États de Gibbs construits au moyen d'un moment de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie : signification physique et exemples

Charles-Michel Marle

Retraité de l'Université Pierre et Marie Curie (aujourd'hui Sorbonne Université)

7 juin 2021

Sommaire I

Sommaire II

Sommaire III

Hommage à Jean-Pierre Marco.

Français. Je suis heureux de participer à cette rencontre en hommage à Jean-Pierre Marco. Jean-Pierre fut mon élève, mais j'ai tant appris de lui que j'en arrive à me demander si ce n'est pas plutôt moi qui fus son élève ! Toutes les idée qu'il a développées dans son oeuvre scientifique sont les siennes, il ne m'en doit aucune. J'admire sa créativité, son ardeur au travail et sa ténacité, et aussi tout ce qu'il fait pour aider les autres, notamment ses élèves, mais pas seulement. J'espère que ce petit travail l'intéressera. Avec mes sentiments les plus amicaux !

English. I am very pleased to participate in this meeting in tribute to Jean-Pierre Marco. Jean-Pierre was my student, but I learned so much from him that I came to ask myself if it wasn't me who was his student ! All the ideas he developed in his scientific work are his, he owes me none. I admire his creativity, his hard work and tenacity, and everything he does to help others, especially (but not only) his students. I hope he will be interested in this little work. With my friendliest feelings !

Plan.

Français. Après quelques indications sur l'histoire de la Mécanique statistique, je définirai les *états de Gibbs* construits avec le hamiltonien d'un champ de vecteurs défini sur une variété symplectique. J'indiquerai leurs principales propriétés, qui expliquent pourquoi les physiciens les considèrent comme des états d'équilibre thermodynamique.
Puis je parlerai des états de Gibbs construits au moyen d'un moment de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie sur une variété symplectique, étudiés par Jean-Marie Souriau.
English After some indications on the history of Statistical Mechanics, I will define the *Gibbs states* built with the Hamiltonian of a vector field defined on a symplectic manifold. I will indicate their main properties, which explain why physicists consider them as states of thermodynamic equilibrium.

Then I'll talk about Gibbs states built with a moment map of the Hamiltonian action of a Lie group on a symplectic manifold, studied by Jean-Marie Souriau

Plan (2).

Français. Certains scientifiques, notamment Frédéric Barbaresco, ont appelé cette branche des mathématiques *thermodynamique des groupes de Lie de Souriau*. Malgré mon admiration pour Jean-Marie Souriau, je pense que c'est injustifié car cette même idée apparaît clairement dans le livre de Gibbs publié en 1902.

Enfin j'étudierai les états de Gibbs construits sur les orbites coadjointes de $\mathrm{SO}(3)$ et de $\mathrm{SO}(2,1)$ et j'en déduirai les états de Gibbs sur le disque et le demi-plan de Poincaré.

English. Some scientists, including Frédéric Barbaresco, have called this branch of mathematics *Souriau's Lie groups thermodynamics*. Despite my admiration for Jean-Marie Souriau, I think it is unjustified because this same idea already appears clearly in Gibbs' book published in 1902.

Finally I will study the Gibbs states built on the coadjoint orbits of $\mathrm{SO}(3)$ and $\mathrm{SO}(2,1)$ and I will deduce Gibbs states on the Poincaré disk and the Poincaré half-plane.

Mécanique statistique : un peu d'histoire (1).

Français. Dans son livre *Hydrodynamica*, publié en 1738, Daniel Bernoulli explique que les fluides (gaz ou liquides) sont formés par un très grand nombre de très petites particules en mouvement. Pour lui, la pression dans un fluide résulte des chocs de ces particules contre les parois du récipent qui contient le fluide, ou contre la sonde qui mesure la pression.

English. In his book *Hydrodynamica*, published in 1738, Daniel Bernoulli (1700–1782) considered fluids (gases as well as liquids) as made of a very large number of moving particles. He explained that the pressure in the fluid is the result of collisions of the moving particles against the walls of the vessel in which it is contained, or against the probe which measures the pressure.

Mécanique statistique : un peu d'histoire (2)

Français. Dans la seconde moitié du XIX-ème siècle, quelque savants, très minoritaires, notamment Rudolf Clausius (1822–1888), James Clerk Maxwell (1831–1879) et Ludwig Eduardo Boltzmann (1844–1906), ont considéré comme plausible l'idée formulée par Daniel Bernoulli et ont essayé de déduire les propriétés thermodynamiques des fluides (pression, température et autres fonctions thermodynamiques) des équations régissant le mouvement des particules constituant le fluide.

English. In the second half of the XIX-th century, very few scientists, notably Rudolf Clausius (182–1888), James Clerk Maxwell (1831–1879) and Ludwig Eduardo Boltzmann(1844–1906), considered Bernoulli's idea as reasonable, and tried to deduce the macroscopic properties of fluids (such as pressure, temperature and other thermodynamic functions), starting from the equations which govern the motions of the moving particles

Mécanique statistique : un peu d'histoire (3).

Français. À partir des travaux de Clausius, Maxwell et Boltzmann, le grand savant américain Josiah Willard Gibbs (1839–1903) établit les bases d'une nouvelle branche de la Physique, qu'il appela *Mécanique statistique*. Son livre, intitulé *Elementary principles in statistical mechanics, developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics*, fut publié en 1902.

English. Starting from the works of Clausius, Maxwell and Boltzmann, the great American scientist Josiah Willard Gibbs (1839–1903) laid the foundations of a new branch of theoretical Physics, which he called *Statistical Mechanics*. His book, entitled *Elementary principles in statistical mechanics, developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics*, was published in 1902.

Mécanique statistique et champ de vecteurs hamiltoniens (1).

Français. Pour Gibbs, les équations qui régissent le mouvement des particules constituant un liquide, un gaz ou même un solide, sont celles de la mécanique classique. Pour un système conservatif, elles peuvent être formulées dans le cadre de la géométrie symplectique : sur une variété symplectique (M, ω), une fonction différentiable $H : M \to \mathbb{R}$ détermine un champ de vecteurs hamiltonien X_H, vérifiant

$$\mathrm{i}(X_H)\omega = -\mathrm{d}H\,.$$

English. For Gibbs, the equations which govern the motions of particles in a gas, a liquid or even a solid, are those of classical mechanics. For a conservative mechanical system, they can be written in the framework of symplectic geometry : on a symplectic manifold (M, ω), a smooth Hamiltonian $H : M \to \mathbb{R}$ determines a Hamiltonian vector field X_H, such that

$$\mathrm{i}(X_H)\omega = -\mathrm{d}H\,.$$

Mécanique statistique et champ de vecteurs hamiltoniens (2).

Français. Chaque mouvement possible du système considéré est une solution maximale $\varphi : I \to M$ (où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = X_H\bigl(\varphi(t)\bigr)\,.$$

Ce mouvement est entièrement déterminé par sa valeur $\varphi(t_0)$ à un instant initial $t_0 \in I$.

English. Every possible motion of the considered mechanical system is a maximal solution $\varphi : I \to M$ (where I is an open interval of $\mathbb{R}$) of the ordinary differential equation

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = X_H\bigl(\varphi(t)\bigr)\,.$$

This motion is completely determined by its value $\varphi(t_0)$ at any initial time $t_0 \in I$.

États statistiques(1).

Français. La dimension de M est extrèmement grande (au moins $6N$, où N est le nombre de particules) et l'état initial $\varphi(t_0)$ n'est jamais parfaitement bien connu. C'est pourquoi Gibbs utilisa le concept d'*état statistique* : c'est une *mesure de probabilité* sur la tribu (aussi appelée σ-algèbre) de Borel de la variété M.

English. The dimension of M is extremely large (at least $6N$ (where N is the number of particles), and the initial state $\varphi(t_0$ cannot be perfectly known. Therefore Gibbs introduced the concept of *statistical state*, defined as a *probability measure* on the Borel σ-algebra of the manifold M.

États statistiques (2).

Français. Au lieu d'une donnée initiale $\varphi(t_0) \in M$, Gibbs considère donc un état statistique $\mu(t_0)$, ce qui revient à considérer simultanément un grand nombre (éventuellement infini) de mouvements dont les valeurs, à l'instant t_0, sont distribués sur la variété M selon la loi de probabilité $\mu(t_0)$. L'équation du mouvement permet alors de déterminer, pour tout instant t_1 auquel ces mouvements existent, la loi de probabilité $\mu(t_1)$ selon laquelle leurs valeurs à l'instant t_1 sont distribuées sur M.

English. Instead of a single initial position $\varphi(t_0)$ of the system, Gibbs therefore considers simultaneously a large number (maybe even an infinite number) of possible motions whose positions at time t_0 are distributed on M according to the probability law $\mu(t_0)$. Using the differential equation which governs the motions, for any time t_1 at which all these motions exist, one can deduce the probability law $\mu(t_1)$ of the positions of the particles at time t_1.

Mesure de Liouville.

Français. Il existe sur la tribu de Borel de la variété symplectique (M, ω) une unique mesure positive, appelée *mesure de Liouville* et notée λ_ω, telle que pour toute partie bornée mesurable A de M contenue dans le domaine U d'une carte canonique (U, φ) de M,

$$\lambda_\omega(A) = \int_{\varphi(A)} \mathrm{d}q^1 \cdots \mathrm{d}q^n \mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_n \,.$$

English. The Borel σ-algebra of the symplectic manifold (M, ω) is endowed with a unique positive measure, called the *Liouville measure*, denoted by λ_ω, such that that for any bounded measurable subset A of M contained in the domain U of a canonical chart (U, φ) of M,

$$\lambda_\omega(A) = \int_{\varphi(A)} \mathrm{d}q^1 \cdots \mathrm{d}q^n \mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_n \,.$$

Densité de probabilité.

Français. Les états statistiques considérés seront le plus souvent de la forme $\mu = \rho\lambda_\omega$, où ρ est une fonction définie et intégrable sur M, à valeurs ≥ 0, appelée *densité de probabilité* de l'état μ. Cette fonction vérifie

$$\int_M \rho(x)\lambda_\omega(\mathrm{d}x) = 1\,.$$

English. We will mainly consider statistical states μ which can be written as $\mu = \rho\lambda_\omega$, where ρ is an integrabe function on M, whose values are ≥ 0. The function ρ is called the *probability density* of the statistical state μ. Of course it satisfies

$$\int_M \rho(x)\lambda_\omega(\mathrm{d}x) = 1\,.$$

Valeur moyenne d'une fonction.

Français. Soit μ un état statistique et f une fonction mesurable définie sur M, à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un espace vectoriel de dimension finie. Lorsque cette fonction est intégrable relativement à la mesure μ, son intégrale est appelée *valeur moyenne de f dans l'état statistique* μ. Notée $\mathcal{E}_\rho(f)$ lorsque μ a pour densité ρ, elle a pour expression

$$\mathcal{E}_\rho(f) = \int_M f(x)\rho(x)\lambda_\omega(\mathrm{d}x)\,.$$

English. Let μ be a statistical state and f be a measurable function on M, taking its values in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ or in a finite-dimensional vector space. When f is integrable with respect to μ, the value of its integral is called the *mean value of f in the state* μ. Denoted by $\mathcal{E}_\rho(f)$ when $\mu = \rho\lambda_\omega$, its expression is

$$\mathcal{E}_\rho(f) = \int_M f(x)\rho(x)\lambda_\omega(\mathrm{d}x)\,.$$

Définition de l'entropie.

Français. On appelle *entropie* d'un état statistique de densité ρ, et on note $s(\rho)$, la valeur moyenne, pour cet état, de la fonction $-\log(\rho)$. Son expression est donnée par l'intégrale ci-dessous, avec les conventions suivantes : $0\log(0) = 0$, et si l'intégrale exprimant $s(\rho)$ diverge, on pose $s(\rho) = -\infty$.

English. The *entropy* of a statistical state of density ρ, denoted by $s(\rho)$, is the mean value, for this state, of the function $-\log(\rho)$. It is expressed by the integral below, where by convention $0\log(0) = 0$. When this integral diverges, we set $s(\rho) = -\infty$.

$$s(\rho) = \int_M \Bigl(-\log\bigl(\rho(x)\bigr)\Bigr)\rho(x)\lambda_\omega(\mathrm{d}x)\,.$$

Fonction de partition et états de Gibbs construits avec le hamiltonien.

