

Connaissez-vous le pendule ?

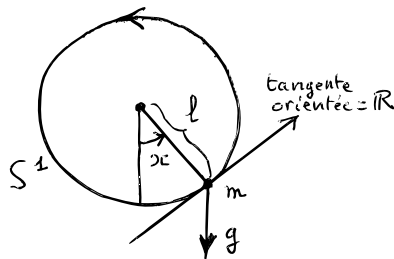
Alain Chenciner

Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE, EP 1825 du CNRS,
77, avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

et

Département de Mathématiques, Université Paris VII-Denis Diderot
16, rue Clisson, 75013 Paris, France

Les mouvements du pendule mathématique de longueur l et de masse m soumis à une gravité uniforme g (figure 1.1) sont régis par l'équation différentielle $ml\ddot{x} = -mg \sin x$, c'est-à-dire par la projection orthogonale sur la tangente au cercle au point paramétré par l'angle x , de l'équation $f = m\gamma$ (la composante normale au cercle est exactement compensée par la réaction de la barre, rigide mais non massive, qui porte la masse ponctuelle m). On a noté par un point, comme les mécaniciens, la dérivée temporelle. Soit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$; il vient



$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x,$$

ou encore

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x. \end{cases}$$

Figure 1.1

Considéré comme un champ de vecteurs dans le plan de coordonnées (x, y) , le deuxième membre $(y, -\omega^2 \sin x)$ de cette équation a le *portrait de phase* décrit dans la figure 1.2 :

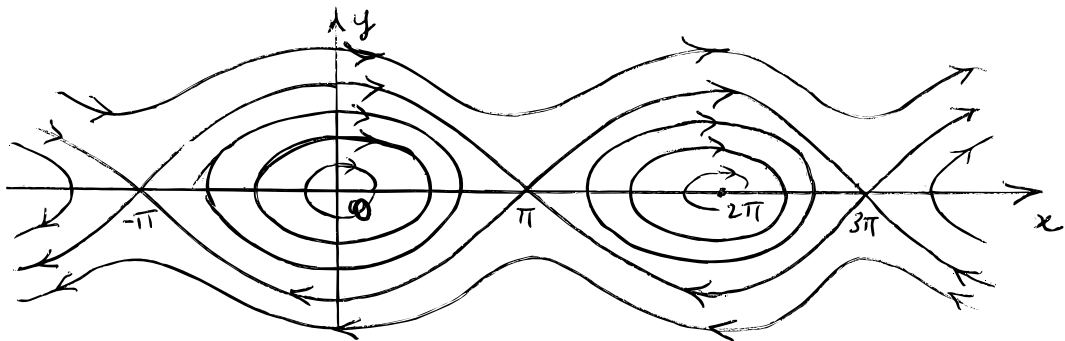


Figure 1.2

Ce portrait de phase ne donne que la géométrie et l'orientation des courbes intégrales, à l'exclusion de leur paramétrage.

Il est encore défini comme l'ensemble des courbes de niveau de la fonction énergie :

$$H = \frac{1}{2}ml^2|\dot{x}|^2 - mgl \cos x,$$

et s'obtient sans peine à partir d'une analyse locale (à l'aide du *lemme de Morse*) des *singularités* de cette fonction, c'est-à-dire des points où, ses deux dérivées partielles s'annulant, elle n'est plus une submersion. Au voisinage des points $y = 0$ et x multiple entier de 2π , la forme quadratique des dérivées secondes est définie positive et l'équilibre est *stable*; au voisinage des points $y = 0$ et x égal à π plus un multiple entier de 2π , elle est indéfinie et l'équilibre est *instable*.

Bien entendu, le "véritable" *espace des phases* du pendule est le cylindre $(R/2\pi Z) \times R$, c'est-à-dire le *fibré tangent* TS^1 du cercle $S^1 = R/2\pi Z$ (ensemble des couples *position-vitesse*). La figure 1.3 en donne une représentation à laquelle on pourra préférer celle de la figure 7bis de mon article *Systèmes dynamiques différentiables* de l'*Encyclopædia Universalis*. C'est pourtant le portrait de phase dans $(R/4\pi Z) \times R$ – c'est-à-dire "après revêtement à deux feuillets" – qui est le bon objet d'études au niveau de l'analyse (figure 1.4).

