\upsilon' + B'\upsilon'' + C'\upsilon''' + \ldots + N^{(n)}\upsilon^{(n)} = -\rho_m^2\upsilon', \\ A''\upsilon' + B''\upsilon'' + C'''\upsilon''' + \ldots + N''\upsilon^{(n)} = -\rho_m^2\upsilon'', \\ A'''\upsilon' + B'''\upsilon'' + C'''\upsilon''' + \ldots + N'''\upsilon^{(n)} = -\rho_m^2\upsilon''', \\ \ldots \\ A^{(n)}\upsilon' + B^{(n)}\upsilon'' + C^{(n)}\upsilon''' + \ldots + N^{(n)}\upsilon^{(n)} = -\rho_m^2\upsilon^{(n)}, \end{cases}$$

et l'équation *(i)* deviendra

$$(\rho^2-\rho^2_m)\ [v'\,\lambda'+v''\,\lambda''+v''\lambda'''+\ldots + v^{(n)}\lambda^{(n)}]=0$$

laquelle devra être vraie pour toutes les valeurs de ρ qui satisfont aux équations *(e)*, d'où celle-ci est tirée, d'où celle-ci est tirée, on aura en général

$$[v'\,\lambda'+v''\,\lambda''+v''\lambda'''+\ldots + v^{(n)}\lambda^{(n)}=0,$$

lorsque $\rho= \rho_1, \rho_2, \rho_3,\ldots,\rho_n$ excepté ρ_m, auquel cas l'équation se vérifie d'elle-même, à cause du facteur $\rho^2-\rho^2_m$.

$(\rho^2-\rho^2_m)\ [v'_m\,\lambda'+v''_m\,\lambda''+v'''_m\lambda'''+\ldots + v^{(n)}_m\lambda^{(n)}]= \xi P = (I-\frac{\rho^2}{\rho_1^2})(I-\frac{\rho^2}{\rho_2^2})\ldots(I-\frac{\rho^2}{\rho_n^2});$

[...] si $v'_m\lambda'+v''_m\lambda''+v'''_m\lambda'''+\ldots v^{(n)}_m\lambda^{(n)} = \chi P$ alors :

$$\upsilon'_m\lambda'+\upsilon''_m\lambda''+\upsilon'''_m\lambda'''+\ldots+\upsilon_m^{(n)'}\lambda^{(n)} = \chi(I-\frac{\rho^2}{\rho_1^2})(I-\frac{\rho^2}{\rho_2^2})\ldots(I-\frac{\rho^2}{\rho_n^2})$$

en prenant tous les facteurs hormis *$(1-\rho^2/\rho_m^2)$* [...]

$$Q_m = v'_m\lambda'+\ldots+v_m^{(n)}\lambda^{(n)}$$

[...]

$$y^{(s)} = \frac{v_1^{(s)}}{Q_1}\ \theta_1 + \frac{v_2^{(s)}}{Q_2}\ \theta_2 + \ldots + \frac{v_n^{(s)}}{Q_n}\ \theta_n$$

[…]donc $\chi P= [v'_m\lambda'+v''_m\lambda''+\ldots v^{(n)}_m\lambda^{(n)})]\ (1-\rho^2/\rho_m^2)$

Prenons les différences de part et d'autre, en faisant varier ρ, et supposons ensuite $\rho=\rho_m$, […]

$$\frac{\chi dP}{d\rho} = -\frac{2}{\rho_m}\ [v'_m\lambda_m'+v''_m\lambda_m''+\ldots v^{(n)}_m\lambda_m^{(n)} = \frac{2Q_m}{\rho_m}$$

donc on aura en général,

$$Q = -\frac{1}{2}\chi\rho\ \frac{dP}{d\rho},$$

Ce qui pourra servir à abréger le calcul de la valeur de Q dans plusieurs occasions.

2. La discussion qualitative sur les racines d'une équation algébrique.

d'Alembert, *Traité de dynamique* de 1743 [édition de 1758 , 139-145] :

Problème V.