Français. On appelle *état de Gibbs construit avec le hamiltonien H, indexé par $\beta \in \mathbb{R}$*, l'état statistique de densité

$$\rho_\beta(x) = \frac{1}{P(\beta)} \exp\bigl(-\beta H(x)\bigr)\,, \text{ où } P(\beta) = \int_M \exp\bigl(-\beta H(x)\bigr) \lambda_\omega(\mathrm{d}x)\,.$$

Le réel β doit être tel que l'intégrale qui définit $P(\beta)$ soit normalement convergente. P est appelée *fonction de partition*.

English. The *Gibbs state built with the Hamiltonian H, indexed by $\beta \in \mathbb{R}$*, is the statistical state of density

$$\rho_\beta(x) = \frac{1}{P(\beta)} \exp\bigl(-\beta H(x)\bigr)\,, \text{ where } P(\beta) = \int_M \exp\bigl(-\beta H(x)\bigr) \lambda_\omega(\mathrm{d}x)\,.$$

The real β must be such that the integral which defines $P(\beta)$ is normally convergent. P is called *the partition function*.

Propriétés des états de Gibbs construits avec le hamiltonien.

Français. Un état de Gibbs de densité ρ_β construit avec le hamiltonien H est un *état stationnaire* : le flot du champ de vecteurs hamiltonien X_H le laisse invariant. De plus, pour tout autre état statistique de densité ρ continue, pour lequel la valeur moyenne $\mathcal{E}_\rho(H)$ est égale à $\mathcal{E}_{\rho_\beta}(H)$, l'entropie vérifie

$$s(\rho) \leq s(\rho_\beta)\,, \text{ et } s(\rho) = s(\rho_\beta) \text{ si et seulement si } \rho = \rho_\beta\,.$$

English. A Gibbs state of density ρ_β built with the Hamiltonian H is a *stationary state* : the flow of the Hamiltonian vector field X_H leaves it unchanged. Moreover for any other statistical state with a continuous density ρ such that the mean value $\mathcal{E}_\rho(H)$ is equal to $\mathcal{E}_{\rho_\beta}(H)$, the entropy satisfies

$$s(\rho) \leq s(\rho_\beta)\,, \text{ and } s(\rho) = s(\rho_\beta) \text{ if and only if } \rho = \rho_\beta\,.$$

États de Gibbs et équilibres thermodynamiques (1).

Français. Pour ces raisons, les états de Gibbs construits avec le hamiltonien sont considérés par les physiciens comme des *états d'équilibre thermodynamique*. Pour un tel état statistique, le réel β est lié à la température absolue T du système par la relation

$$\beta = \frac{1}{kT} ,$$

où k est la *constante de Boltzmann*.

English. For these reasons, Gibbs states built with the Hamiltonian are considered in Physics as *states of thermodynamic equilibrium*. For each such state, the real β is related to the absolute temperature T by

$$\beta = \frac{1}{kT} ,$$

where k is the *Boltzmann constant*.

États de Gibbs construits avec le hamiltonien et équilibres thermodynamiques (2).

Français. Outre la température absolue, on peut alors définir diverses *fonctions thermodynamiques*, qui toutes s'expriment au moyen de la fonction de partition P et de ses dérivées partielles. Par exemple, l'*énergie* du système est la valeur moyenne du hamiltonien H, son *entropie* est l'entropie $s(\rho_\beta)$ de l'état de Gibbs considéré.

English. The absolute temperature linked to β as explained above, is of course a *thermodynamic function* of the system. Various other thermodynamic functions can be defined, which all can be expressed in terms of the partition function P and its partial derivatives. The *energy* of the system is the mean value of H, its *entropy* is the entropy $s(\rho_\beta)$ of the considered Gibbs state.

Insuffisance de la mécanique statistique classique appliquée à un champ de vecteurs hamiltonien (1).

Français. Il est facile de vérifier que l'entropie d'un état statistique dont l'évolution est décrite par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien, avec un hamiltonien ne dépend pas directement du temps, reste reste constante. Appliquée à un champ de vecteurs hamiltonien, la mécanique statistique classique ne permet donc pas de décrire l'évolution de l'état d'un système réel isolé vers un état d'équilibre thermodynamique.

English. One can easily prove that the entropy of a statistical state whose evolution with time is described by the flow of a Hamiltonian vector field, with a Hamiltonian which does not directly depend on time, remains constant. Classical statistical mechanics with a Hamiltonian vector field is therefore unable to account for the evolution of the state of a real isolated system towards a state of thermodynamic equilibrium.

Insuffisance de la mécanique statistique classique appliquée à un champ de vecteurs hamiltonien (2).

Français. Par contre, la fonction H (lettre grecque êta majuscule) de la théorie cinétiqu des gaz, qui n'est autre que l'*opposé* de l'entropie d'un état statistique, est monotone décroissante. Cela s'explique par le fait que l'équation de Boltzmann n'est pas une équation différentielle associée à un champ de vecteurs hamiltonien, l'opérateur de collisions résultant de considérations probabilistes sur la manière dont les collisions entre particules ont lieu.

English. Contrarily, the H function (boldface Greek letter êta) in the kinetic theory of gases, which is nothing else than the *opposite* of the entropy of a statistical state, is always monotonously decreasing with time. The reason of this more satisfactory behaviour is that Boltzmann's equation is not a differential equation associated to a Hamiltonian vector field : the collision operator is built with probabilistic considerations about the way in which collisions between particles occur.

La “mécanique statistique quantique” est-elle plus satisfaisante ?

Français. De nombreux physiciens estiment que la mécanique quantique, qui par nature est statistique, est bien plus satisfaisante. On peut cependant remarquer qu'elle prévoit une évolution parfaitement déterministe d'un état statistique tant qu'aucune mesure concernant cet état n'est faite. Pour des systèmes complexes très organisés, tels que les êtres vivants, cela conduit à des paradoxes assez déconcertants, comme celui du chat de Schrödinger à la fois vivant et mort.

English. Many physicists think that quantum mechanics, which by its nature is statistical, is much more satisfying. However, one may observe that in quantum mechanics, the evolution of a statistical state is governed by a perfectly deterministic equation as long as no measure concerning this state is made. For highly organized complex systems such as living creatures, this leads to very disturbing paradoxes, for example Schrödinger's cat which simultaneously is living and dead.

États de Gibbs et moment. Préliminaires (1)

Français. Le mathématicien et physicien Jean-Marie Souriau (1922–2012) s'est intéressé, tout d'abord dans un article datant de 1966, puis dans son livre publié en 1969, aux états de Gibbs construits au moyen d'un moment de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie sur une variété symplectique, et aux fonctions thermodynamiques associées. Dans plusieurs publications ultérieures, il en a envisagé des applications en Physique et en Cosmologie.

English. The French mathematician and physicist Jean-Marie Souriau (1922–2012) considered, first in a 1966 paper, then in his book published in 1969, Gibbs states on a symplectic manifold built with the moment map of the Hamiltonian action of a Lie group on a symplectic manifold, and the associated thermodynamic functions. In several later papers he developed these concepts and considered their possible applications in Physics and in Cosmology.

États de Gibbs et moment. Préliminaires (2)

Français. Plus récemment, sous le nom *thermodynamique des groupes de Lie de Souriau*, ces états de Gibbs et les fonctions thermodynamiques qui leur sont associées ont été considérés par plusieurs scientifiques, notamment Frédéric Barbaresco, pour leurs applications possibles dans divers domaines très en vogue tels que la *théorie géométrique de l'information*, l'*apprentissage profond* et l'*apprentissage automatique*.

English. Recently, under the name *Souriau's Lie groups thermodynamics*, these Gibbs states and the associated thermodynamic functions were considered by several scientists, notably by Frédéric Barbaresco, for their possible applications in today very fashionable scientificc topics, such as *geometric information theory*, *deep learning* and *machine learning*.

États de Gibbs et moment. Préliminaires (3)

Français. Ces états de Gibbs sont une généralisation naturelle de ceux construits avec le hamiltonien d'un champ de vecteurs, puisque ce hamiltonien peut être considéré comme un moment de l'action hamiltonienne locale du groupe des translations du temps. Ils ont d'ailleurs été déjà considérés par Gibbs dans son livre datant de 1902, pour l'action hamiltonienne du produit du groupe des translations du temps et du groupe des rotations de l'espace physique autour d'un de ses points.

English. These Gibbs states generalize very naturally those built with the Hamiltonian of a vector field, since the Hamiltonian can be considered as a moment map of the local Hamiltonian action of the group of translations in time. Gibbs already considered such Gibbs states in his 1902 book, for the Hamiltonian action of the direct product of two groups : the group of translations in time and the group of rotations of the physical space around one of its points.

États de Gibbs et moment. Préliminaires (4)

Français. Dans ce domaine, le mérite principal de Souriau est, à mon avis, non pas la considération d'états de Gibbs construits avec un moment de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie, puisque l'idée n'est pas si neuve, mais plutôt l'emploi de l'*espace des mouvements* d'un système mécanique au lieu de l'emploi de son *espace des phases*, et ce qu'il appelle le *principe de Maxwell*, c'est-à-dire l'existence d'une structure symplectique sur l'espace des mouvements des systèmes tant de la mécanique classique que de la physique relativiste.

English. In this domain, Souriau's main merits do not lie, in my opinion, in the consideration of Gibbs states for the Hamiltonian action of a Lie group, a not so new idea, but rather in the use of the *manifold of motions* of a Hamiltonian system instead of the use of its *phase space*, and his introduction, under the name of *Maxwell's principle*, of the idea that a symplectic structure should exist on the manifold of motions of systems encountered as well in classical Mechanics as in relativistic Physics.

États de Gibbs et moment. Quelques définitions.

Français. Dans ce qui suit $\Phi : G \times M \to M$ est une action hamiltonienne à gauche d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique connexe (M, ω). On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g}^*$ son dual et $J : M \to \mathfrak{g}^*$ un moment de l'action hamiltonienne Φ. Une *température généralisée* est un élément $\beta \in \mathfrak{g}$ tel que l'intégrale au membre de droite de l'égalité ci-dessous soit normalement convergente.

$$P(\beta) = \int_M \exp\bigl(-\langle J(x), \beta\rangle\bigr)\lambda_\omega(\mathrm{d}x)$$

English. In what follows, $\Phi : G \times M \to M$ is a Hamiltonian action on the left of a Lie group G on a connected symplectic manifold (M, ω), $\mathfrak{g}$ is the Lie algebra of G, $\mathfrak{g}^*$ its dual and $J : M \to \mathfrak{g}^*$ is a moment map of the Hamiltonian action Φ. A *generalized temperature* is an element $\beta \in \mathfrak{g}$ for which the integral in the right hand side of the above equality is normally convergent.

États de Gibbs et moment. Quelques définitions (2).

Français. Lorsque l'ensemble $\Omega \subset \mathfrak{g}$ des températures généralisées est non vide la fonction $P : \Omega \to \mathfrak{g}^*$ définie par l'égalité ci-dessus est appelée *fonction de partition*.
Pour chaque température généralisée $\beta \in \Omega$, on appelle *état de Gibbs associé à (ou indexé par)* β l'état statistique sur M de densité

$$\rho_\beta(x) = \frac{1}{P(\beta)} \exp\bigl(- \langle J(x), \beta \rangle \bigr) \,, \quad x \in M \,.$$

English. When the subset $\Omega \subset \mathfrak{g}$ of generalized temperatures is not empty, the function $P : \Omega \to \mathfrak{g}^*$ defined by the above equality is called the *partition function*.
For each generalized temperature $\beta \in \Omega$, the *Gibbs state associated to (or indexed by)* β is the statistical state on M whose probability density is

$$\rho_\beta(x) = \frac{1}{P(\beta)} \exp\bigl(- \langle J(x), \beta \rangle \bigr) \,, \quad x \in M \,.$$

États de Gibbs et moment. Quelques propriétés (1).

Français. L'ensemble $\Omega \subset \mathfrak{g}$ des températures généralisées ne dépend pas du choix du moment J. Lorsque $\Omega \neq \emptyset$, c'est un ouvert convexe de $\mathfrak{g}$ invariant par l'action adjointe de G. La fonction de partition P est de classe C^∞ et ses différentielles de tous ordres peuvent être calculées par différentiation sous le signe d'intégration $\int$.

