Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Examen de janvier 2014

Deux heures — Sans document, ni calculatrice, ni téléphone, etc. — Chaque question numérotée sera notée sur environ deux points. Il n'est donc pas nécessaire de terminer le sujet — Les réponses devront être concises, et les passages à la limite justifiés.

Exercice 1 Un espace mesurable

1. Monter que la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par les singletons d'un ensemble E est la classe des parties qui sont soit dénombrables soit de complémentaire dénombrable.

2. Montrer qu'une fonction mesurable $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est constante en dehors d'une partie dénombrable ; on pourra d'abord considérer le cas d'une fonction étagée.

3. Dans le cas où $E = [0, 1]$, calculer l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{A}$ d'une fonction réelle borélienne intégrable définie sur E.

Exercice 2 De la formule de Taylor probabiliste aux fonctions d'Hermite

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on note $\epsilon_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto e^{x\xi}$ et $\epsilon_\xi^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

1. Supposons qu'il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes d'une variable telle que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\epsilon_\xi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(\epsilon_\xi^{(n)}(X))\, \frac{p_n(x)}{n!} \quad \text{et} \quad \epsilon'_\xi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(\epsilon_\xi^{(n)}(X))\, \frac{p'_n(x)}{n!}.$$

   a) Calculer les dérivées $\epsilon_\xi^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\frac{e^{x\xi}}{E(e^{X\xi})} = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n(x)}{n!}\xi^n \quad \text{et} \quad \frac{\xi e^{x\xi}}{E(e^{X\xi})} = \sum_{n\geq 0} \frac{p'_n(x)}{n!}\xi^n, \tag{1}$$

   puis en déduire que les polynômes p_n sont totalement déterminés par les relations suivantes :

$$p_0(x) = 1, \quad p'_n = np_{n-1}, \quad \int p_n\, dP_X = 0 \quad (\forall n \geq 1). \tag{2}$$

   b) Calculer les p_n dans le cas où $P_X = \delta_a$ (mesure de Dirac) avec $a \in \mathbb{R}$, ainsi que p_n pour $n = 0, 1, 2$ dans le cas où P_X est la loi de Bernoulli $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$.

2. On veut montrer, la "formule de Taylor" suivante, pour toute fonction f réelle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(X)$ soit intégrable, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{0\leq k\leq n} E(f^{(k)}(X))\frac{p_n(x)}{k!} + E\left(\int_0^{X-x} \frac{p_n(x+t)}{n!} f^{(n+1)}(X-t)\, dt\right).$$

a) Montrer que, pour toute fonction f réelle de classe C^∞ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{0\le k\le n} \left(\frac{p_k(x)}{k!} f^{(k)}(y) - \frac{p_k(y)}{k!} f^{(k)}(x) \right) = \int_0^{y-x} \frac{p_n(x+t)}{n!} f^{(n+1)}(y-t)\, dt.$$

b) Conclure ; on pourra intégrer la formule précédente par rapport à y.

On se spécialise dorénavant au cas où X est de loi gaussienne $N(0,1/2)$, c'est-à-dire de densité $e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$. Les polynômes p_n (définis par (1) ou (2)) s'appellent alors les *polynômes d'Hermite* et se notent H_n.

3. a) Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $e^{X\xi}$ est intégrable, et que la fonction $h : \xi \mapsto E(e^{X\xi})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée, et en déduire que $h(\xi) = e^{\xi^2/4}$ (on pourra trouver une équation différentielle vérifiée par h, et la résoudre).

   b) En déduire que
   $$H_n(x) = (-1)^n 2^{-n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right),$$
   et calculer H_n pour $n = 0$, 1 et 2.