115. Un fil *CmM* fixe en *C*, & chargé de deux poids *m, M,* étant infiniment peu éloigné de la verticale *CO*, trouver la durée des oscillations de ce fil.[…]

$$(K) - ddx = [\ \frac{px}{l} - \frac{M.P}{m}\ (\ \frac{y}{L} - \frac{x}{l}\ )]\ dt^2\ (36),$$

$$\&\ -\ \ ddy = [\ \frac{yP}{L}\ .\ \frac{M+m}{m} - \frac{x}{L}\ .(p+\ \frac{M.P}{m}\ )]dt^2\ (N).$$

[…]

$$(P) -\quad ddx = (2x-y).\ \frac{2dt^2}{T^2},$$

$$\&\ (Q)-\ \ ddy= (2y-2x)\ \frac{2dt^2}{T^2}$$

[…] Je multiplie la seconde par un coefficient indéterminé ν, & ensuite je les ajoute ensemble, ce qui donne

$$ddx\text{-}\nu ddy = \frac{2dt^2}{T^2}\times(\ \overline{2\text{-}2\nu}\ .x+\ \overline{2\nu\text{-}1}\ .y)\ldots(R).$$

Je fais en sorte *que $(2\text{-}2\nu)x+(2\nu\text{-}1)y$* soit un multiple de $-x\text{-}\nu y$, ce qui donne $2\text{-}2\nu = \frac{2\nu-1}{\nu}$; & $\nu= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$; donc faisant $x+\nu y=u$, ou plutôt $x+\frac{y}{\sqrt{2}}=u$, & $x-\frac{y}{\sqrt{2}}=u'$, on aura les deux équations $-ddu=(2-\sqrt{2})\ 2u\ \frac{dt^2}{T^2}$, & -

$ddu' = (2+\sqrt{2}).\ \frac{2u'dt^2}{T^2}$ […] multipliant la 1ere par *du*, on a l'intégrale $\frac{du^2}{\sqrt{AA-uu}} = \frac{dt}{T}\ \sqrt{4\text{-}2\sqrt{2}}$, parceque *t* croissant, *u* diminue ; donc $u = A\cos\ \frac{t\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{T}$, & $u' = B\cos.\ \frac{t\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{T}$, intégrales qui sont complètes, […]; de là on tirera les valeurs de x & de y, & on déterminera les constantes A&B par les valeurs connues & données de x& de y lorsque t=0.

Lagrange [1766,532]. De là on tire une méthode générale pour voir si l'état d'équilibre d'un système quelconque donné de corps est stable, c'est-à-dire si, les corps étant infiniment peu dérangés de cet état, ils y reviendront d'eux-mêmes, ou au moins tendront à y revenir. […]
1° Si toutes les racines de cette équation sont réelles négatives et inégales, l'état d'équilibre sera stable en général, quel que soit le dérangement initial du système.
2° Si ces racines sont toutes réelles, positives ou toutes imaginaires ou en partie positivies, et en partie imaginaires, l'état d'équilibre n'aura aucune stabilité, et le système une fois dérangé de cet état ne pourra le reprendre ;
3° Enfin, si les racines sont en partie réelles négatives et inégales, et en partie réelles négatives et égales ou réelles et positives, ou imaginaires, l'état d'équilibre aura seulement une stabilité restreinte et conditionnelle.

Lagrange [1774]. "Si les planètes étaient simplement attirées par le Soleil, et n'agissaient point les unes sur les autres, elles décriraient autour de cet astre, des ellipses variables suivant les lois de Képler, comme Newton l'a démontré le premier, et une foule d'Auteurs après lui. Mais les observations ont prouvé que le mouvement elliptique des Planètes est sujet à de petites variations, et le calcul a démontré que leur attraction mutuelle peut en être la cause. Ces variations sont de deux espèces : les unes périodiques et qui ne dépendent que de la configuration des Planètes entre elles ; celles-ci sont les plus sensibles, et la calcul en a déjà été donné par différents Auteurs ; les autres séculaires et qui paraissent aller toujours en augmentant, ce sont les plus difficiles à déterminer tant par les observations que par la Théorie. Les premières ne dérangent point l'orbite primitive de la Planète ; ce ne sont, pour ainsi dire, que des écarts passagers qu'elle fait dans sa course régulière, et il suffit d'appliquer ces variations au lieu de la Planète calculé par les Tables ordinaires du mouvement elliptique. Il n'en est pas de même des variations séculaires. Ces dernières altèrent les éléments mêmes de l'orbite, c'est-à-dire la position et le dimensions de l'ellipse décrite par la planète ; et quoique leur effet soit insensible dans un court espace de temps, il peut néanmoins devenir à la longue très considérable."