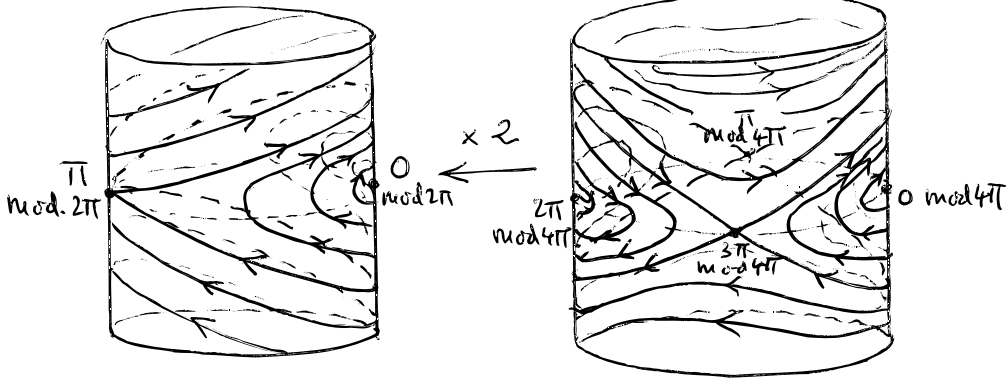


Figure 1.3

Figure 1.4

Un premier niveau de compréhension de cette assertion est obtenu directement dans le domaine réel : plongeons en effet $R/4\pi Z \times R$ dans R^3 par l'application

$$(x, y) \mapsto (z = \sin \frac{x}{2}, w = \cos \frac{x}{2}, \frac{y}{2\omega}),$$

et posons $k = \sqrt{\frac{1 + H/mgl}{2}}$ en remarquant qu'on a toujours $H \geq -mgl$.

La courbe (non connexe si $H \neq mgl$) d'énergie H dans $R/4\pi Z \times R$ est identifiée à l'intersection des deux cylindres d'équations respectives

$$z^2 + w^2 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{y}{2\omega}\right)^2 + z^2 = k^2.$$

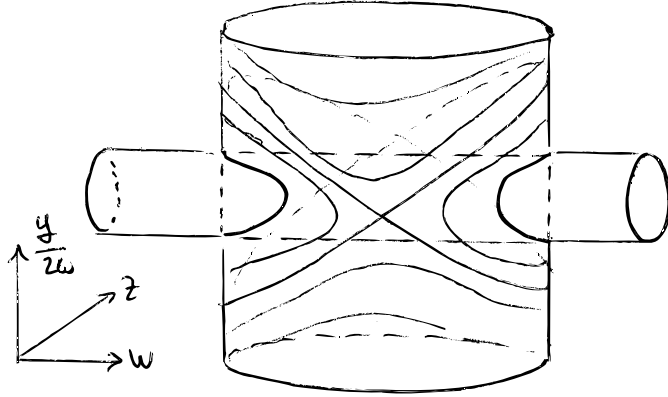


Figure 1.5

Ces cylindres sont représentés sur la figure 1.5 dans le cas où $0 < k < 1$. Intégrons maintenant l'équation du pendule. Dans la variable de position z , la relation d'énergie s'écrit

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \omega^2(1 - z^2)(k^2 - z^2).$$

La solution $z(t) = \sin \frac{x(t)}{2}$ vérifiant $z(0) = 0$ est donc la fonction réciproque de la fonction $t(z)$ définie par

$$\omega t = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(k^2 - z^2)}} = \int_0^{\frac{z}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

c'est-à-dire, si $k < 1$, le produit par k de la *fonction elliptique de Jacobi*

$$z(t) = k \operatorname{sn}(\omega t, k).$$

On en déduit (voir *Wittaker et Watson, Modern Analysis, Cambridge University Press, Chapitre XXII*) que

$$z(t) = k \operatorname{sn}(\omega t, k), \quad w(t) = \operatorname{dn}(\omega t, k) \quad \text{et} \quad \frac{y}{2\omega} = k \operatorname{cn}(\omega t, k).$$