   Pour $n \ge 0$, notons ψ_n la *n-ième fonction d'Hermite* définies sur $\mathbb{R}$ par
   $$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x).$$

4. a) Montrer que $(\psi_n|\psi_m)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\, \psi_m(x)\, dx = 0$ si $n \neq m$ et que $(\psi_n|\psi_n)_{L^2} \neq 0$; on pourra faire des intégrations par parties et utiliser la récurrence de (2).

   b) (Difficile) Soit $\varphi \in L^2$ une fonction L^2-orthogonale à chaque ψ_n et telle que $e^{x^2/2}\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi = 0$; on pourra remarquer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,
   $$0 = \sum_{n\ge 0} \frac{\xi^n}{n!} \int e^{-x^2/2} H_n(x) \varphi(x)\, dx,$$
   montrer que le membre de droite de cette égalité s'exprime comme la convolée de e^{-x^2} et de $e^{x^2/2}\varphi(x)$, puis prendre la transformée de Fourier.

On admettra que le raisonnement de la question précédente montre que (ψ_n) est une base hilbertienne de L^2.

5. On veut maintenant prolonger la transformation de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$.

   a) Montrer que $\psi_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x\psi_n(x) - \psi_n'(x))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b) En déduire que $\hat{\psi}_{n+1}(\xi) = -\frac{i}{2} \left(\xi \hat{\psi}_n(\xi) - \hat{\psi}_n'(\xi) \right)$, puis que $\hat{\psi}_n = \sqrt{2\pi}(-i)^n \psi_n$.

   c) Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}_2(\psi_n) = \sqrt{2\pi}(-i)^n \psi_n$.

Solution de l'exercice 1

1. Soit $\mathcal{B}$ la classe des parties dénombrables ou de complémentaire dénombrable. Vérifions que $\mathcal{B}$ est une tribu, ce dont nous aurons besoin pour montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$:
   - L'ensemble vide étant dénombrable, $\emptyset \in \mathcal{B}$.
   - $\mathcal{B}$ est trivialement stable par passage au complémentaire.
   - Soient $A_1, A_2, ... \in \mathcal{B}$. Si tous les A_i sont dénombrables, leur union (dénombrable) est dénombrable, donc appartient à $\mathcal{B}$. Sinon, il existe j tel que A_j soit infini non dénombrable, et, par définition de $\mathcal{B}$, le complémentaire de A_j est dénombrable ; alors
   $$\complement \cup_i A_i = \cap_i \complement A_i \subset \complement A_j$$
   est dénombrable, donc $\cup_i A_i \in \mathcal{B}$.)

   On peut maintenant facilement montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$:
   - $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$?
     La tribu $\mathcal{A}$, étant stable par union dénombrable, contient les parties dénombrables ; étant aussi stable par passage au complémentaire, elle contient les parties de complémentaire dénombrable. Donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
   - $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$?
     Réciproquement, les singletons de E sont dans $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu engendrée par les singletons et comme $\mathcal{B}$ est une tribu, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

   Donc $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

2. Si E est dénombrable, la propriété demandée est triviale puisqu'alors toute fonction est constante en dehors d'une partie dénombrable (en l'occurence sur $E^c = \emptyset$). Supposons donc que E est non dénombrable.

   Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable étagée. Ses ensembles de niveau $f^{-1}(y)$, $y \in f(E)$, forment une partition finie de E ; en particulier, si $y, z \in f(E)$, soit $f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$ (i.e. $y = z$) soit $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(z) = \emptyset$ (i.e. $y \neq z$).

   Supposons que $y, z \in f(E)$ et que $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(z)$ soient non dénombrables. Leurs complémentaires sont dénombrables. Comme $f^{-1}(y)$ ne peut pas être contenu dans le complémentaire de $f^{-1}(z)$, forcément $y = z$. Donc il existe au plus une valeur $y \in f(E)$ telle que $f^{-1}(y)$ soit non dénombrable. Mais il existe forcément une telle valeur y parce que E est non dénombrable et parce que f prend un nombre fini de valeurs (l'union finie de parties dénombrables est dénombrable). Donc $f = y$ en dehors de l'ensemble dénombrable $\complement f^{-1}(y)$.

   Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables étagées positives, convergeant vers f. Pour chaque fonction f_n, d'après le cas précédent il existe un réel y_n tel que $f_n = y_n$ en dehors d'une partie dénombrable A_n. En dehors de la partie dénombrable $\cup A_n$, $f_n = y_n \to f$; donc la suite réelle (y_n) converge vers un certain $y \in \mathbb{R}$, et $f = y$ en dehors de $\cup A_n$.

   Pour une fonction f mesurable de signe quelconque, le cas précédent appliqué aux parties positive et négative de f montre que f est constante en dehors d'une partie dénombrable.

3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ intégrable (sous-entendu par rapport à la mesure de Lebesgue, i.e. la loi uniforme sur $[0, 1]$). D'après la question précédente, puisque la

mesure de Lebesgue d'une partie dénombrable est nulle, $E(f|\mathcal{A})$ est constante presque sûrement. Comme $E(E(f|\mathcal{A})) = E(f)$, cette constante doit être $E(f)$. Donc $E(f|\mathcal{A}) = E(f)$ p.s.

Solution de l'exercice 2

1. a) Comme $\epsilon_\xi^{(n)}(x) = \xi^n\, e^{x\xi}$,

$$e^{x\xi} = \left(\sum_n \frac{p_n(x)}{n!}\xi^n\right) E(e^{X\xi}) \quad \text{et} \quad \xi e^{x\xi} = \left(\sum_n \frac{p_n'(x)}{n!}\xi^n\right) E(e^{X\xi});$$

en divisant par $E(e^{X\xi}) > 0$, on obtient bien

$$\frac{e^{x\xi}}{E(e^{X\xi})} = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n(x)}{n!}\xi^n \quad \text{et} \quad \frac{\xi e^{x\xi}}{E(e^{X\xi})} = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n'(x)}{n!}\xi^n. \tag{3}$$

La première égalité de (3) en $\xi = 0$ montrer que $\frac{1}{E(1)} = 1 = p_0(x)$. En multipliant la première égalitéde (3) par ξ, puis en égalant avec les membres de la seconde, on obtient que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{p_n(x)}{n!}\xi^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{p_{n-1}(x)}{(n-1)!}\xi^n = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n'(x)}{n!}\xi^n,$$

soit, par unicité du développement de Taylor, $p_0' = 0$ (ce que l'on sait déjà) et

$$p_n' = np_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

En intégrant enfin la première égalité de (3) par rapport à P_X,

$$\int \frac{e^{x\xi}}{E(e^{X\xi})}\, dP_X = 1 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\int p_n\, dP_X\right)\xi^n,$$

donc ($\int p_1 dP_X = 1$, ce que l'on savait déjà, et)

$$\int p_n\, dP_X = 0 \quad (\forall n \geq 1).$$

Ces formules déterminent uniquement les polynômes p_n, par récurrence, puisque, à chaque étape, la constante d'intégration de l'équation $p_n' = np_{n-1}$ est déterminée par le fait que p_n doit être d'espérance nulle.

b) Si $P_X = \delta_a$, d'après la question précédente on doit avoir

$$p_0(x) = 1, \quad p_n' = np_{n-1}, \quad p_n(a) = 0 \quad (\forall n \geq 1).$$

Donc, par récurrence on voit que $p_n(x) = (x-a)^n$. Si $P_X = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$,

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad p_2(x) = x(x-1).$$

2. a) En utilisant le fait que $p'_n = np_{n-1}$, une intégration par parties montre que

$$\int_0^{y-x} \frac{p_n(x+t)}{n!} f^{(n+1)}(y-t)\,dt = \frac{p_n(x)}{n!} f^{(n)}(y) - \frac{p_n(y)}{n!} f^{(n)}(x) + \int_0^{y-x} \frac{p_{n-1}(x+t)}{(n-1)!} f^{(n)}(y-t)\,dt.$$

Après $\ell \in \{1, ..., n\}$ intégrations par parties, on voit que

$$\int_0^{y-x} \frac{p_n(x+t)}{n!} f^{(n+1)}(y-t)\,dt = \sum_{n-\ell+1 \le k \le n} \left(\frac{p_k(x)}{k!} f^{(k)}(y) - \frac{p_k(y)}{k!} f^{(k)}(x) \right) + \int_0^{y-x} \frac{p_{n-\ell}(x+t)}{(n-\ell)!} f^{(n+1-\ell)}(y-t)\,dt.$$