Lagrange, [1778, 665]. Avant de terminer cet Article, nous devons encore remarquer que, quoique nous ayons supposé que les racines $a,b,c,\ldots$ de l'équation en x soient réelles et inégales, il peut néanmoins arriver qu'il y en ait d'égales ou d'imaginaires ; mais il est facile de résoudre ces cas par les méthodes connues : nous observerons seulement que, dans le cas des racines égales, les valeurs de s, $s_1,s_2,\ldots,u,u_1,u_2,\ldots$ contiendront des arcs de cercle, et que dans celui des racines imaginaires ces valeurs contiendront des exponentielles ordinaires ; de sorte que, dans l'un et l'autre cas, les quantités dont il s'agit croîtront à mesure que t croît ; par conséquent la solution précédente cessera d'être exacte au bout d'un certain temps ; mais heureusement ces cas ne paraissent pas avoir lieu dans le Système du monde.

Laplace, "Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites", [1787, p61]. Mais les excentricités et les inclinaisons sont-elles renfermées constamment dans d'étroites limites ? C'est un point important du système du monde qui reste encore à éclaircir, et dont la discussion est la seule chose que laisse maintenant à désirer la théorie des inégalités séculaires. […] l'incertitude où l'on et encore à l'égard de plusieurs de ces masses peut laisser quelques doutes sur ce résultat, et il est nécessaire de s'assurer par une méthode indépendante de toute hypothèse, que, en vertu de l'excentricité des planètes, les excentricités et les inclinaisons de leurs orbites sont toujours peu considérables. Je me propose encore de remplir cet objet dans ce Mémoire, en établissant d'une manière générale que les inégalités séculaires des excentricités et des inclinaisons des orbites des planètes ne renferment ni arcs de cercle, ni exponentielles, d'où il suit que, en vertu de l'action de ces corps, leurs orbites s'aplatissent plus ou moins, mais en ne s'écartant que très peu de la forme circulaire et en conservant toujours les mêmes grands axes. Les positions respectives de leurs plans et de leurs aphélies varient sans cesse ; elles s'inclinent plus ou moins les unes aux autres, mais elles sont toujours renfermées dans une zone d'un petit nombre de degrés.

Cauchy, "Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes" [1829].
Soit

$$(1)\ s = f(x,y,z,\ldots.)$$

une fonction homogène et du second degré. Soient de plus

$$(2)\ \varphi(x,y,z,\ldots.),\ \chi(x,y,z,\ldots.),\ \psi(x,y,z,\ldots.),\ \ldots$$

les dérivées partielles de $f(x,y,z,\ldots)$ prises par rapport aux variables $x,y,z,\ldots$ Si l'on assujettit ces variables à l'équation de condition

$$(3)\ x^2+y^2+z^2 + \ldots. = 1$$

les maxima et minima de la fonction s seront déterminées (voir les Leçons sur le Calcul infinitésimal, p.252) par la formule […]

$$(6)\ \frac{1}{2}\varphi(x,y,z,\ldots.)=sx\ ,\ \frac{1}{2}\chi(x,y,z,\ldots.) = sy\ ,\ \frac{1}{2}\psi(x,y,z,\ldots) = sz$$

Soit maintenant *(7)* $S=0$ l'équation que fournira l'élimination des variables $x,y,z,\ldots$ entre les formules (6). Les *maxima et minima* de la fonction $s=f(x,y,z,..)$ ne pourront être que des racines de l'équation (7). D'ailleurs cette équation sera semblable à celle que l'on rencontre dans la théorie des inégalités séculaires des mouvements des planètes, et dont les racines, toutes réelles, jouissent de propriétés dignes de remarque. Quelques unes de ces propriétés étaient déjà connues : nous allons les rappeler ici, et en indiquer des nouvelles. […]

$$(8)\ s = A_{xx}x^2+A_{yy}y^2+A_{zz}z^2+\ldots + 2A_{xy}xy+2A_{xz}xz+\ldots+2A_{yz}yz+ \ldots$$