English. The set $\Omega \subset \mathfrak{g}$ of generalized temperatures does not depend on the choice of the moment map J. When it is not empty, this set is an open convex subset of the Lie algebra $\mathfrak{g}$, invariant by the adjoint action of G. The partition function P is of class C^∞ and its differentials of all orders can be calculated by differentiation under the integration sign $\int$.

États de Gibbs et moment. Quelques propriétés (2).

Français. Dans l'état de Gibbs indexé par $\beta \in \Omega$, la valeur moyenne de J, notée $E_J(\beta)$, et l'entropie $S(\beta)$ sont des fonctions thermodynamiques dont les expressions sont

$$E_J(\beta) = \frac{1}{P(\beta)} \int_M J(x) \exp\bigl(-\langle J(x), \beta\rangle\bigr) \lambda_\omega(\mathrm{d}x)\,, \quad S(\beta) = s(\rho_\beta)\,.$$

Ce sont des fonctions de classe C^∞ de β, qui peuvent être exprimées au moyen de P et de ses différentielles.

English. In the Gibbs state indexed by $\beta \in \Omega$, the mean value of J, denoted by $E_J(\beta)$, and the entropy $S(\beta)$ are thermodynamic functions whose expressions are

$$E_J(\beta) = \frac{1}{P(\beta)} \int_M J(x) \exp\bigl(-\langle J(x), \beta\rangle\bigr) \lambda_\omega(\mathrm{d}x)\,, \quad S(\beta) = s(\rho_\beta)\,.$$

They are functions of β of class C^∞ on Ω and can be expressed in terms of the partition function P and its differentials.

États de Gibbs et moment. Quelques propriétés (3).

Français. Les expressions des fonctions thermodynamiques E_J, S et de leurs différentielles sont indiquées ci-dessous.

English. The thermodynamic functions E_J, S and their first differentials are expressed below.

$$
\begin{aligned}
E_J(\beta) &= -\frac{1}{P(\beta)} DP(\beta) = -D(\log P)(\beta)\,,\\
S(\beta) &= \log P(\beta) + \langle E_J(\beta), \beta \rangle = \log P(\beta) - \langle D(\log P)(\beta), \beta \rangle\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle DE_J(\beta)(X), Y \rangle &= -D^2(\log P)(\beta)(X, Y)\,, \quad X \in \mathfrak{g}\,,\ Y \in \mathfrak{g}\,,\\
\langle DS(\beta), X \rangle &= \langle DE_J(\beta)(X), \beta \rangle\,, \quad X \in \mathfrak{g}\,.
\end{aligned}
$$

États de Gibbs et moment. Quelques propriétés (4).

Français. Si l'on remplace le moment J par $J_1 = J + \mu$, où $\mu \in \mathfrak{g}^*$ est constant, l'ensemble Ω des températures généralisées n'est pas modifié. La fonction de partition P et les fonctions thermodynamiques E_J et S sont remplacées, respectivement, par P_1, E_{J_1} et S_1 dont les expressions sont

$$P_1(\boldsymbol{\beta}) = \exp\bigl(-\langle \mu, \boldsymbol{\beta}\rangle\bigr) P(\boldsymbol{\beta})\,, \quad E_{J_1}(\boldsymbol{\beta}) = E_J(\boldsymbol{\beta}) + \mu\,, \quad S_1(\boldsymbol{\beta}) = S(\boldsymbol{\beta})\,.$$

Pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \Omega$, la densité $\rho_{\boldsymbol{\beta}}$ de l'état de Gibbs indexé par $\boldsymbol{\beta}$ n'est pas modifiée.

English. If the moment map J is replaced by $J_1 = J + \mu$, where $\mu \in \mathfrak{g}^*$ is a constant, the set Ω of generalized temperatures is not changed. The partition function P, the thermodynamic functions E_J and S are replaced by P_1, E_{J_1} and S_1, whose expressions are

$$P_1(\boldsymbol{\beta}) = \exp\bigl(-\langle \mu, \boldsymbol{\beta}\rangle\bigr) P(\boldsymbol{\beta})\,, \quad E_{J_1}(\boldsymbol{\beta}) = E_J(\boldsymbol{\beta}) + \mu\,, \quad S_1(\boldsymbol{\beta}) = S(\boldsymbol{\beta})\,.$$

For each $\boldsymbol{\beta} \in \Omega$, the probability density $\rho_{\boldsymbol{\beta}}$ if the Gibbs state indexed by $\boldsymbol{\beta}$ is unchanged.

États de Gibbs et moment. Quelques propriétés (5).

Français. Tout comme les états de Gibbs construits avec un hamiltonien, les états de Gibbs construits avec un moment d'une action hamiltonienne vérifient la propriété suivante. Pour tout autre état statistique de densité continue ρ_1 tel que la valeur moyenne du moment J dans ce état statistique soit égale à $E_J(\boldsymbol{\beta})$, la fonctionnelle entropie vérifie l'inégalité $s(\rho_1) \leq s(\rho_{\boldsymbol{\beta}}) = S(\boldsymbol{\beta})$, et on a l'égalité $s(\rho_1) = s(\rho_{\boldsymbol{\beta}})$ si et seulement si $\rho_1 = \rho_\beta$.

English. Exactly as Gibbs states built with a Hamiltonian, Gibbs states built with a moment map of a Hamiltonian action satisfy the following property. For any other statistical state with a continuous probability density ρ_1, such that the mean value of the moment map J in this statistical state is equal to $E_J(\boldsymbol{\beta})$, the entropy functional s satisfies the inequality $s(\rho_1) \leq s(\rho_{\boldsymbol{\beta}}) = S(\boldsymbol{\beta})$, and the equality $s(\rho_1) = s(\rho_{\boldsymbol{\beta}})$ occurs if and only if $\rho_1 = \rho_\beta$.

États de Gibbs et moment. Quelques propriétés (6).

Français. L'état de Gibbs indexé par un élément $\beta \in \Omega$ n'est en général pas invariant par l'action hamiltonienne Φ du groupe de Lie G sur la variété M. Il est cependant invariant par la restriction de l'action Φ au sous-groupe à un paramètre engendré par β. On a en effet, pour tous $s \in \mathbb{R}$, $x \in M$,

$$\rho_\beta\Big(\Phi\big(\exp(s\beta), x\big)\Big) = \rho_\beta(x)\,.$$

English. The Gibbs states indexed by an element $\beta \in \Omega$ is not in general invariant by the Hamiltonian action Φ of the Lie group G on M. However, it is invariant by the restriction of Φ to the one-parameter subgoup of G genrated by β. We have indeed, for any $s \in \mathbb{R}$ and any $x \in M$,

$$\rho_\beta\Big(\Phi\big(\exp(s\beta), x\big)\Big) = \rho_\beta(x)\,.$$

États de Gibbs et moment. Quelques propriétés (7).

Français. Pour tout $\beta \in \Omega$, X et $Y \in \mathfrak{g}$, posons

$$\Gamma(\beta)(X,Y) = -\big\langle DE_J(\beta)(X), Y\big\rangle = D^2(\log P)(\beta)(X,Y)\,.$$

Γ est une forme bilinéaire symétrique sur Ω vérifiant, pour tous $\beta \in \Omega$ et $X \in \mathfrak{g}$, $\Gamma(\beta)(X,X) \geq 0$. Lorsque l'action Φ est *effective*, c'est-à-dire lorsque, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la fonction $x \mapsto \big\langle J(x), X\big\rangle$ n'est pas constante sur M, Γ est une *métrique riemannienne* sur Ω, appelée *métrique de Fisher-Rao*, et E_J est un difféomorphisme de Ω sur un ouvert Ω^* de $\mathfrak{g}^*$.

English. For each $\beta \in \Omega$, X and $Y \in \mathfrak{g}$, we set

$$\Gamma(\beta)(X,Y) = -\big\langle DE_J(\beta)(X), Y\big\rangle = D^2(\log P)(\beta)(X,Y)\,.$$

Γ is a bilinear, symmetric form on Ω which, for all $\beta \in \Omega$ and $X \in \mathfrak{g}$, satisfies $\Gamma(\beta)(X,X) \geq 0$. When Φ is *effective*, *i.e.* when for any $X \in \mathfrak{g}$, $x \mapsto \big\langle J(x), X\big\rangle$ is not constant on M, Γ is a *Riemannian metric* on Ω called the *Fisher-Rao metric*, and E_J is a diffeomorphism of Ω onto an open subset Ω^* of $\mathfrak{g}^*$.

États de Gibbs, moment et action adjointe.

Français. Rappelons qu'au moment $J : M \to \mathfrak{g}^*$ est associée un *cocycle symplectique* $\theta : G \to \mathfrak{g}^*$ tel que

$$J\bigl(\Phi(g,x)\bigr) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\bigl(J(x)\bigr) + \theta(g)\,,\ x \in M\,,\ g \in G\,.$$

Pour tous $\beta \in \Omega \subset \mathfrak{g}$ et $g \in G$, on a $\mathrm{Ad}_g \beta \in \Omega$, et

$$P(\mathrm{Ad}_g \beta) = \exp\Bigl(\langle \theta(g^{-1}), \beta\rangle\Bigr) P(\beta) = \exp\Bigl(-\langle \mathrm{Ad}^*_g \theta(g), \beta\rangle\Bigr) P(\beta)\,,$$
$$E_J(\mathrm{Ad}_g \beta) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} E_J(\beta) + \theta(g)\,, \quad S(\mathrm{Ad}_g \beta) = S(\beta)\,.$$

English. We recall that a *symplectic cocycle* $\theta : G \to \mathfrak{g}^*$ is associated to the moment map J which satisfies, for all $x \in M$ and $g \in G$,

$$J\bigl(\Phi(g,x)\bigr) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\bigl(J(x)\bigr) + \theta(g)\,,\ x \in M\,,\ g \in G\,.$$

For all $\beta \in \Omega \subset \mathfrak{g}$ and $g \in G$, we have $\mathrm{Ad}_g \beta \in \Omega$. Then, $P(\mathrm{Ad}_g \beta)$, $E_J(\mathrm{Ad}_g \beta)$ and $S(\mathrm{Ad}_g \beta)$ are given by the above formulae.

Applications en Mécanique et en Physique (1).

Français.

Sur la *variété des mouvements* d'un système hamiltonien conservatif, les états de Gibbs construits avec le hamiltonien sont considérés, en Physique, comme des *états d'équilibre thermodynamique* du système. Le hamiltonien est un *moment* de l'action hamiltonienne du groupe des translations du temps, qui est un sous-groupe de Lie (à un paramètre) du *groupe de Galilée*. Jean-Marie Souriau fait remarquer que ce sous-groupe *n'est pas* un sous-groupe invariant (c'est-à-dire normal, ou distingué).

English. On the *manifold of motions* of a conservative Hamilonian system, the Gibbs states built with the Hamiltonian are considered by physicists as *states of thermodynamic equilibrium* of the system. The Hamiltonian is a *momentum map* of the Hamiltonian action of the group of time translations, which is a (one-parameter) Lie subgroup of the *Galilei group*. Jean-Marie Souriau observed that this subgroup *is not an invariant subgroup (i.e. a normal subgroup)*.

Applications en Mécanique et en Physique (2).

Français. Jean-Marie Souriau propose, comme un principe de ce qu'il appelle la *Mécanique statistique covariante*, l'énoncé suivant : *Si un système dynamique est invariant par un sous-groupe de Lie du groupe de Galilée, les équilibres naturels de ce système sont les états de Gibbs construits avec un moment de l'action hamiltonienne de ce sous-groupe.*
Il traite le cas général puis présente plusieurs exemples : vent, fusée accélérée, centrifugeuse.

English. Jean-Marie Souriau proposed as a new principle of what he calls *covariant statistical Mechanics* the following statement : *When a Lie subgroup of the Galilei group is the group of invariance of a dynamical system, the natural equilibria of this system are the Gibbs states built with a momentum map of the Hamiltonian action of that subgroup.*
He presents several examples obtained by application of this principle : wind, accelerated rocket, centrifuge.

Applications en Mécanique et en Physique (3).