Pour $\ell = n$, on obtient, en utilisant le fait que $p_0 = 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^{y-x} \frac{p_n(x+t)}{n!} f^{(n+1)}(y-t)\,dt &= \sum_{1 \le k \le n} \left(\frac{p_k(x)}{k!} f^{(k)}(y) - \frac{p_k(y)}{k!} f^{(k)}(x) \right) + \int_0^{y-x} p_0(x+t) f'(y-t)\,dt \\ &= \sum_{0 \le k \le n} \left(\frac{p_k(x)}{k!} f^{(k)}(y) - \frac{p_k(y)}{k!} f^{(k)}(x) \right),\end{aligned}$$

d'où la formule voulue.

b) En intégrant par rapport à y (par rapport à la loi de X), en se rappelant que $p_0 = 1$ et que $\int p_n\, P_X = 0$ pour $n \ge 1$ on obtient

$$\int \left(\int_0^{y-x} \frac{p_n(x+t)}{n!} f^{(n+1)}(y-t)\,dt \right) dP_X(y) = \sum_{0 \le k \le n} \frac{p_k(x)}{k!} E(f^{(k)}(X)) - f(x),$$

d'où la formule de Taylor annoncée.

3. a) Notons $Y(\xi, \omega) = e^{X(\omega)\xi}$. Vérfions les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme, pour montrer la dérivabilité et calculer la dérivée de $E(Y(\xi, \cdot))$ en un point $\xi_0 \in \mathbb{R}$ donné :

— Pour tout $x = X(\omega)$, la fonction $\xi \mapsto e^{x\xi}$ est dérivable en ξ_0.
— Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction

$$e^{x\xi} e^{-x^2} = \underbrace{e^{x\xi - x^2/2}}_{\text{bornée}} \underbrace{e^{-x^2/2}}_{\in L^1}$$

est le produit d'une fonction continue tendant vers 0 à l'infini (donc bornée) par une fonction dx-intégrable, donc, est elle même dx-intégrable. Donc, d'après la formule de transfert, la variable aléatoire Y est intégrable.
— Sur l'intervalle $[-|\xi_0| - 1, |\xi_0| + 1]$, la dérivée $\partial_\xi Y = X\, e^{X\xi}$ vérifie

$$|\partial_\xi Y| = \left| X\, e^{X\xi} \right| \le |X|\, e^{|X|\,(|\xi_0|+1)}$$

donc, d'après le théorème des accroissements finis, si $\xi \in [-|\xi_0|-1, |\xi_0|+1] \setminus \{\xi_0\}$,

$$\left|\frac{Y(\xi,\omega)-Y(\xi_0,\omega)}{\xi-\xi_0}\right| \leq |X|\, e^{|X|\,(|\xi_0|+1)},$$

où le membre de droite est dans L^1, puisque

$$|x|\, e^{|x|\,(|\xi_0|+1)} e^{-x^2} \leq \underbrace{|x|\, e^{|x|\,(|\xi_0|+1)} e^{-x^2/2}}_{\text{bornée}} \underbrace{e^{-x^2/2}}_{\in L^1} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Donc, d'après le théorème de dérivation d'une intégrale, $h(\xi) = E(Y)$ est dérivable de dérivée

$$h'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{x\xi}\, x\, \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx.$$

Une intégration par parties (justifiée comme dans la question 4) montre que

$$h'(\xi) = \frac{\xi}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{x\xi}\, \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx = \xi h(\xi).$$

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $h(\xi) = Ce^{\xi^2/4}$. Dans le cas où $\xi = 0$, on voit que $C = 1$. Donc

$$E(e^{X\xi}) = e^{\xi^2/4}.$$

Remarquons que $h(\xi) = \Phi_X(i\xi)$, où Φ_X est la fonction caractéristique de X. C'est pourquoi le calcul précédent ressemble tant au calcul de Φ_X fait en cours. Mais, en toute rigueur, il faut refaire ce calcul parce que nous n'avons défini Φ_X que sur la droite réelle.