Les équations (6) deviendront

$$(9)\begin{cases} A_{xx}x + A_{xy}y + A_{xz}z + \ldots = sx, \\ A_{xy}x + A_{yy}y + A_{yz}z + \ldots = sy, \\ A_{xz}x + A_{yz}y + A_{zz}z + \ldots = sz, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

[...]

$$(10)\begin{cases} (A_{xx}-s)x + A_{xy}y + A_{xz}z + \ldots = 0, \\ A_{xy}x + (A_{yy}-s)y + A_{yz}z + \ldots = 0, \\ A_{xz}x + A_{yz}y + (A_{zz}-s)z + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

Cela posé, il résulte des principes établis dans le chapitre III de l'*Analyse algébrique* (§2) que le premier membre de l'équation (8), ou S, sera une fonction alterné des quantités comprise dans le tableau :

$$(11)\begin{cases} A_{xx}-s, & A_{xy}, & A_{xz}, & \ldots, \\ A_{xy}, & A_{yy}-s, & A_{yz}, & \ldots, \\ A_{xz}, & A_{yz}, & A_{zz}-s, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{cases}$$

[…] En opérant ainsi, on trouvera, par exemple, pour $n=2$,

$$(12)\ \ S = (A_{xx}-s)(A_{yy}-s)-A^2_{xy}\ ; […]$$

La première des formules (10) donnera

$$(A_{xx}-s_1)x_1 + A_{xy}y_1 + A_{xz}z_1 + \ldots = 0,\ et\ (A_{xx}-s_2)x_2 + A_{xy}y_2 + A_{xz}z_2 + \ldots = 0,$$

puis l'on en conclura, en éliminant le cœfficient A_{xx},

$$(17)\ (s_2-s_1)x_1x_2 + A_{xy}(x_2y_2-x_1y_2)+A_{xz}(x_2z_1-x_1z_2)+\ldots=0.$$

En raisonnant de la même manière, on tirera de la deuxième des formules (10)

$$(18)\ A_{xy}(y_2x_1-y_1x_2)+(s_2-s_1)y_1y_2 + A_{yz}(y_2z_1-y_1z_2)+\ldots=0.$$

[…] etc. Enfin, si l'on ajoute membre à membre les équations (17), (18), (19), etc., on trouvera

$$(20)\ (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\ldots)(s_2-s_1)=0.$$

Donc, toutes les fois que les racines s_1, s_2 seront inégales entre elles, on aura

$$(21)\ x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\ldots=0\ ;$$

$$(22)\begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2+\ldots=1, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\ldots=0 & x_1x_n+y_1y_n+z_1z_n+\ldots=0, \\ x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1+\ldots=0, & x_2^2+y_2^2+z_2^2+\ldots=1, & x_2x_n+y_2y_n+z_2z_n+\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_nx_1+y_ny_1+z_nz_1+\ldots=0, & x_nx_2+y_ny_2+z_nz_1+\ldots=0, & x_n^2+y_n^2+z_n^2+\ldots=1, \end{cases}$$

[...] Théorème II. – Etant donnée une fonction homogène et du second degré de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, on peut toujours leur substituer d'autres variables ξ, η, ζ,…liées à *x,y,z,*… par des équations linéaires tellement choisies que la somme des carrés de *xy,z,*… soit équivalente à la somme des carrés de ξ; η, ζ,… , et que la fonction donnée de *x,y,z…* se transforme en une fonction de ξ, η, ζ,… homogène et du second degré mais qui renferme seulement les carrés de ξ, η, ζ,… […]
dans le cas particulier où les variables *x,y,z,* sont au nombre de trois seulement, l'équation (7) se réduit à celle qui se représente dans diverses questions de Géométrie et de Mécanique, par exemple, dans la théorie des moments d'inertie ; et le théorème I fournit les règles que j'ai données dans le IIIe volume des *Exercices* comme propres à déterminer les limites des racines de cette équation. Alors aussi les équations (22) sont semblables à celles qui existent entre les cosinus des angles que forment trois axes rectangulaires quelconques avec les axes coordonnés, supposés eux-mêmes rectangulaires, et le théorème II correspond à une proposition de Géométrie, savoir que, par le centre d'une surface, on peut mener trois plans perpendiculaires l'un à l'autre, et dont chacun la divise en deux partie symétriques.