Français. La variété des mouvements d'un système mécanique isolé admet le groupe de Galilée tout entier comme groupe de symétries. L'application du principe énoncé ci-dessus se heurte à une difficulté : ainsi que l'a prouvé Jean-Marie Souriau lui-même, si la masse totale du système est non nulle, il n'existe pas d'état de Gibbs construit avec un moment de l'action hamiltonienne du groupe de Galilée, car l'ensemble Ω des températures généralisées est vide.

English. The group of symmetries of the manifold of motions of an isolated mechanical system is the whole Galilei group. The above principle cannot be applied, since, as proven by Souriau himself, at least when the total mass of the system is not zero, no Gibbs state can be built with a moment map of the Hamiltonian action of the Galilei group, the set Ω of generalized temperatures being empty.

Applications en Mécanique et en Physique (4).

Français. Pour cette raison, Jean-Marie Souriau propose de considérer la *variété des mouvements propres* d'un système isolé, formée par les mouvements dans lesquels le centre de masse est fixé à l'origine, dans le référentiel inertiel considéré. Le groupe de symétries de cette variété est le produit direct du groupe des translations du temps (isomorphe à $\mathbb{R}$) et du groupe des rotations de l'espace autour d'un point fixe (isomorphe à $\mathrm{SO}(3)$). C'est le groupe considéré par Gibbs dans son livre publié en 1902 !

English. Jean-Marie Souriau proposed to consider the *manifold of proper motions* of an isolated system, made by motions in which the position of the center of mass is fixed at the origin, in the considered reference frame. Its group of symmetries is the direct product ot the group of time trabnsations (isomorphic to $\mathbb{R}$) with the group of rotations of space around the origin (isomorphic to $\mathrm{SO}(3)$). Il is exactly the group considered by Gibbs in his book published in 1902 !

Applications en Mécanique et en Physique (5).

Français. Souriau considère l'existence, dans l'univers, de nombreux objets tournants (étoiles, systèmes planétaires, galaxies) comme une preuve de la pertinence de l'approche qu'il propose. Ces objets tournants seraient les équilibres naturels du système isolé considéré (approximativement seulement, en raison de ll'existence de phénomènes, tels que les réactions nucléaires dans les étoiles, qui empêchent l'existence d'équilibres parfaits).

English. For Souriau, the existence in the Universe of many rotating bodies (stars, planetary systems, galaxies) comforts the validity of his approach. For him, these rotating bodies are the natural equilibria of the considered isolated systems. Of course, approximately only, since other phenomena such as nuclear reactions in stars, prevent the realization of exact equilibria.

Applications en Mécanique et en Physique (6).

Français. En Physique relativiste, le groupe des symétries de la variété des mouvements d'un système isolé est le groupe de Poincaré. Bien que la cohomologie symplectique de ce groupe soit triviale, il n'existe pas d'état de Gibbs construit avec un moment de son action. Souriau présente, dans son livre et ses publications ultérieurs, plusieurs exemples d'états de Gibbs construits avec un moment de l'action hamiltonienne de certains de ses sous-groupes et envisage leurs applications en Cosmologie.

English. In relativistic Physics, the symmetry group of the manifold of motions of an isolated dynamical system is the Poincaré group. Although the symplectic cohomology of this group is trivial, there is no Gibbs state built vith a moment map of its Hamiltonian action. In his book and in some more recent papers, Souriau presents Gibbs states built vith a moment map of some of its subgroups and discusses their possible applications in Cosmology.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (1).

Français. Nous allons étudier les états de Gibbs sur les orbites coadjointes des groupes de Lie $\mathrm{SO}(3)$ et $\mathrm{SO}(2,1)$ construits avec un moment de l'action coadjointe de ces groupes. Soit ζ un réel pouvant prendre les valeurs $+1$ ou -1, et $\mathbf{F}$ un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'un produit scalaire noté $(\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, où $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}\in\mathbf{F}$, de signature $(+,+,+)$ lorsque $\zeta=+1$, $(+,+,-)$ lorsque $\zeta=-1$. Une base $(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$ de $\mathbf{F}$ est dite *orthonormale* lorsque

$$\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_x=\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_y=1\,,\ \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_z=\zeta\,,\ \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_y=\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_z=\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_x=0.$$

English. We are going to study Gibbs states on coadjoint orbits of the Lie groups $\mathrm{SO}(3)$ and $\mathrm{SO}(2,1)$ built with a moment map of the coadjoint action of these groups. Let ζ be a real integer whose value is either $+1$ or -1, and $\mathbf{F}$ be a three-dimensional real vector space endowed with a scalar product $\mathbf{F}\times\mathbf{F}\to\mathbb{R}$, denoted by $(\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, with $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}\in\mathbf{F}$, whose signature is $(+,+,+)$ when $\zeta=1$ and $(+,+,-)$ when $\zeta=-1$. A basis $(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$ of $\mathbf{F}$ is said to be *orthonormal* when

$$\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_x=\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_y=1\,,\ \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_z=\zeta\,,\ \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_y=\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_z=\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_x=0.$$

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (2).

Français. Lorsque $\zeta = -1$, $\mathbf{F}$ est un *espace de Minkowski* de dimension 3. Un élément non nul $\mathbf{v} \in \mathbf{F}$ est *de genre espace* lorsque $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$, *de genre temps* lorsque $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} < 0$ and *de genre lumière* lorsque $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. Le sous-ensemble de $\mathbf{F}$ formé par les éléments non nuls de genre temps ou lumière a deux composantes connexes. Choisir une *orientation temporelle* de $\mathbf{F}$, c'est choisir une de ces deux composantes connexes, dont les éléments seront dits *dirigés vers le futur*, et ceux de l'autre composante connexe *dirigés vers le passé*.

English. When $\zeta = -1$, $\mathbf{F}$ is called a *three-dimensional Minkowski vector space*. A non-zero element $\mathbf{v} \in \mathbf{F}$ is said to be *space-like* when $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$, *time-like* when $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} < 0$ and *light-like* when $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. The subset of $\mathbf{F}$ made of non-zero time-like or light-like elements has two connected components. A *temporal orientation* of $\mathbf{F}$ is the choice of one of these two connected components, whose elements are said to be *directed towards the future*, and those of the other connected component *directed towards the past*.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (3).

Français. Tant lorsque $\zeta = 1$ que lorsque $\zeta = -1$, nous supposerons dans la suite qu'une *orientation* de $\mathbf{F}$, au sens usuel, a été choisie, et lorsque $\zeta = -1$, nous supposerons de plus qu'une *orientation temporelle* de $\mathbf{F}$ a été choisie aussi. Les bases orthonormées de $\mathbf{F}$ utilisées seront toujours *positivement orientées* et, lorsque $\zeta = -1$, leur troisième vecteur $\mathbf{e}_z$ sera toujours choisi *de genre temps dirigé vers le futur*. Ces bases seront dites *admissibles*.

English. Both when $\zeta = 1$ and when $\zeta = -1$, we will assume in what follows that an orientation of $\mathbf{F}$ in the usual sense is chosen, and when $\zeta = -1$, that a temporal orientation of $\mathbf{F}$ is chosen too. The orthonormal bases of $\mathbf{F}$ used will always be chosen positively oriented and, when $\zeta = -1$, their third element $\mathbf{e}_z$ will be chosen time-like and directed towards the future. Such bases of $\mathbf{F}$ will be called *admissible bases*.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (4).

Français. Nous noterons G le sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbf{F})$ formé par les automorphisme linéaires g de cet espace qui transforment chaque base admissible $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ en une base admissible $\bigl(g(\mathbf{e}_x), g(\mathbf{e}_y), g(\mathbf{e}_z)\bigr)$. Le groupe G est un groupe de Lie connexe isomorphe au groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$ lorsque $\zeta = 1$, et au groupe de Lorentz restreint de dimension 3 $\mathrm{SO}(2,1)$ lorsque $\zeta = -1$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est donc isomorphe à $\mathfrak{so}(3)$ lorsque $\zeta = 1$ et à $\mathfrak{so}(2,1)$ lorsque $\zeta = -1$.

English. We will denote by G the subgroup of $\mathrm{GL}(\mathbf{F})$ made of linear automorphisms g of this space which transform any admissible basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ of $\mathbf{F}$ into an admissible basis $\bigl(g(\mathbf{e}_x), g(\mathbf{e}_y), g(\mathbf{e}_z)\bigr)$. The group G is a connected Lie group isomorphic to the rotations group $\mathrm{SO}(3)$ when $\zeta = 1$, and to the restricted three-dimensional Lorentz group $\mathrm{SO}(2,1)$ when $\zeta = -1$. The Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G is therefore isomorphic to $\mathfrak{so}(3)$ when $\zeta = 1$ and to $\mathfrak{so}(2,1)$ when $\zeta = -1$.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (5).

Français. Le produit scalaire détermine un isomorphisme scal de $\mathbf{F}$ sur son dual $\mathbf{F}^*$ qui pour tous $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{F}$, vérifie

$$\langle \mathrm{scal}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \,.$$

Soit $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ une base admissible de $\mathbf{F}$. Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, soit $j(a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z) : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ l'endomorphisme linéaire de $\mathbf{F}$ ayant pour matrice

$$\text{matrice de (matrix of) } j(a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -\zeta b & \zeta a & 0 \end{pmatrix} .$$

English. The scalar product determines an isomorphism, denoted by scal, of $\mathbf{F}$ onto its dual vector space $\mathbf{F}^*$, such that, for all $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v} \in \mathbf{F}$,

$$\langle \mathrm{scal}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \,.$$

Let $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ be an admissible basis of $\mathbf{F}$. For any $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, let $j(a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z) : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ be the linear endomorphism of $\mathbf{F}$ whose matrix is indicated above.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (6).

Français. L'application j ainsi définie sur $\mathbf{F}$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbf{F}, \mathbf{F})$, est linéaire et injective. Elle ne dépend pas du choix de la base admissible utilisée pour indiquer son expression. Son image est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (considérée comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbf{F}, \mathbf{F})$). L'application j peut donc être considérée comme un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbf{F}$ sur $\mathfrak{g}$, ce qui permet de définir une loi de composition sur $\mathbf{F}$ qui en fait une algèbre de Lie, et qui fait de j un isomorphisme d'algèbres de Lie.

English. So defined, j is a linear and injective map defined on $\mathbf{F}$ and taking its values in $\mathcal{L}(\mathbf{F}, \mathbf{F})$, whose image is the Lie algebra $\mathfrak{g}$ (regarded as a subspace of $\mathcal{L}(\mathbf{F}, \mathbf{F})$). This map does not depend on the choice of the admissible basis used for stating its expression. Therefore j can be regarded as an isomorphism of $\mathbf{F}$ onto the Lie algebra $\mathfrak{g}$, and can be used to define on $\mathbf{F}$ a composition law for which this vector space becomes a Lie algebra, and j becomes a Lie algebras isomorphism.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (7).

Français. La loi de composition bilinéaire et antisymétrique sur $\mathbf{F}$ pour laquelle j est un isomorphisme d'algèbres de Lie est une extension du *produit vectoriel* bien connu des éléments d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Elle sera notée $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}\dot{\times}\mathbf{v}$. Appliquée aux paires ordonnées d'éléments distincts d'une base admissible $(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$, de $\mathbf{F}$, elle vérifie

$$\mathbf{e}_x\dot{\times}\mathbf{e}_y = \zeta\mathbf{e}_z\,, \quad \mathbf{e}_y\dot{\times}\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x\,, \quad \mathbf{e}_z\dot{\times}\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y\,.$$

English. The bilinear and skew-symmetric composition law on $\mathbf{F}$ for which j is a Lie algebras isomorphism is an extended version of the well known *cross product* of vectors in an oriented three-dimensional real Euclidean vector space, which will be denoted by $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}\dot{\times}\mathbf{v}$. Applied to ordered pairs of distinct elements of any admissible basis $(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$, of $\mathbf{F}$, it satifies

$$\mathbf{e}_x\dot{\times}\mathbf{e}_y = \zeta\mathbf{e}_z\,, \quad \mathbf{e}_y\dot{\times}\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x\,, \quad \mathbf{e}_z\dot{\times}\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y\,.$$

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (8).