b) D'après la question précédente,

$$\frac{e^{x\xi}}{E(e^{X\xi})} = e^{x\xi-\xi^2/4} = e^{x^2/2} e^{-(x-\xi/2)^2}$$

Donc, d'après l'égalité (1),

$$e^{x^2/2} e^{-(x-\xi/2)^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} \xi^n.$$

Donc, par unicité du développement de Taylor,

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left(e^{-(x-\xi/2)^2}\right)\Big|_{\xi=0}.$$

Or, par récurrence on voit que

$$\frac{\partial^n}{\partial \xi^n} e^{-(x-\xi/2)^2} = (-2)^{-n} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(x-\xi)^2/2},$$

donc, en $\xi = 0$,

$$\frac{\partial^n}{\partial \xi^n} e^{-(x-\xi/2)^2}\Big|_{\xi=0} = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Donc, pour tout $n \geq 0$,

$$H_n(x) = (-1)^n 2^{-n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

Soit avec cette dernière formule, soit en utilisant la formule de récurrence (2), on voit que

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x \quad \text{et} \quad H_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}.$$

4. a) Il convient premièrement de remarquer que $\psi_n \in L^2$. En effet,

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) = (-2)^{-n} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right),$$

donc par récurrence on voit que $\psi_n(x)$ est de la forme

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} Q_n(x),$$

où Q_n est un polynôme. Donc

$$\psi_n(x) = \underbrace{e^{-x^2/4} Q_n(x)}_{\text{bornée}} \underbrace{e^{-x^2/4}}_{\in L^2} \in L^2.$$

Soit $n \geq m$. On a

$$(\psi_n|\psi_m)_{L^2(\mathbb{R})} = (-2)^{-n} \int \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right) H_m(x)\, dx.$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$(\psi_n|\psi_m)_{L^2(\mathbb{R})} = (-2)^{-n} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right) H_m(x)\, dx.$$

Or, $A > 0$ étant fixé, une intégration par partie montre que

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right) H_m(x)\, dx = {} & \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-x^2}\right) H_m(x)\right]_{-A}^{A} \\ & + \int_{-A}^{A} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-x^2}\right) H'_m(x)\, dx.\end{aligned}$$

Le terme entre crochets a une limite nulle quand A tend vers $+\infty$, parce que $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-x^2}\right) H_m(x)$ est le produit d'un polynôme par e^{-x^2} ; le terme intégral converge, lui, d'après le théorème de convergence dominée, vers

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-x^2}\right) H'_m(x)\, dx.$$

Donc

$$\begin{aligned}(\psi_n|\psi_m)_{L^2(\mathbb{R})} &= (-1)^{n+1} 2^{-n} \int \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-x^2}\right) H'_m(x)\, dx \\ &= (-1)^{n+1} 2^{-n} m \int \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-x^2}\right) H_{m-1}(x)\, dx \quad \text{(formule (2))} \\ &= (-1)^{n+m} 2^{-n} m! \int \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \left(e^{-x^2}\right) dx \quad (m \text{ intégrations par parties}) \\ &= \begin{cases} (-1)^{n+m} 2^{-n} m! \left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} \left(e^{-x^2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 & \text{si } n > m \\ 2^{-n} n! \int e^{-x^2}\, dx = 2^{-n} n! \sqrt{\pi} & \text{si } n = m, \end{cases}\end{aligned}$$

ce qui montre que (ψ_n) est orthogonale (et que $\left(2^{n/2}\psi_n/\sqrt{n!\sqrt{\pi}}\right)$ est orthonormée).