Weierstrass [1858, p 233]. Soit deux fonctions homogènes du second degré Φ, Ψ de *n* variables x_1, x_2,…. , alors il est en général possible, de la représenter de cette même forme

$$\Phi = \theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n$$
$$\Psi = s_1\theta_1+s_2\theta_2+\ldots+s_n\theta_n,$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots,\theta_n$ étant des expressions quadratiques homogènes des $x_1,\ldots x_n$ et $s_1,\ldots$,s_n des constantes.
Si, on note par s une grandeur arbitraire, le déterminant de $s\Phi-\Psi$ par $f'(s)$, alors les valeurs s_i sont des valeurs de *s* pour lesquelles $f(s)=0$.

Conclusion

Camille Jordan "*Sur* la résolution des équations différentielles linéaires " [1871, 313-315]
Dans une des séances de l'hiver dernier, M. Yvon Villarceau a signalé une lacune dans le procédé généralement indiqué pour la solution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants […] .On sait en effet, que l'intégration de ce système dépend de l'équation caractéristique […] mais le cas où cette équation a des racines égales présente une légère difficulté. On connaît en gros le moyen de la résoudre ; mais on n'a pas donné, que nous sachions, une analyse complète et embrassant tous les cas de la question. […] Ce problème peut cependant se résoudre très simplement par un procédé identique à celui dont nous nous sommes servi, dans notre Traité des substitutions, pour ramener une substitution linéaire quelconque à sa forme canonique. Nous allons ramener de même le système (I) à une forme canonique qui puisse s'intégrer immédiatement. […]

$$(5)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=\sigma y_1, \ldots, \dfrac{dy_\nu}{dt}=\sigma y_\upsilon \\ \dfrac{dx_{\nu+1}}{dt}=a'_1\, x_{\nu+1}+\ldots+k'_1\, x_n+\ fonct.(y_1,\ldots,y_\nu), \\ \ldots. \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a'_1\, x_{\nu+1}+\ldots+k'_{n-\nu}\, x_n+\ fonct.(y_1,\ldots,y_\nu), \end{cases}$$

et l'on aura $\Delta=(\sigma-s)^\nu\,\Delta'$, Δ' désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} a'_1 - s & \ldots & k'_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n-\nu} & \ldots & k'_{n-\nu} - s \end{vmatrix}$$

Poursuivant ainsi, on voit que les variables indépendantes peuvent être choisies de telles sorte qu'aux μ racines égales à σ que possède l'équation $\Delta=0$ correspondent μ variables nouvelles formant un certain nombre de séries contenant respectivement r,r',… variables, r+r'+… étant égal à μ, et les variables d'une même série étant liées par une suite de relations de la forme

$$(6)\quad \frac{dy_1}{dt} = \sigma y_1,\quad \frac{dz_1}{dt} = \sigma z_1 + y,\quad \frac{du_1}{dt} = \sigma u_1, + z_{1,\ldots,}\quad \frac{dw_1}{dt} = \sigma w_1 + v_1$$

[…] Soit r le nombre de variables de la série $y_1,\ldots,w_1$; le système des équations (6) aura évidemment pour intégrales le système suivant :

$$w_1 = e^{\sigma t}\psi(t),\ v_1 = e^{\sigma t}\psi'(t),\ldots,\ y_1 = e^{\sigma t}\psi^{r-1}(t),$$

$\psi(t)$ étant une fonction entière arbitraire du degré $r-1$.

Annexes.

La forme canonique des substitutions linéaires.