Français. Ces propriétés, bien connues lorsque $\zeta = 1$, sont encore vraies lorsque $\zeta = -1$. Elles confèrent à $\mathbf{F}$ une structure très riche. Outre la structure riemannienne ou pseudo-riemannienne (selon le signe de ζ) déterminée par son produit scalaire, $\mathbf{F}$ identifié à $\mathfrak{g}$ au moyen de j devient l'algèbre de Lie de G, et l'action naturelle de G sur $\mathbf{F}$ devient l'action adjointe.

English. These properties, well known when $\zeta = 1$, are still valid when $\zeta = -1$, and allow the definition on $\mathbf{F}$ of a very rich structure. Of course $\mathbf{F}$ has a Riemannian or pseudo-Riemannian metric determined by its scalar product. Moreover, when it is identified with $\mathfrak{g}$ by means of j, $\mathbf{F}$ has a Lie algebra structure and the natural action of G becomes the adjoint action of this group on its Lie algebra.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (9).

Français. Identifié au dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ au moyen de l'isomorphisme $(j^{-1})^T \circ \mathrm{scal}$ (composé $\mathrm{scal} : \mathbf{F} \to \mathbf{F}^*$ avec le transposé $(j^{-1})^T : \mathbf{F}^* \to \mathfrak{g}^*$ de l'inverse de j), $\mathbf{F}$ est muni d'une structure de Lie-Poisson, et l'action naturelle de G sur cet espace s'identifie à l'action coadjointe à gauche de G sur $\mathfrak{g}^*$.

English. When $\mathbf{F}$ is identified with the dual vector space $\mathfrak{g}^*$ of this Lie algebra by means of $(j^{-1})^T \circ \mathrm{scal}$ (composed of $\mathrm{scal} : \mathbf{F} \to \mathbf{F}^*$ with the transpose $(j^{-1})^T : \mathbf{F}^* \to \mathfrak{g}^*$ of j), becomes endowed with a Lie-Poisson structure, the natural action of G on F becomes the coadjoint action on the left of G on the dual $\mathfrak{g}^*$ of its Lie algebra.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (10).

Français. Les orbites coadjointes de G peuvent donc être identifiées à des sous-variétés de $\mathbf{F}$. Exprimées au moyen des coordonnées x, y et z associées à une base admissible $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ de $\mathbf{F}$, les orbites coadjointes sont les sous-variétés connexes de $\mathbf{F}$ déterminées par une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + \zeta z^2 = \text{Constante}\,.$$

Le singleton $\{0\}$ est une orbite coadjointe de dimension 0. Toutes les autres orbites coadjointes sont de dimension 2.

English. The coadjoint orbits of G can therefore be considered as submanifolds of F. With the coordinate functions x, y and z in an admissible basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ of $\mathbf{F}$, coadjoint orbits are connected submanifolds of $\mathbf{F}$ determined by an equation

$$x^2 + y^2 + \zeta z^2 = \text{Constant}\,.$$

The singleton $\{0\}$ is a zero-dimensional coadjoint orbit. All other coadjoint orbits are two-dimensional.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (11).

Français. Sur des ouverts convenablement choisis de chaque orbite coadjointe $\mathcal{O}$, on peut utuliser comme coordonnées deux des trois coordonnées x, y et z associées à une base admissible $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ de $\mathbf{F}$. Sur l'ouvert dense de $\mathcal{O}$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$, on peut aussi utiliser les coordonnées (φ, z), où φ est l'angle polaire tel que $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

English. On suitably chosen open subsets of any two-dimensional coadjoint orbit $\mathcal{O}$, two of the three coordinates x, y and z associated to an admissible basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ of $\mathbf{F}$ can be used as coordinates. One can use too, on the dense open subset of $\mathcal{O}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$, the coordinates (φ, z), where φ is the polar angle such that $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (12).

Français. La forme symplectique $\omega_{\mathcal{O}}$ admet les quatre expressions équivalentes

$$\omega_{\mathcal{O}} = \frac{1}{z(x,y)}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \frac{\zeta}{x(y,z)}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \frac{\zeta}{y(z,x)}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \zeta\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}z\,.$$

Les coordonnées (φ, z) sur $\mathcal{O}$ sont les plus pratiques pour la détermination des états de Gibbs. Avec ces coordonnées, la forme de Liouville $\lambda_{\omega_{\mathcal{O}}}$ a pour expression

$$\lambda_{\omega_{\mathcal{O}}}(\mathrm{d}\mathbf{v}) = \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,, \quad \mathbf{v}\in\mathcal{O} \text{ de coordonnées } (\varphi, z)\,.$$

English. The symplectic form $\omega_{\mathcal{O}}$ admits the four equivalent expressions indicated above, in terms of the coordiates (x, y), (y, z), (z, x) and (φ, z), respectively. In the coordiates (φ, z), which are the most convenient for the determination of Gibbs states, the expression of the Liouville measure $\lambda_{\omega_{\mathcal{O}}}$ is given above.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (13).

Français. Lorsque $\zeta = 1$, $G \equiv \mathrm{SO}(3)$. Identifiées à des sous-variétés de $\mathbf{F}$ comme expliqué ci-dessus, les orbites coadjointes de dimension 2 sont les sous-variétés connexes d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,, \quad \text{avec } R > 0\,.$$

Ce sont des sphères centrées sur l'origine 0 de $\mathbf{F}$. La sphère de rayon $R > 0$ sera notée S_R.

English.
When $\zeta = 1$, $G \equiv \mathrm{SO}(3)$. Considered as submanifolds of $\mathbf{F}$ as explained above, two-dimensional coadjoint orbits are connected submanifolds of equation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,, \quad \text{with } R > 0\,.$$

They are spheres centered on the origin 0 of $\mathbf{F}$. The sphere of radius $R > 0$ will be denoted S_R.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (14).

Français. Lorsque $\zeta = -1$, $G \equiv \mathrm{SO}(2,1)$. Les orbites coadjointes de dimension 2 sont les sous-variétés connexes de $\mathbf{F}$ d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = C\,, \quad \text{avec } C \text{ constante et } (x,y,z) \neq (0,0,0)\,.$$

On distingue trois types d'orbites coadjointes de dimension 2, selon que $C < 0$, $C = 0$ ou $C > 0$.

English.
When $\zeta = -1$, $G \equiv \mathrm{SO}(2,1)$. Two-dimensional coadjoint orbits are connected submanifolds of $\mathbf{F}$ of equation

$$x^2 + y^2 - z^2 = C\,, \quad \text{with } C \text{ constant and } (x,y,z) \neq (0,0,0)\,.$$

One can distinguish three kinds of two-dimensional coadjoint orbits, corresponding to the three possibilities $C < 0$, $C = 0$ or $C > 0$.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (15).

Français. Pour $C = -R^2 < 0$, on a les deux orbites coadjointes P_R^+ et P_R^-, d'équations respectives

$$z = \sqrt{R^2 + x^2 + y^2} \quad \text{pour } P_R^+ \quad \text{et } z = -\sqrt{R^2 + x^2 + y^2} \quad \text{pour } P_R^- \,.$$

On les appelle *pseudosphères* de rayon R. Chacune d'elles est une nappe d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes dont l'axe de révolution est l'axe des z.

English.
For $C = -R^2 < 0$, we have the two coadjoint orbits P_R^+ and P_R^- of respective equations

$$z = \sqrt{R^2 + x^2 + y^2} \quad \text{for } P_R^+ \quad \text{and } z = -\sqrt{R^2 + x^2 + y^2} \quad \text{for } P_R^- \,.$$

They are called *pseudo-spheres* of radius R. Each one is a sheet of a two-sheeted two-dimensional hyperboloid with the z axis as revolution axis.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (16).

Français. Pour $C = 0$, on a les deux orbites coadjointes C^+ et C^-, d'équations respectives

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \text{avec } (x, y) \neq (0, 0) \text{ pour } C^+,$$
$$z = -\sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \text{avec } (x, y) \neq (0, 0) \text{ pour } C^-.$$

Ce sont les *cônes de lumière* (sans leurs sommet) pointant, respectivement, vers le futur et vers le passé.

English. For $C = 0$, we have the two coadjoint orbits C^+ and C^-, of respective equations

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \text{with } (x, y) \neq (0, 0) \text{ for } C^+,$$
$$z = -\sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \text{with } (x, y) \neq (0, 0) \text{ for } C^-.$$

They are the *light cones* (without their apex) directed, respectively, towards the future and towards the past.

Exemples d'états de Gibbs construits avec un moment (17).

Français. Pour $C = R^2 > 0$, on a l' orbite coadjointe H_R d'équation
$$x^2 + y^2 = z^2 + R^2 \, .$$
C'est un hyperboloïde de révolution à une seule nappe ayant l'axe des z pour axe de révolution.

English. For $C = R^2 > 0$, we have the coadjoint orbit H_R of equation
$$x^2 + y^2 = z^2 + R^2 \, .$$
It is a single sheeted revolution hyperboloid with the z axis as revolution axis.

États de Gibbs sur les orbites coadjointes de $\mathrm{SO}(3)$ (1).

Français. Lorsque $\zeta = 1$, $G \equiv \mathrm{SO}(3)$. Comme on vient de le voir, les orbites coadjointes de dimension 2 sont toutes des sphères centrées sur l'origine 0 de $\mathbf{F}$. L'injection canonique de la sphère S_R dans $\mathbf{F} \equiv \mathfrak{so}(3)^*$ est un moment de l'action hamiltonienne de $\mathrm{SO}(3)$ sur cette orbite. Puisque S_R est compacte, l'ouvert Ω des températures généralisées, pour cette action hamiltonienne, est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \equiv \mathbf{F}$ toute entière.

English. When $\zeta = 1$, $G \equiv \mathrm{SO}(3)$. As seen above, all two-dimensional coadjoint orbits are spheres centered on the origin 0 of $\mathbf{F}$. The canonical injection of the sphere S_R in $\mathbf{F} \equiv \mathfrak{so}(3)^*$ is a moment map of the Hamiltonian action of $\mathrm{SO}(3)$ on this orbit. Since S_R is compact, the open subset Ω of generalized temperatures, for this Hamiltonian action, is the whole Lie algebra $\mathfrak{g} \equiv \mathbf{F}$.

États de Gibbs sur les orbites coadjointes de SO(3) (2).

Français. Pour chaque $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{F} \equiv \mathfrak{g}$, on peut choisir une base admissible $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ de $\mathbf{F}$ telle que $\mathbf{e}_z$ et $\boldsymbol{\beta}$ soient parallèles et dirigés dans le même sens. Alors $\boldsymbol{\beta} = \beta\mathbf{e}_z$, avec $\beta \geq 0$. La fonction de partition P et la densité de probabilité $\rho_{\boldsymbol{\beta}}$ de l'état de Gibbs sont

$$P(\boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} \dfrac{4\pi\sinh(R\beta)}{\beta} & \text{si (if) } \beta > 0, \\ 4\pi R & \text{si (if) } \beta = 0, \end{cases}$$

$$\rho_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{\beta\exp(-\beta z)}{4\pi\sinh(R\beta)} & \text{si (if) } \beta > 0, \\ \dfrac{1}{4\pi R} & \text{si (if) } \beta = 0, \end{cases} \qquad \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \in S_R\,.$$

English. For each $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{F} \equiv \mathfrak{g}$, we can choose an admissible basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ of $\mathbf{F}$ such that $\mathbf{e}_z$ and $\boldsymbol{\beta}$ are parallel and directed in the same direction. Then $\boldsymbol{\beta} = \beta\mathbf{e}_z$, with $\beta \geq 0$. The partition function P and the probability density $\rho_{\boldsymbol{\beta}}$ of the Gibbs state indexed by $\boldsymbol{\beta}$ are given by the above equalities.

États de Gibbs sur les orbites coadjointes de SO(3) (3).

Français. Lorsque $\beta > 0$, les fonctions thermodynamiques valeur moyenne de J et entropie sont

$$E_J(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1 - R\beta \coth(R\beta)}{\beta^2}\,\boldsymbol{\beta}\,,$$

$$S(\boldsymbol{\beta}) = 1 + \log\left(\frac{4\pi \sinh(R\beta)}{\beta}\right) - R\beta\coth(R\beta)\,.$$

English. When $\beta > 0$, the thermodynamic functions mean value of J and entropy are

$$E_J(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1 - R\beta \coth(R\beta)}{\beta^2}\,\boldsymbol{\beta}\,,$$

$$S(\boldsymbol{\beta}) = 1 + \log\left(\frac{4\pi \sinh(R\beta)}{\beta}\right) - R\beta\coth(R\beta)\,.$$

États de Gibbs sur les orbites coadjointes de $\mathrm{SO}(2,1)$ (1).