Si $k > 1$, on obtient de même

$$z(t) = \operatorname{sn}\left(k\omega t, \frac{1}{k}\right), \quad w(t) = \operatorname{cn}\left(k\omega t, \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \frac{y}{2\omega} = k \operatorname{dn}\left(k\omega t, \frac{1}{k}\right).$$

Lorsque $k = 1$, on trouve

$$z(t) = \operatorname{th}(\omega t), \quad w(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\omega t)} = \frac{y}{2\omega},$$

qui décrit l'*orbite homocline* joignant en temps infini l'équilibre instable à lui-même.

Le lecteur ne résistera pas, je l'espère, au plaisir de comparer ce paramétrage des courbes d'énergie constante du pendule par les trois fonctions elliptiques de Jacobi à celui des courbes d'énergie constante de l'*oscillateur harmonique* $\ddot{x} = -\omega^2 x$ par les deux fonctions circulaires.

Ces formules ne prennent cependant leur véritable stature que dans le domaine complexe. Pour le comprendre, rappelons la nature de la fonction $\text{sn}(u, k)$ de la variable complexe u . Et puisque cette fonction dégénère en $\sin u$ lorsque k tend vers 0, commençons par étudier le cas de l'oscillateur harmonique, autrement dit le sinus complexe et sa fonction (multiforme) réciproque

$$\arcsin z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

La figure 1.6 analyse, dans le domaine réel, l'écriture de $z = \sin u$ comme la composée de $u \mapsto (z, \dot{z}) = (\sin u, \cos u)$ avec la projection $(z, w) \mapsto z$.

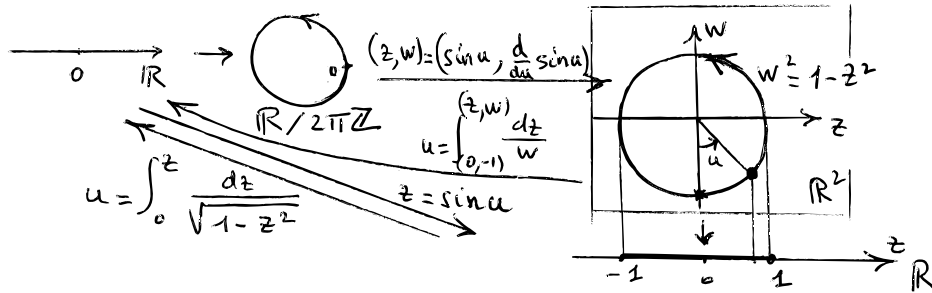


Figure 1.6

La figure 1.7 fait de même dans le domaine complexe. Ne pouvant dessiner dans $C^2 = R^4$, on a représenté le cylindre image de la première application avec deux demi-droites d'auto-intersection correspondant chacune à une génératrice du cylindre repliée sur elle-même dans R^3 en un point de ramification d'ordre deux pour la projection du cylindre sur le plan complexe de la variable z . Après complétion par deux points à l'infini, ce cylindre devient la surface de Riemann (sphère) de la fonction $\sqrt{1-z^2}$. Enfin, on a représenté les ellipses et hyperboles homofocales, images des droites $\text{Im} u = \text{cste}$ et $\text{Re} u = \text{cste}$.