Jordan, Traité des substitutions, [1870, 127] :

THEOREME. –Soit

$$A = |x,x',\ldots\ ax+bx'+\ldots,\ a'x+b'x'+\ldots,\ldots|$$

une substitution linéaire quelconque à coefficients entiers entre n indices variables chacun de 0 à p-1 ;

Soient F, F', … les facteurs irréductibles de la congruence de degré n

$$\begin{vmatrix} a-K & a' & \ldots \\ b & b-K & \ldots \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{vmatrix} \equiv 0 (\mathrm{mod}.p)$$

*l,l',…*leurs degrés respectifs ; m, *m'*, … leurs degrés de multiplicité ;

On pourra remplacer les n indices indépendants x, x', … par d'autres indices jouissant des propriétés suivantes :

1° Ces indices se partagent en systèmes correspondants aux divers facteurs *F, F',…* et contenant respectivement *lm, l'm',…* indices ;

2° Soient $K_0, K_1, \ldots, K_{t-1}$ les racines de la congruence irréductible $F\equiv 0\ (mod.p)$; les n indices du système correspondant à F se partagent en l séries correspondantes aux racines $K_0, K_1,\ldots,K_{l-1}$ *;*

3° Les indices de la première série de ce système sont des fonctions linéaires des indices primitifs, dont les coefficients sont des entiers complexes formés avec l'imaginaire K_0 ; ils constituent une ou plusieurs suite $y_0, z_0, u_0,\ldots, y'_0, z'_0,\ldots;\ldots$ (*) telles que *A* remplace les indices y_0, z_0, u_0, … d'une même suite respectivement par $K_0y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \ldots$;

4° Les indices de la r+1[ième] série sont les fonctions $y_r, z_r, u_r,\ldots; y'_r, z'_r,\ldots;\ldots$ respectivement conjuguées des précédente, que l'on forme en y remplaçant K_0 par K_r ; *A* les remplace respectivement par $K_ry_r, K_r(z_r+y_r), K_r(u_r+z_r,\ldots;\ldots)$

Cette forme simple

$$\begin{vmatrix} y_0, z_0, u_0,\ldots, y'_0,\ldots & K_0y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0),\ldots, K_0y'_0 \\ y_1, z_1, u_1,\ldots, y'_1,\ldots & K_1y_1, K_1(z_1+y_{10}), K_1(u_1+z_1),\ldots, K_1y'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_0 & K'_0\upsilon_0,\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

à laquelle on peut ramener la substitution *A* par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme canonique.

Les diviseurs élémentaires de Weierstrass.

Weierstrass [1868, p. 19] :

$$P = \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$
$$Q = \Sigma_{\alpha,\beta} B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

[…] Dabei möge, um diesen Ausdruck von *[P,Q]* zu einem völlig bestimmten zu machen, ein Paar besonderer werthe *(g,h)* von *(p,q)*, fur welche *[P,Q]* nicht verschwindet, nach Wilkur angenommen und festgesetzt werden, dass jeder einzelne der gennanten n factoren fur $p=g$, $q=h$ den Werth Eins erhalten soll. [...] Jede Determinante $(n\text{-}x+1)^{ter}$ Ordnung des Systems (2.) kann dargestellt werden als ein Summe, in wlecher jedes einzelne Glied das Product aus einer Determinate $(n\text{-}x)^{ter}$ Ordnung un einem Elemente von *[P,Q]* ist. [...]. $(ap+bq)^l$, [...] möge ein Elementar-Theiler der Determinante von $pP+qQ$ heissen – ein Name, dessen Einführung fie folgenden Untersuchungen rechtfertigen werden.
Hiernach ist, wenn

$$(a_1p+b_1q)^{e1}, (a_2p+b_2q)^{e2}, ..., (a_\rho p+b_\rho q)^{e\rho}$$

sämmtliche Elementar-Theiler von *[P,Q]* sind,

$$[P,Q] = C\, (a_1p+b_1q)^{e1}(a_2p+b_2q)^{e2} \dots (a_\rho p+b_\rho q)^{e\rho}$$

"Es werde surch sie Substitutionen

$$(7)\begin{cases} x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma ,..., x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma \\ y_1 = \sum_\gamma k_{1\gamma} v_\gamma ,..., y_n = \sum_\gamma k_{n\gamma} v_\gamma \end{cases}$$

wo $u_1, \dots, u_n$ und $v_1, \dots, v_n$ neue Veränderliche bedeuten, $h_{11}, ..., h_{nn}, k_{11}, ..., k_{nn}$ aber Constanten, welche keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass die Determinanten

$$(8.) H = \begin{vmatrix} h_{11},...,h_{1n} \\ .... \\ h_{n1},...,h_{nn} \end{vmatrix}, K = \begin{vmatrix} k_{11},...,k_{1n} \\ .... \\ k_{n1},...,k_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sein dürfen, die Form