Français. Lorsque $\zeta = -1$, $G \equiv \mathrm{SO}(2,1)$ et $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{so}(2,1)$. Pour chaque orbite coadjointe $\mathcal{O}$ de G, il faut déterminer si l'intégrale ci-dessous, qui définit une fonction de $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{g}$,

$$\int_{\mathcal{O}} \exp\bigl(-\langle J(\mathbf{r}), \boldsymbol{\beta}\rangle\bigr)\lambda_{\omega_{\mathcal{O}}}(\mathrm{d}\mathbf{r}) \qquad (*)$$

est normalement convergente.

English. When $\zeta = -1$, $G \equiv \mathrm{SO}(2,1)$ and $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{so}(2,1)$. For each coadjoint orbit $\mathcal{O}$ of G, we must determine whether the integral, which defines a function of $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{g}$,

$$\int_{\mathcal{O}} \exp\bigl(-\langle J(\mathbf{r}), \boldsymbol{\beta}\rangle\bigr)\lambda_{\omega_{\mathcal{O}}}(\mathrm{d}\mathbf{r}) \qquad (*)$$

is normally convergent.

États de Gibbs sur les orbites coadjointes de $SO(2,1)$ (2).

Français. Cas où l'orbite $\mathcal{O}$ est la pseudo-sphère P^+_R. Lorsque $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{F} \equiv \mathfrak{g}$ est de genre temps, on choisit une base admissible $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ de $\mathbf{F}$ telle que $\boldsymbol{\beta} = \beta \mathbf{e}_z$, avec $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Exprimée avec les coordonnées (z, φ), l'intégrale ci-dessus s'écrit

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_R^{+\infty} \exp(\beta z) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi \, .$$

Elle est normalement convergente si et seulement si $\beta < 0$.

English. We first assume that $\mathcal{O}$ is the pseudo-sphere P^+_R. When $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{F} \equiv \mathfrak{g}$ is time-like, we choose an admissible basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ of $\mathbf{F}$ such that $\boldsymbol{\beta} = \beta \mathbf{e}_z$, $\beta \neq 0$. Expressed with with the coordinates (z, φ), the above integral becomes

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_R^{+\infty} \exp(\beta z) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi \, .$$

It is is normally convergent if and only if $\beta < 0$.

États de Gibbs sur les orbites coadjointes de $\mathrm{SO}(2,1)$ (3).

Français. Lorsque $\boldsymbol{\beta}$ est de genre espace ou lumière, l'intégrale considérée n'est jamais normalement convergente. Pour l'orbite coadjointe $\mathcal{O} = P_R^+$, l'ensemble Ω est formé par les vecteurs de genre temps dirigés vers le passé. On a

$$P(\boldsymbol{\beta}) = \frac{2\pi}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \exp\bigl(-\|\boldsymbol{\beta}\| R\bigr)\,, \quad \boldsymbol{\beta} \in \Omega\,,$$

$$\rho_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{r}) = \frac{\|\boldsymbol{\beta}\| \exp\Bigl(-\|\boldsymbol{\beta}\|\bigl(z(\mathbf{r}) - R\bigr)\Bigr)}{2\pi}\,, \quad \mathbf{r} \in P_R^+\,,$$

English. By similar calculations, we see that when $\boldsymbol{\beta}$ is a spacelike of lightlike vector, the considered integral is never normally convergent. Therefore the set of generalized temperatures is the open subset of $\mathfrak{g} \equiv \mathbf{F}$ made of timelike vectors directed towards the past. The expressions of the partition function P and the probability density $\rho_{\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{\beta} \in \Omega$, are given above, where we have set $\|\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{-\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}}$, since $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} < 0$.

États de Gibbs sur les orbites coadjointes de $SO(2,1)$ (4).

Français. La valeur moyenne de J et l'entropie ont pour expressions

$$E_J(\beta) = -\frac{1 + R\|\beta\|}{\|\beta\|^2}\,\beta\,,$$
$$S(\beta) = 1 + \log\frac{2\pi}{\|\beta\|}\,.$$

On a pour les états de Gibbs sur P_R^- des résultats analogues.

English. The mean value of J and the entropy are

$$E_J(\beta) = -\frac{1 + R\|\beta\|}{\|\beta\|^2}\,\beta\,,$$
$$S(\beta) = 1 + \log\frac{2\pi}{\|\beta\|}\,.$$

Similar results hold for Gibbs states on the pseudosphere P_R^-.

États de Gibbs sur les orbites coadjointes de $\mathrm{SO}(2,1)$ (5).

Français. Par des calculs analogues, on montre qu'il n'existe pas d'état de Gibbs sur les autres orbites coadjointes de $G \equiv \mathrm{SO}(2,1)$ de dimension 2, les hyperboloïdes à une nappe H_R et les cônes de lumière C^+ et C^-, car pour ces orbites l'ouvert Ω des températures généralisées est vide.

English. By similar calculations, one can prove that on the other two-dimensional coadjoint orbits of $G \equiv \mathrm{SO}(2,1)$, the one-sheeted hyperboloids H_R and the light cones C^+ and C^-, there are no Gibbs states, since for these orbits the subset Ω of generalized temperatures is empty.

États de Gibbs sur le disque de Poincaré (1).

Français. Le choix d'une base admissible $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ de $\mathbf{F}$ détermine, pour chaque $R > 0$, un difféomorphisme ψ_R de la pseudo-sphère P_R^+ sur le disque de Poincaré D_P,

$$\psi_R(\mathbf{r}) = \frac{x + iy}{R + \sqrt{R^2 + x^2 + y^2}}\,,\ \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + \sqrt{R^2 + x^2 + y^2}\,\mathbf{e}_z \in P_R^+\,,$$

composé de la projection stéréographique de P_R^+ sur le plan engendré par $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$, avec $(u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y) \mapsto w = (u + iv)/R$.

English. The choice of any admissible basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ of $\mathbf{F}$ determines, for each $R > 0$, a diffeomorphism ψ_R of the pseudo-sphere P_R^+ onto the Poincaré disk D_P,

$$\psi_R(\mathbf{r}) = \frac{x + iy}{R + \sqrt{R^2 + x^2 + y^2}}\,,\ \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + \sqrt{R^2 + x^2 + y^2}\,\mathbf{e}_z \in P_R^+\,,$$

composed of the stereographic projection of P_R^+ on the two-dimensional vector subspace of $\mathbf{F}$ generated by $\mathbf{e}_x$ and $\mathbf{e}_y$ with the map $(u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y) \mapsto w = (u + iv)/R$.

États de Gibbs sur le disque de Poincaré (2).

Français. En transportant sur le disque de Poincaré D_P les éléments correspondants de P_R^+, on obtient sur D_P la métrique riemannienne et la forme symplectique :

$$\mathrm{d}s_{D_P}{}^2(w) = \frac{4R^2}{(1-|w|^2)^2}\,\mathrm{d}w\mathrm{d}\overline{w} = \frac{4R^2}{(1-|w|^2)^2}(\mathrm{d}w_{\mathrm{r}}^2 + \mathrm{d}w_{\mathrm{im}}^2)\,,$$

$$\omega_{D_P}(w) = \frac{2iR}{(1-|w|^2)^2}\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} = \frac{4R}{(1-|w|^2)^2}\mathrm{d}w_{\mathrm{r}} \wedge \mathrm{d}w_{\mathrm{im}}\,,$$

English. The Poincaré disk D_P is therefore endowed with a Riemannian metric $\mathrm{d}s_{D_P}{}^2$ and with a symplectic form ω_{D_P} for which the map ψ_R is both an isometry and a symplectomorphism :

$$\mathrm{d}s_{D_P}{}^2(w) = \frac{4R^2}{(1-|w|^2)^2}\,\mathrm{d}w\mathrm{d}\overline{w} = \frac{4R^2}{(1-|w|^2)^2}(\mathrm{d}w_{\mathrm{r}}^2 + \mathrm{d}w_{\mathrm{im}}^2)\,,$$

$$\omega_{D_P}(w) = \frac{2iR}{(1-|w|^2)^2}\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} = \frac{4R}{(1-|w|^2)^2}\mathrm{d}w_{\mathrm{r}} \wedge \mathrm{d}w_{\mathrm{im}}\,,$$

États de Gibbs sur le disque de Poincaré (3).

Français. En transportant sur D_P l'action coadjointe de G sur P_R^+ au moyen du difféomorphisme ψ_R, on obtient une action hamiltonienne de ce groupe sur (D_P, ω_{D_P}) . Un moment de cette action s'obtient en composant l'injection canonique de P_R^+ dans $\mathbf{F} \equiv \mathfrak{g}$ avec l'inverse de ψ_R :

$$\psi_R^{-1}(w) = \frac{R}{1-|w|^2}\bigl(2(w_\mathrm{r}\mathbf{e}_x + w_\mathrm{im}\mathbf{e_y}) + (1+|w|^2)\mathbf{e}_z\bigr) ,$$
$$w = w_\mathrm{r} + iw_\mathrm{im} \in D_P , \quad |w|^2 = w_\mathrm{r}^2 + w_\mathrm{im}^2 < 1 .$$

English. Using the diffeomorphism ψ_R to transport on D_P the coadjoint action of G on P_R^+, we obtain a Hamiltonian action of G on (D_P, ω_{D_P}). A moment map of this action is composed of the canonical injection of P_R^+ in $\mathbf{F} \equiv \mathfrak{g}$ with the inverse of ψ_R, whose expression is given above.

États de Gibbs sur le disque de Poincaré (4).

Français. L'ensemble Ω des températures généralisées pour l'action hamiltonienne de $G \equiv \mathrm{SO}(2,1)$ sur D_P est, comme pour l'action de ce groupe sur P_R^+, l'ensemble des vecteurs de genre lumière dirigés vers le passé. Sur l'ouvert dense $D_P \backslash \{0\}$ du disque de Poincaré, on peut utiliser les coordonnaes polaires $|w|$ et φ, telles que $w_{\mathrm{r}} = |w| \cos\varphi$, $w_{\mathrm{im}} = |w| \sin\varphi$. La mesure de Liouville $\lambda_{\omega_{D_P}}$ est :

$$\lambda_{\omega_{D_P}}(\mathrm{d}w) = \frac{4R|w|}{(1-|w|^2)^2} \mathrm{d}|w| \mathrm{d}\varphi \,.$$

English. The set Ω of generalized temperatures for the Hamiltonian action of $G \equiv \mathrm{SO}(2,1)$ on D_P is, as for its action on P_R^+, the set of lightlike vectors directed towards the past. On $D_P \backslash \{0\}$ we can use the polar coordinates $|w|$ and φ, such that $w_{\mathrm{r}} = |w| \cos\varphi$, $w_{\mathrm{im}} = |w| \sin\varphi$. The Liouville measure $\lambda_{\omega_{D_P}}$ is

$$\lambda_{\omega_{D_P}}(\mathrm{d}w) = \frac{4R|w|}{(1-|w|^2)^2} \mathrm{d}|w| \mathrm{d}\varphi \,.$$

États de Gibbs sur le disque de Poincaré (5).

Français. La densité de probabilité $\rho_{\boldsymbol{\beta}}$ de l'état de Gibbs sur D_P indexé par chaque $\boldsymbol{\beta} \in \Omega$, relativement à la mesure de Liouville $\lambda_{\omega_{D_P}}$, est

$$\rho_{\boldsymbol{\beta}}(w) = \frac{|\beta|}{2\pi} \exp\left(-\frac{2R|\beta|}{1-|w|^2}\right) , \quad \text{avec } w \in D_P .$$

Les expressions des fonctions thermodynamiques valeur moyenne du moment et entropie sont bien sûr celles déjà indiquées pour P_R^+.