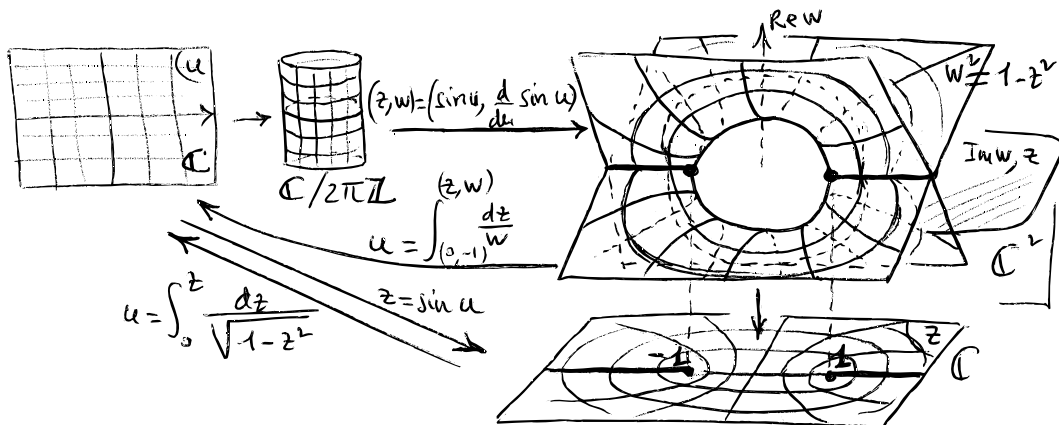


Figure 1.7

La figure 1.8, où l'on fait la même chose pour la fonction $z = \operatorname{sn}(u, k)$, montre que le cylindre est remplacé par un tore privé de deux points (les pôles de $\operatorname{sn}(u, k)$) et donc que la surface de Riemann de la fonction $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ est un tore. On retrouvera la figure 1.7 en faisant tendre k vers 0.

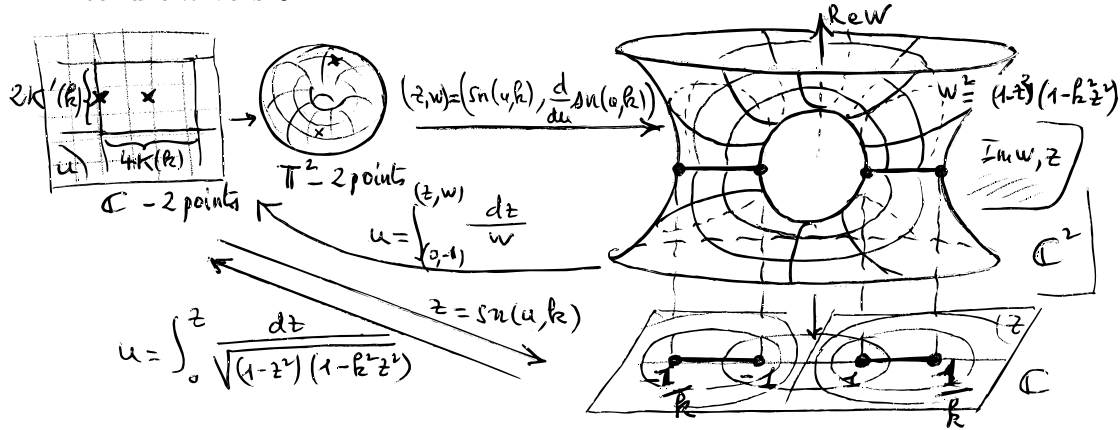


Figure 1.8

Dans l'espace des phases dédoublé $C/4\pi Z \times C$, la courbe intégrale complexe d'énergie $k \neq 1$, intersection de deux cylindres $S^1 \times R^3$ dans $C^3 = R^6$, est donc difféomorphe à un tore privé de deux points, alors que dans le "véritable" espace des phases complexe $C/2\pi Z \times C$, c'est un tore privé d'un unique point.

Remarque. Le calcul de la période $T(k)$ d'une oscillation complète du pendule se déduit immédiatement de ce qui précède : si $k < 1$, par exemple, on obtient

$$\frac{T(k)}{\omega} = 4K(k) = 4 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