$P(x_1,...,x_n/y_1,...,y_n)$ in eine andere $P'(u_1,...,u_n/v_1,...,v_n)$;

und zugleich

$Q(x_1,...,x_n/y_1,...,y_n)$ in eine $Q'(u_1,...,u_n/v_1,...,v_n)$

verwandelt ; so stimmen die Determinanten der beiden Formen

$$pP+qQ,\ pP'+qQ'$$

in ihren Elementar-Theilern überein.
Und umgekehrt, wenn zwei Forem-Paare

$$P(x_1,...,x_n/y_1,...,y_n) ,P'(u_1,...,u_n/v_1,...,v_n);$$

und

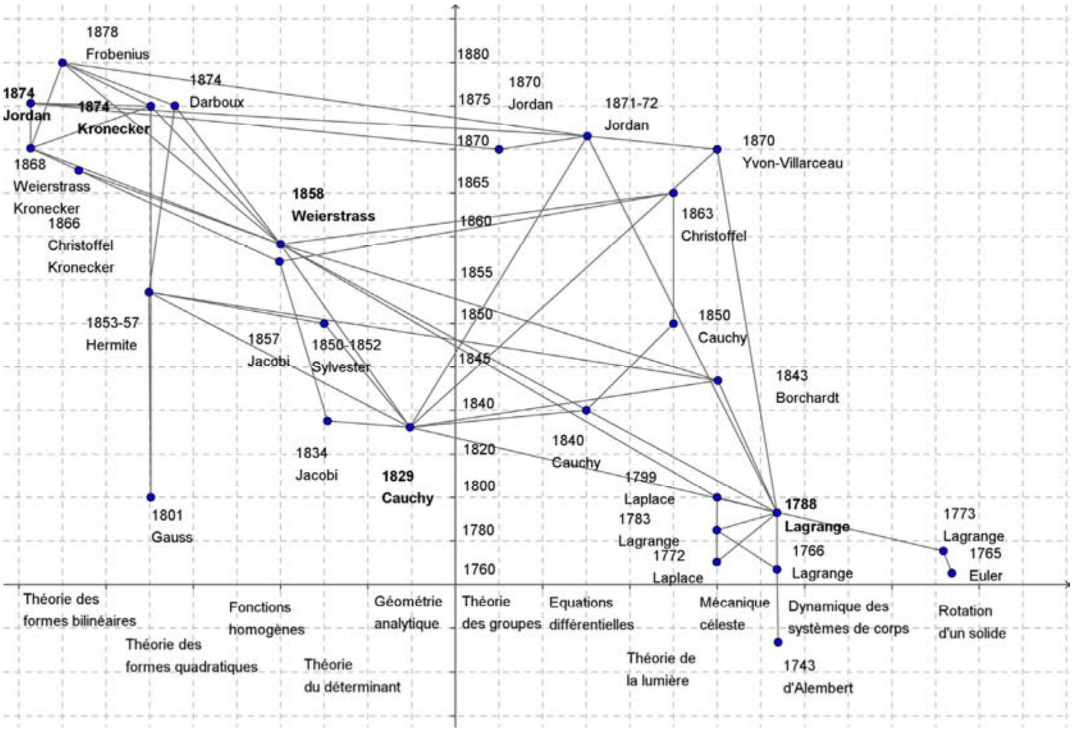
$$Q(x_1,...,x_n/y_1,...,y_n) ,\ Q'(u_1,...,u_n/v_1,...,v_n)$$

gegeben sind, und es stimmen die beiden Determinanten

$$[P,Q], [P',Q']$$

in ihren Elementar-Theilern überein ; so können auch stets die Coefficienten $(h_{11}, ..., h_{nn})$ und $(k_{11}, ..., k_{nn})$ so bestimmt werden, dass durch die unter (7.) angegebenen Substitutionen *P* in *P*' und zugleich *Q* in *Q*' übergeht."