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n\geq 0} \frac{\xi^n}{n!} (\psi_n(x), \varphi(x))_{L^2} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{\xi^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} H_n(x) \varphi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \left(\sum_{n\geq 0} H_n(x) \frac{\xi^n}{n!} \right) \varphi(x)\, dx \quad \text{(par convergence dominée)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \left(e^{x^2} e^{-(x-\xi/2)^2} \right) \varphi(x)\, dx \quad \text{(par définition des } H_n\text{)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-(\xi/2-x)^2} \left(e^{x^2/2} \varphi(x) \right)\, dx \\
&= g * f(\xi/2),
\end{aligned}$$

où

$$g(x) = e^{-x^2} \quad \text{et} \quad f(x) = e^{x^2/2}\varphi(x).$$

Comme la transformation de Fourier des fonctions L^1 échange produit de convolution et produit habituel, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$0 = \widehat{g * f}(\xi) = \hat{g}(\xi)\, \hat{f}(\xi);$$

or $\hat{g}(\xi) \neq 0$, donc

$$\hat{f}(\xi) = 0 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}).$$

Par injectivité de la transformation de Fourier,

$$f(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

donc $\varphi = 0$.

(Pour voir que les fonctions d'Hermite forment une base hilbertienne de L^2, il faudrait faire ce même calcul pour toute fonction $\varphi \in L^2$, sans supposer que $f = e^{x^2/2}\varphi \in L^1$. Mais alors il faut pouvoir écrire que $0 = \widehat{g * f}(\xi) = \hat{g}(\xi)\, \hat{f}(\xi)$, ce qui exige de définir la transformation de Fourier dans des espaces fonctionnels plus généraux que L^1. Ici, f appartient par exemple à l'espace des "distributions tempérées", auquel la transformation de Fourier se prolonge effectivement.)

5. a) On a

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(x) &= (-2)^{-(n+1)} e^{x^2/2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(e^{-x^2} \right) \\
&= (-2)^{-(n+1)} \left[\frac{d}{dx} \left(e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right) \right) - x e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} (x\psi_n(x) - \psi_n'(x)).
\end{aligned}$$

b) Une intégration par parties (et un passage à la limite, comme précédemment dans la question b) montre que

$$\widehat{\psi_n'}(\xi) = \int e^{-ix\xi} \psi_n'(x)\, dx = i\xi \int e^{-ix\xi} \psi_n(x)\, dx = i\xi \hat{\psi}_n(\xi).$$

De plus, le théorème de dérivation sous l'intégrale montre que

$$\begin{aligned}
\widehat{x\psi_n(x)}(\xi) &= \int e^{-ix\xi} x\psi_n(x)\,dx \\
&= -\frac{1}{i}\int \frac{\partial\left(e^{-ix\xi}\right)}{\partial\xi}\psi_n(x)\,dx \\
&= i\frac{d}{d\xi}\int e^{-ix\xi}\psi_n(x)\,dx \\
&= i\hat{\psi}'_n(\xi).
\end{aligned}$$

Donc, d'après la question précédente,

$$\hat{\psi}_{n+1}(\xi) = -\frac{i}{2}\left(\xi\hat{\psi}_n(\xi) - \hat{\psi}'_n(\xi)\right).$$

Donc la suite des fonctions $\theta_n(\xi) = (-i)^{-n}\hat{\psi}_n(\xi)$ vérifie la même relation de récurrence que (ψ_n) :

$$\theta_{n+1}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\xi\theta_n(\xi) - \theta'_n(\xi)\right).$$

De plus, $\psi_0(x) = e^{-x^2/2}$ et $\theta_0(\xi) = \hat{\psi}_0(\xi) = \sqrt{2\pi}$. Donc, pour tout n,

$$\theta_n(\xi) = \sqrt{2\pi}\psi_n(\xi),$$

soit

$$\hat{\psi}_n(\xi) = \sqrt{2\pi}(-i)^n\psi_n(\xi).$$

c) L'unicité résulte du fait que l'espace engendré par les fonctions d'Hermite est dense. L'existence résulte de la formule, si $f = \sum_{n\geq 0} f_n\psi_n$,

$$\hat{f} = \sum_{n\geq 0}\sqrt{2\pi}(-i)^n f_n\psi_n.$$