qui est la période réelle de la fonction $\operatorname{sn}(u, k)$ et varie de 2π (cas limite, harmonique, des petites oscillations) à l'infini (cas limite de la solution homocline qui joint en temps infini la position d'équilibre instable à elle-même). Mais la fonction $\operatorname{sn}(u, k)$ possède également une période purement imaginaire, notée classiquement $2iK'(k)$ (voir *Witaker et Watson*). C'est Paul Appell qui, en 1878, a donné, dans le cas où $k < 1$ uniquement, l'interprétation dynamique de cette dernière; il a remarqué que le remplacement du temps réel t par le *temps complexe* it revient à multiplier par i les vitesses et par $i^2 = -1$ les accélérations, ce qui équivaut à changer l'orientation de la gravitation. Il en déduit immédiatement que la période complexe du mouvement de libration obtenu en abandonnant sans vitesse le pendule à la position x est égale à la période réelle du mouvement analogue correspondant à la position initiale $\pi - x$ (figure 1.9).

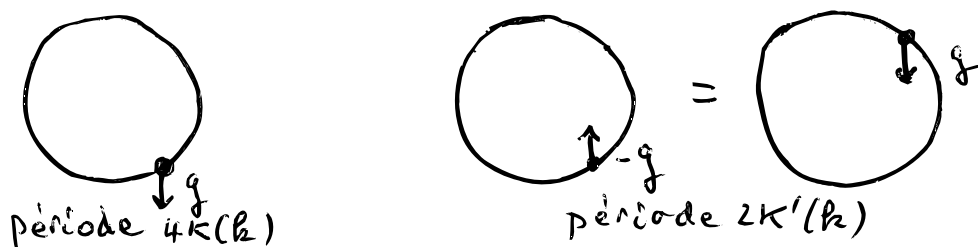


Figure 1.9

Guide pour l'interprétation des figures 1.7 et 1.8. Ces figures s'obtiennent très simplement à partir des remarques suivantes : il s'agit dans les deux cas de la représentation d'une courbe complexe dans C^2 (c'est-à-dire d'une surface réelle dans R^4) donnée par une équation de la forme $w^2 = P(z)$, où P est un polynôme de degré 2 ou 4 dont les racines z_i sont toutes réelles. On peut encore considérer cette surface comme le *graphe* de la fonction *multiforme* $w = \sqrt{P(z)}$. Le problème se passe au niveau des points $(z_i, 0)$ où la restriction à cette surface de la projection $(z, w) \mapsto z$ est *ramifiée*, exactement comme l'est en $(0, 0)$ le graphe de la fonction \sqrt{z} . On représente classiquement une telle surface de la manière suivante : on effectue dans le plan des z un certain nombre de *coupures* dans le complémentaire desquelles on peut choisir continuellement une racine carrée de $P(z)$. La surface consiste alors en le recollement de deux copies de ce complémentaire le long des bords des coupures et la seule difficulté est dans la compréhension de ce recollement. Pour respecter l'*échange des déterminations* de $\sqrt{P(z)}$ lorsque z parcourt un petit lacet autour d'une racine, celui-ci doit en effet associer un bord sur un feuillet avec le bord opposé sur l'autre. La figure 1.10 indique deux perspectives de la représentation dans R^3 du graphe de \sqrt{z} alors que la figure 1.11 explicite le recollement des deux *feuilles* du graphe de $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$.



Figure 1.10

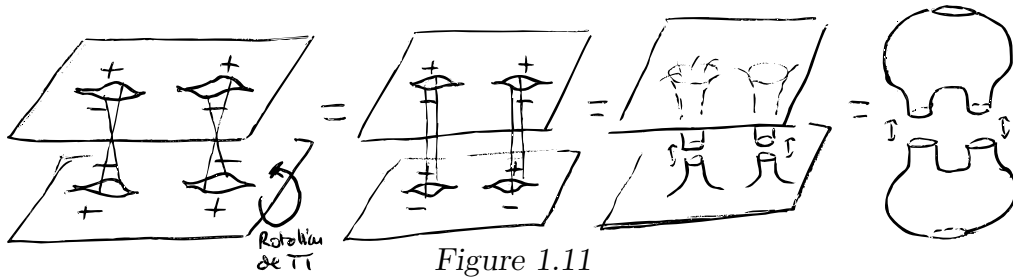


Figure 1.11

Remarques. 1 – On a pas mal de latitude dans le choix des coupures et dans celui de la représentation dans R^3 . Par exemple, si, dans la représentation du sinus, on privilégie la partie imaginaire de w plutôt que sa partie réelle et on remplace les deux coupures par une unique coupure suivant le segment $[-1, 1]$, la figure 1.7 devient la figure 1.12 :