Bibliographie.



BRECHENMACHER F. 2006a *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930)*, Thèse de doctorat, Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales, Paris, 2006. Téléchargeable à l'adresse http://tel.archives-ouvertes.fr/

2006b "Regards croisés sur Camille Jordan." *Matapli*, **78** (juillet 2006), pages 57-67

2006b A controversy and the writing of a history: the discussion of "small oscillations" (1760-1860) from the standpoint of the controversy between Jordan and Kronecker (1874), *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 13 (2006), p. 941-944.

2006d "Les matrices : formes de représentations et pratiques opératoires (1850-1930)." *Site expert des Ecoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Education Nationale* (décembre 2006). http://www.dma.ens.fr/culturemath/. 65 pages.

200? L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766-1874), *Sciences et techniques en perspective*, à paraître en 2007-2008.

200? La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'histoire des mathématiques*, à paraître en 2007-2008.

200 ? Algebraic generality *vs* arithmetic generality in the controversy between C. Jordan and L. Kronecker (1874), in *Perspectives on Generality*, K. Chemla (ed.), 30 pages, à paraître en 2008-2009.

CAUCHY, A.L. 1829 "Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes," *Exer. de math. 4 = Œuvres* (2)9, 174-195.

D'ALEMBERT, J 1758 *Traité de dynamique.* 2de ed. Paris

HAWKINS, T. 1977 "Weierstrass and the Theory of Matrices." *Arch. Hist. Exact Sci.* **17** (2) ,119-161

JORDAN, C. 1871 "Sur la résolution des équations différentielles linéaires", *Comptes rendus Acad, Sci, Paris,* 73, 787-791.Oeuvres IV 313-318

1872 "Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels", *Comptes rendus Acad, Sci, Paris,* 74, 1395-1399.Oeuvres IV 318-323.

	1874a	"Mémoire sur les formes bilinéaires," *Jl. de math. pures et appl.* (2) 19, 35-54.
KRONECKER, L.	1868	Ueber Schaaren quadratischer Formen," ," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* 1 (Leipzig 1895), 163-174
	1874a	"Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen," ," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* 1 (Leipzig & Berlin, 1895), 349-413.
	1874b	"Sur les faisceaux de formes quadratiques et biliinéaires," *Comptes rendus Acad. Sci. Paris.* 78 = *Werke* 1 (Leipzig 1895), 415-419
	1874c.	"Ueber die congruenten Transformationen des bilinearen Formen," ," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* 1 (Leipzig & Berlin, 1929), 421-483.
LAGRANGE, J.L.	1766	"Solutions de différents problèmes de calcul intégral…," *Miscellanea Taurinensia* 3, 1762-65= Lagrange [1867-92, vol.1, 471-668]
	1778	"Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds, et des inclinaisons des orbites des planètes," *Hist. de l'acad. des sciences,* 177 = Lagrange [1867-92 vol. 6, 635-709]
	1784	Théorie des variations séculaires des éléments des planètes ; Seconde Partie," *Nouv. mém. de l'acad. des sciences de Berlin,* 1782 = Lagrange [1867-92, vol. 5, 201-344].
	1788	*Méchanique analytique.* Paris. 2de ed. Paris 1811-15.
LAPLACE, P.S	1775	" Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes," *Mem. de l'acad. des sciences de Paris,* 1772, Partie I = *Œuvres* 8 (Paris, 1891), 325-366.
LASKAR, J.	1992	La stabilité du système solaire, in *Chaos et déterminisme,* sous la direction de A. Dahan Dalmedico, J-L. Chabert, K. Chemla, Paris : Seuil, 1992, p.170-212.
WEIERSTRASS, K.	1858	"Ueber ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem," *M'ber. Akad. der Wiss. Berlin,* 1858 = *Werke 1* (Berlin, 1894), 233-246.
	1868	"Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen," *M'ber. Akad. der Wiss. Berlin,* =Werke 1 (Berlin 1894) 233-246
YVON-VILLARCEAU, A.	1870	"Note sur les conditions des petites oscillations d'un corps solide de figure quelconque et la théorie des équations différentielles linéaires." *Comptes rendus Acad. Sci. Paris* 71. 762-766.