English. The probability density $\rho_{\boldsymbol{\beta}}$ of the Gibbs state on D_P indexed by any $\boldsymbol{\beta} \in \Omega$, with respect to $\lambda_{\omega_{D_P}}$, is

$$\rho_{\boldsymbol{\beta}}(w) = \frac{|\beta|}{2\pi} \exp\left(-\frac{2R|\beta|}{1-|w|^2}\right) , \quad \text{with } w \in D_P .$$

The thermodynamic functions mean value of the moment map and entropy are of course the same as those for P_R^+.

Rappel : la transformation de Möbius.

Français. La transformation de Möbius associée à la matrice complexe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c and $d \in \mathbb{C}$ satisfont $ad - bc \neq 0$, est l'application $U_A : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, avec $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$U_A(w) = \begin{cases} \dfrac{aw+b}{cw+d} & \text{si (if) } w \in \mathbb{C} \text{ et (and) } cw+d \neq 0, \\ \infty & \text{si (if) } w \in \mathbb{C} \text{ et (and) } cw+d = 0, \\ a/c & \text{si (if) } w = \infty \text{ et (and) } c \neq 0, \\ \infty & \text{if } w = \infty \text{ and } c = 0. \end{cases}$$

English. The Möbius transformation determined by the matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, with a, b, c and $d \in \mathbb{C}$ satisfying $ad - bc \neq 0$, is the map $U_A : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, with $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, indicated above.

Action de $\mathrm{SU}(1,1)$ sur le disque de Poincaré (1).

Français. Le groupe de Lie $\mathrm{SU}(1,1)$ est formé par les matrices complexes de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\,, \quad \text{où } a \text{ et } b \in \mathbb{C}\,,\ |a|^2 - |b|^2 = a\bar{a} - b\bar{b} = 1\,.$$

Pour $A \in \mathrm{SU}(1,1)$ et $w \in D_P$, $U_A(w) \in D_P$. L'application $(A, w) \mapsto U_A(w)$ est une action hamiltonienne à gauche de $\mathrm{SU}(1,1)$ sur (D_P, ω_{D_P}).

English. The Lie group $\mathrm{SU}(1,1)$ is made of the matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\,, \quad \text{with } a \text{ and } b \in \mathbb{C}\,,\ |a|^2 - |b|^2 = a\bar{a} - b\bar{b} = 1\,.$$

For any $A \in \mathrm{SU}(1,1)$ and $w \in D_P$, $U_A(w) \in D_P$. The map $(A, w) \mapsto U_A(w)$ is a Hamiltonian action on the left of $\mathrm{SU}(1,1)$ on (D_P, ω_{D_P}).

Action de $\mathrm{SU}(1,1)$ sur le disque de Poincaré (2).

Français. Il existe un homomorphisme de groupes de Lie surjectif $\Psi : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SO}(2,1)$ dont le noyau est le sous-groupe distingué discret $\{1,-1\}$. D'autre part, deux matrices A et $A' \in \mathrm{SU}(1,1)$ vérifient $U_A = U_{A'}$ si et seulement si $A = \pm A'$. L'action hamiltonienne de $\mathrm{SU}(1,1)$ sur D_P par transformations de Möbius est donc en fait une action du groupe quotient $\mathrm{SU}(1,1)/\{1,-1\}$, qui est isomorphe à $\mathrm{SO}(2,1)$. On retrouve ainsi l'action hamiltonienne de $\mathrm{SO}(2,1)$ précédemment considérée.

English. There exists a surjective Lie groups homomorphism $\Psi : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SO}(2,1)$ whose kernel is the discrete normal subgroup $\{1,-1\}$. On the other hand, two matrices A and $A' \in \mathrm{SU}(1,1)$ satisfy $U_A = U_{A'}$ is and only if $A = \pm A'$. The Hamiltonian action of $\mathrm{SU}(1,1)$ on (D_P, ω_{D_P}) by Möbius transformations is therefore an action of the quotient group $\mathrm{SU}(1,1)/\{1,-1\}$, which is isomorphic to $\mathrm{SO}(2,1)$. We recover by these means the Hamiltonian action of $\mathrm{SO}(2,1)$ previously considered.

Action de $\mathrm{SU}(1,1)$ sur le disque de Poincaré (3).

Français. Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1)$, $\Psi(A)$ a pour expression

$$\Psi(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2 + \bar{a}^2 + (b^2 + \bar{b}^2)}{2} & -\dfrac{a^2 - \bar{a}^2 - (b^2 - \bar{b}^2)}{2i} & -(ab + \overline{ab}) \\ \dfrac{a^2 - \bar{a}^2 + (b^2 - \bar{b}^2)}{2i} & \dfrac{a^2 + \bar{a}^2 - (b^2 + \bar{b}^2)}{2} & -\dfrac{ab - \overline{ab}}{i} \\ -(a\bar{b} + \bar{a}b) & \dfrac{-(\bar{a}b - a\bar{b})}{i} & (a\bar{a} + b\bar{b}) \end{pmatrix}.$$

On peut identifier l'espace vectoriel $\mathbf{F}$ à l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ et à son dual.

English. For any matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1)$, $\Psi(A)$ is given by the above formula. The vector space $\mathbf{F}$ can be identified with the Lie algebra $\mathfrak{su}(1,1)$ as well as with its dual space.

États de Gibbs sur le demi-plan de Poincaré (1).

Français. Soit $M = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La transformation de Möbius U_M applique le disque de Poincaré D_P sur le demi-plan de Poicaré $\Pi_P = \{\xi = \xi_{\rm r} + i\xi_{\rm im} \in \mathbb{C} \,|\, \xi_{\rm im} > 0\}$, où $\xi_{\rm r}$ et $\xi_{\rm im}$ sont, respectivement, la partie réelle et la partie imaginaire de $\xi \in \mathbb{C}$. En transférant grâce à cette application les éléments correspondants de de D_P, on obtient sur Π_P la métrique riemannienne $\mathrm{d}s_{\Pi_P}{}^2$ et la forme symplectique ω_{Π_P} dot les expressions sont indiquées ci-après.

English. Let $M = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. The Möbius transformation U_M maps the Poincaré disk D_P onto the Poicaré half-plane $\Pi_P = \{\xi = \xi_{\rm r} + i\xi_{\rm im} \in \mathbb{C} \,|\, \xi_{\rm im} > 0\}$, where $\xi_{\rm r}$ and $\xi_{\rm im}$ are respectively the real and the imaginary parts of the complex number ξ. Transferring with this map the corresponding ingredients of D_P, we obtain on Π_P the Riemannian metric $\mathrm{d}s_{\Pi_P}{}^2$ and the symplectic form ω_{Π_P} indicated below.

États de Gibbs sur le demi-plan de Poincaré (2).

$$\mathrm{d}s_{\Pi_P}{}^2(\xi) = \frac{R^2}{\xi_{\mathrm{im}}^2}(\mathrm{d}\xi_{\mathrm{r}}^2 + \mathrm{d}\xi_{\mathrm{im}}^2)\,,$$

$$\omega_{\Pi_P}(\xi) = \frac{R}{\xi_{\mathrm{im}}^2}\mathrm{d}\xi_{\mathrm{r}} \wedge \mathrm{d}\xi_{\mathrm{im}} = \mathrm{d}\left(\frac{R}{\xi_{\mathrm{im}}}\right) \wedge \mathrm{d}\xi_{\mathrm{r}}\,.$$

Français. La mesure de Liouville $\lambda_{\omega_{\Pi_P}}$ est donc

$$\lambda_{\omega_{\Pi_P}}(\mathrm{d}\xi) = \frac{R}{\xi_{\mathrm{im}}^2}\mathrm{d}\xi_{\mathrm{r}}\mathrm{d}\xi_{\mathrm{im}}\,.$$

Le groupe de Lie $\mathrm{SU}(1,1)$ agit sur (Π_P, ω_{Π_P}) par une action hamiltonienne déduite de celle de ce groupe sur (D_P, ω_{D_P}).

English. The Liouville measure $\lambda_{\omega_{\Pi_P}}$ is therefore

$$\lambda_{\omega_{\Pi_P}}(\mathrm{d}\xi) = \frac{R}{\xi_{\mathrm{im}}^2}\mathrm{d}\xi_{\mathrm{r}}\mathrm{d}\xi_{\mathrm{im}}\,.$$

By the same process, we obtain a Hamiltonian action of the Lie group $\mathrm{SU}(1,1)$ on (Π_P, ω_{Π_P}).

États de Gibbs sur le demi-plan de Poincaré (3).

Français. Le moment de cette action hamiltonienne est

$$J_{\Pi_P}(\xi) = \frac{R}{2\xi_{\mathrm{im}}}\bigl((1-|\xi|^2)\mathbf{e}_x+2\xi_{\mathrm{r}}\mathbf{e}_y+(1+|\xi|^2)\mathbf{e}_z\bigr)\,, \quad \xi=\xi_{\mathrm{r}}+i\xi_{\mathrm{im}}\in\Pi_P\,,$$

où $(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$ est une base admissible de $\mathbf{F}\equiv\mathfrak{su}(1,1)^*$. La densité $\rho_{\boldsymbol{\beta}}$ de l'état de Gibbs indexé par $\boldsymbol{\beta}\in\Omega$ par rapport à $\lambda_{\omega_{\Pi_P}}$ est

$$\rho_{\boldsymbol{\beta}}(\xi) = \frac{|\beta|}{2\pi}\exp\left(-\frac{R|\beta|\bigl((1+\xi_{\mathrm{im}})^2+\xi_{\mathrm{r}}^2\bigr)}{2\xi_{\mathrm{im}}}\right)\,, \quad \xi=\xi_{\mathrm{r}}+i\xi_{\mathrm{im}}\in\Pi_P\,.$$

English. The moment map J_{Π_P} of the Hamiltonian action of $\mathrm{SU}(1,1)$ on Π_P, and the density $\rho_{\boldsymbol{\beta}}$ of the Gibbs state indexed by $\boldsymbol{\beta}\in\Omega$, with respect to $\lambda_{\omega_{\Pi_P}}$ are given above.

Action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré (1).

Français. Au lieu de l'action hamiltonienne de $\mathrm{SU}(1,1)$ sur le demi-plan de Poincaré Π_P, il est souvent plus commode d'utiliser l'action hamiltonienne de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur Π_P, qui s'en déduit grâce à l'isomorphisme de groupes de Lie $\Sigma : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1)$, où $a = a_{\mathrm{r}} + ia_{\mathrm{im}}$ et $b = b_{\mathrm{r}} + ib_{\mathrm{im}} \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|a|^2 - |b|^2 = a_{\mathrm{r}}^2 + a_{\mathrm{im}}^2 - (b_{\mathrm{r}}^2 + b_{\mathrm{im}}^2 = 1$, on a

$$\Sigma(A) = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{r}} - b_{\mathrm{r}} & a_{\mathrm{im}} + b_{\mathrm{im}} \\ -a_{\mathrm{im}} + b_{\mathrm{im}} & a_{\mathrm{r}} + b_{\mathrm{r}} \end{pmatrix} .$$

English. Instead of the Hamiltonian action of $\mathrm{SU}(1,1)$ on the Poincaré half-plane Π_P, it is often more convenient to use the Hamiltonian action of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ on Π_P, obtained by using the Lie groups isomorphism $\Sigma : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. For each matrix $A \in \mathrm{SU}(1,1)$, the expression of $\Sigma(A) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ is indicated above.

Action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré (2).

Français. Soit $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. L'action hamiltonienne de la matrice $\widetilde{A}$ sur le demi-plan de Poincaré Π_P n'est autre que la restriction à Π_P de la transformation de Möbius $U_{\widetilde{A}}$.

English. Let $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. The Hamiltonian action of the matrix $\widetilde{A}$ on the Poincaré half-plane Π_P is simply the Möbius transformation $U_{\widetilde{A}}$, retricted to Π_P.

Il n'existe pas d'état de Gibbs sur un espace vectoriel symplectique de dimension 2 (1).

Français. Considérons le plan $\mathbb{R}^2$ (coordonnées u, v) muni de la forme symplectique $\omega = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$. Le groupe symplectique linéaire $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^2, \omega)$ n'est autre que le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2 de déterminant 1. Comme on vient de le voir, son algèbre de Lie et le dual de cette algèbre de Lie peuvent s'identifier à l'espace vectoriel $\mathbf{F}$, lorsqu'une base admissible $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ de cet espace a été choisie.