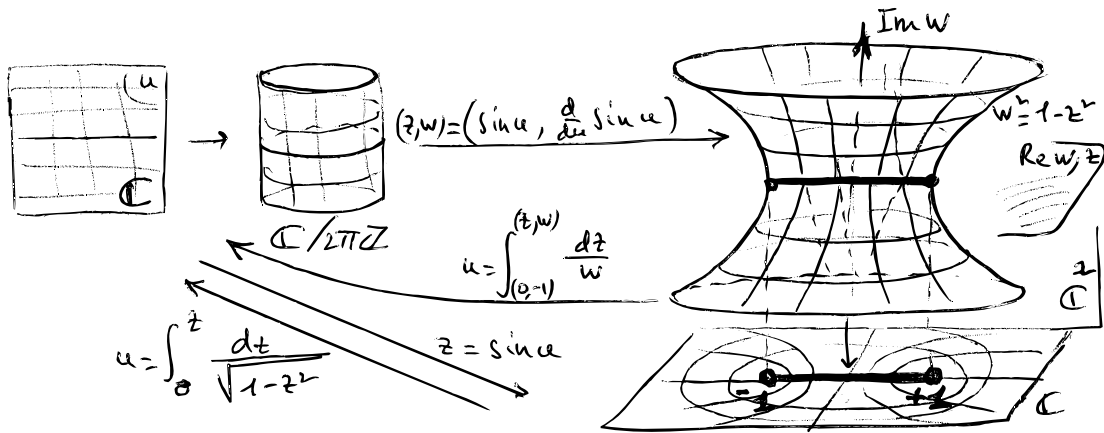


Figure 1.12

2 – Dans les applications de R^2 dans R^3 représentées sur les figures 1.7, 1.8, 1.10 et 1.12, les points de bifurcation présentent une singularité inévitable (stable) appelée *parapluie de Whitney*, dont le modèle local le plus simple est

$$(t, s) \mapsto (t, st, s^2).$$

Cette singularité se rencontre également dans le *cross-cap*, représentation du ruban de Moebius dans laquelle un voisinage du bord est un anneau plongé de façon standard dans R^3 , ce qui permet en le recollant à un disque d'obtenir le modèle le plus simple dans R^3 du plan projectif et plus généralement de n'importe quelle surface non orientable (voir les figures de *Geometry and the imagination* de Hilbert et Cohn-Vossen).

Exercice. Faire les figures analogues dans le cas où P est un polynôme quelconque (*intégrales hyperelliptiques*) et montrer que la surface de Riemann de la fonction $\sqrt{P(Z)}$ est une surface orientable de genre g si le polynôme est de degré $2g + 1$ ou $2g + 2$ (voir par exemple le livre *Riemann surfaces* de George Springer, édité par Chelsea).

Quelques remarques désabusées. La Mécanique classique n'est plus à la mode chez les (certains) mathématiciens. A l'Université Paris VII par exemple, où depuis quelques années mes propositions de l'enseigner dans le cadre d'un cours annuel de géométrie et mécanique en maîtrise se heurtent à des fins de non recevoir de la part des collègues responsables. Trop difficile pour les étudiants d'aujourd'hui, disent-ils. Je ne peux que leur donner raison. Quel besoin de distinguer entre Lagrangien et Hamiltonien, tangent et cotangent, lorsqu'on a pris soin de supprimer des programmes la notion même de dualité. D'ailleurs il n'y a pratiquement plus d'étudiant pour choisir le cours de géométrie. Allo, allo, ne coupez pas ...

Article paru dans le numéro 86 (octobre 2000), pages 21-27,
de la

“GAZETTE DES MATHÉMATIENS”

S.M.F. éditeur, 11, rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris
<http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2000/86/>).