English. We consider the plane $\mathbb{R}^2$ (coordinates u, v), endowed with the symplectic form $\omega = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$. The linear symplectic group $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^2, \omega)$ is the group $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ of real 2×2 matrices with determinant 1. As seen above, its Lie algebra, as well as its dual vector space, can be identified with the vector space $\mathbf{F}$, once an admissible basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ of $\mathbf{F}$ is chosen.

Il n'existe pas d'état de Gibbs sur un espace vectoriel symplectique de dimension 2 (2).

Français. Le moment nul à l'origine $J_{\mathbb{R}^2}$ de l'action hamiltonienne de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $(\mathbb{R}^2,\omega)$ est

$$J_{\mathbb{R}^2}(u,v) = \frac{u^2-v^2}{4}\mathbf{e}_x - \frac{uv}{2}\mathbf{e}_y + \frac{u^2+v^2}{4}\mathbf{e}_z\,.$$

English. The moment map which takes the value 0 at the origin of $\mathbb{R}^2$, for the Hamiltonian action of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $(\mathbb{R}^2,\omega)$, is

$$J_{\mathbb{R}^2}(u,v) = \frac{u^2-v^2}{4}\mathbf{e}_x - \frac{uv}{2}\mathbf{e}_y + \frac{u^2+v^2}{4}\mathbf{e}_z\,.$$

Il n'existe pas d'état de Gibbs sur un espace vectoriel symplectique de dimension 2 (3).

Français. Nous voyons que $J_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}^2)$ est l'union de deux orbites coadjointes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$: une orbite de dimension 0, le singleton $\{0\}$ (origine de **F**), une orbite de dimension 2, le cône (privé de son sommet) formé par les vecteurs de genre lumière dirigés vers le futur. Nous avons vu ci-dessus qu'il n'existe pas d'état de Gibbs sur le cône C^+. Il n'existe donc pas d'état de Gibbs sur un espace vectoriel symplectique de dimension 2 pour l'action hamiltonienne naturelle du groupe symplectique linéaire.

English. We see that the $J_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}^2)$ is the union of two coadjoint orbits of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$: a zero-dimensional orbit, the singleton $\{0\}$ (where 0 stands for the origin of **F**), and a two-dimensional orbit, the cone C^+ of light-like elements in **F** directed towards the future. We have seen above that no Gibbs state can exist on C^+. Therefore no Gibbs state can exist on a two-dimensional symplectic vector space, for the natural action of the linear symplectic group.

Remerciements et vœux (1).

Français.
Lors de ce travail, j'ai reçu l'aide de Roger Balian et d'Alain Chenciner. Je les remercie chaleureusement, ainsi que Frédéric Barbaresco à qui je dois mon intérêt pour la *thermodynamique des groupes de Lie de Souriau*.

Bien sûr, j'évoque avec reconnaissance la mémoire de Jean-Marie Souriau (1922–2012).

English. During this work, I received the help of Roger Balian et Alain Chenciner. I warmly thank them and Frédéric Barbaresco, to whom I owe my interest in *Souriau's Lie groups thermodynamics*.

Of course, I recall with gratitude the memory of Jean-Marie Souriau (1922–2012).

Remerciements et vœux (2).

Français. Un grand merci aux organisateurs de cette rencontre, pour m'avoir permis d'y participer !

Et tous mes vœux à Jean-Pierre Marco, pour de nombreuses années heureuses, qui sans doute comporteront une intense activité mathématique !

English. Many thanks to the organizers of this meeting, for allowing me to participate.

And all my wishes to Jean-Pierre Marco, for many happy years, which no doubt will involve an intense mathematical activity !

Bibliographie I

[1] Balian R., *Information in Statistical Physics*, Studies in History and Philosophy of Modern physics, **36** (2005), pp.323–353.

[2] Balian R., *François Massieu et les Potentiels Thermodynamiques*, Évolution des disciplines et histoire des découvertes, Académie des Sciences, Avril 2015.

[3] Barbaresco F., *Koszul Information Geometry and Souriau Geometric Temperature/Capacity of Lie Group Thermodynamics*, Entropy, vol. 16, 2014, pp. 4521-4565. Published in the book *Information, Entropy and Their Geometric Structures*, MDPI Publisher, September 2015.

Bibliographie II

[4] Barbaresco F., *Symplectic Structure of Information Geometry: Fisher Metric and Euler-Poincaré Equation of Souriau Lie Group thermodynamics*. In *Geometric Science of Information, Second International Conference GSI 2015 Proceedings*, (Franck Nielsen and Frédéric Barbaresco, editors), Lecture Notes in Computer Science vol. 9389, Springer 2015, pp. 529–540.

[5] Barbaresco F., *Geometric Theory of Heat from Souriau Lie Groups thermodynamics and Koszul Hessian Geometry: Applications in Information Geometry for Exponential Families*, in the Special Issue "Differential Geometrical Theory of Statistics", MDPI, Entropy **2016**, 18(11), 386; doi:10.3390/e18110386.

Bibliographie III

[6] Barbaresco F., *Lie Group Statistics and Lie Group Machine Learning Based on Souriau Lie Groups Thermodynamics and Koszul-Souriau-Fisher Metric: New Entropy Definition as Casimir Invariant Function in Coadjoint Representation*, Entropy 2020, 22, 642; doi:10.3390/e22060642.

[7] Barbaresco F., *Souriau Entropy Based on Symplectic Model of Statistical Physics: three Jean-Marie Souriau's Seminal Papers on Lie Groups Thermodynamics*, Preprint, partial English translation of the papers [38, 39, 40] by Jean-Marie Souriau. https://www.academia.edu/44444245/Souriau_Entropy_based_on_Symplectic_Model_of_Statistical_Physics_three_Jean_Marie_Souriaus_seminal_papers_on_Lie_Groups_Thermodynamics.

Bibliographie IV

[8] Barbaresco F., Gay-Balmaz F., *Lie Group Cohomology and (Multi)Symplectic Integrators: New Geometric Tools for Lie Group Machine Learning Based on Souriau Geometric statistical mechanics*, Entropy 2020, 22, 498; doi:10.3390/e22050498.

[9] Brezov D, Mladenova C. and Mladenov I., *Vector Decomposition of Rotations*, J. Geometry Symm. Phys. **28** (2012) 67–103.

[10] Boltzmann L., *Leçons sur la théorie des gaz*, Gauthier-Villars, Paris, 1902–1905, reprinted by Éditions Jacques Gabay, Paris, 1987. The second part can be freely downloaded at `http://iris.univ-lille1.fr/handle/1908/1523`.

Bibliographie V

[11] Chenciner A., *La force d'une idée simple, hommage à Claude Shannon à l'occasion du centenaire de sa naissance*, Gazette des mathématiciens, Société mathématique de France, n. 152, avril 2017, pp. 16–22.

[12] Choquet-Bruhat Y., de Witt-Morette C., and Dillard-Bleik M., *Analysis, Manifolds and physics*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1977.

[13] Fréchet M., *Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons*, Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute, **11**, No. 3/4 (1943), pp. 182-205.

Bibliographie VI

[14] Gibbs W., *Elements of Vector Analysis Arranged for the Use of Students in Physics*, New Haven: printed by Tuttle, Morehouse & Taylor, 1881–4. Freely downloadable at `https://library.si.edu/digital-library/book/elementsvectora00gibb`.

[15] Gibbs W., *Elementary Principles in Statistical Mechanics, developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics*, New York: Charles Scribner's sons, London: Edward Arnold, 1902. The camera-quality files for this public-domain ebook may be downloaded *gratis* at `www.gutenberg.org/ebooks/50992`.

[16] Jaynes T., *Information Theory and Statistical Mechanics*, Phys. Rev. vol. 106, n. 4 (1957), pp. 620–630.

[17] Jaynes, E. T., *Information Theory and Statistical Mechanics II*, Phys. Rev. vol. 108, n. 2 (1957), pp. 171–190.

Bibliographie VII

[18] Jaynes T., *Information Theory and Statistical Mechanics*, in *Statistical Physics*, Brandeis Lectures in Theoretical Physics, volume 3, K. Ford (editor), Benjamin, New York, 1963, pp. 181–218.

[19] Jaynes T., *Prior Probabilities*, IEEE Transactions On Systems Science and Cybernetics, vol. sec-4, no. 3, 1968, pp. 227–241.

[20] Mackey W., *The Mathematical Foundations of Quantum mechanics*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1963.

[21] Marle C.-M., *Géométrie Symplectique et Géométrie de Poisson*, Calvage & Mounet, Paris, 2018.

[22] Marle C.-M., *Projection Stéréographique et Moments*, version 1 2019, version 2 (revised) 2020. hal-02157930v2.

[23] Marle C.-M., *On Gibbs States of Mechanical Systems with Symmetries*, J. Geometry Symm. Phys. **57** (2020) 45–85.

[24] Massieu F., *Sur les Fonctions Caractéristiques des Divers Fluides*, C. R. Acad. Sci. Paris vol. 69, 1869, pp. 858–862.

[25] Massieu F., *Addition au précédent Mémoire sur les Fonctions Caractéristiques*, C. R. Acad. Sci. Paris vol. 69, 1869, pp. 1057–1061.

[26] Massieu F., *Thermodynamique. Mémoire sur les Fonctions Caractéristiques des Divers Fluides et sur la Théorie des Vapeurs*, mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France, XXII, n. 2, 1876, pp. 1–92.

[27] Matheron G., *Éléments pour une théorie des milieux poreux*, Masson, Paris, 1967.

Bibliographie IX

[28] Müller A., *Group Theorical Approaches to Vector Parametrizations of Rotations*, J. Geometry Symm. Phys. **19** (2010) 43–72.

[29] Novikov P., Taimanov A, *Modern Geometric Structures and Fields*, Graduate Studies in Mathematics Volume 71, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2006.

[30] de Saxcé G., *Entropy and Structure for the Thermodynamic Systems*, in *Geometric Science of Information, Second International Conference GSI 2015 Proceedings*, (Franck Nielsen and Frédéric Barbaresco, editors), Lecture Notes in Computer Science vol. 9389, Springer 2015, pp. 519–528.

Bibliographie X

[31] de Saxcé, G., *Link Between Lie Group Statistical Mechanics and Thermodynamics of Continua*. In the special Issue "Differential Geometrical Theory of Statistics", MDPI, Entropy, **2016**, 18, 254; doi:10.3390/e18070254.

[32] de Saxcé G., Vallée C., *Construction of a Central Extension of a Lie Group from its Class of Symplectic Cohomology*, Journal of Geometry and Physics **60** (2010), pp. 165–174.

[33] de Saxcé G., Vallée C., *Bargmann Group, Momentum Tensor and Galilean Invariance of Clausius-Duhem Inequality*, International Journal of Engineering Science, Vol. 50, 1, January 2012, pp. 216–232.

[34] de Saxcé G., Vallée C., *Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua*, John Wiley and Sons, Hoboken, USA, 2016.

Bibliographie XI

[35] Shannon C., *A Mathematical Theory of Communication*, The Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379–423 and 623–656, July and October 1948. This paper can be freely downloaded at https://web.archive.org/web/19980715013250/http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/shannon1948.pdf.

[36] Souriau J.-M., *Définition Covariante des Équilibres Thermodynamiques*, Supplemento al Nuovo cimento vol. IV n.1, 1966, pp. 203–216.

[37] Souriau J.-M., *Structure des Systèmes Dynamiques*, Dunod, Paris, 1969. English translation: *Structure of Dynamical Systems, a Symplectic View of Physics*, translated by C. H. Cushman-de Vries, translation editors R. H. Cushman, G. M. Tuynman, Progress in Mathematics volume 149, Birkhäuser Boston, 1997.

Bibliographie XII

[38] Souriau J.-M., *Mécanique Statistique, Groupes de Lie et Cosmologie*, Colloques internationaux du CNRS numéro 237 *Géométrie Symplectique et Physique Mathématique*, 1974, pp. 59–113.

[39] Souriau J.-M., *Géométrie Symplectique et Physique Mathématique*, deux conférences de Jean-Marie Souriau, Colloquium de la Société Mathématique de France, 19 février et 12 novembre 1975.

[40] Souriau J.-M., *Mécanique Classique et Géométrie Symplectique*, preprint, Université de Provence et Centre de Physique Théorique, 1984.