Examen partiel de novembre 2014

Deux heures — Sans document, ni calculatrice, ni téléphone, etc.
Les réponses doivent être concises, et les passages à la limite justifiés.
Chaque question numérotée sera notée sur environ deux points.

1. Extension d'une tribu par une partie

1. — Rappeler la définition de la tribu engendrée par un ensemble $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble non vide E. On justifiera son existence.

Soient $\mathcal{A}$ une tribu de E, B une partie fixée de E n'appartenant pas à $\mathcal{A}$, et $\mathcal{B}$ la classe des parties de E de la forme

$$(A \cap B) \cup (A' \cap (E \setminus B)) \quad \text{avec } A, A' \in \mathcal{A}.$$

2. — Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire (on pourra faire un dessin), puis que $\mathcal{B}$ est une tribu.

3. — Montrer que $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A} \cup \{B\}$.

Solution. —

1. — La tribu engendrée par $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ tribu } \supset \mathcal{C}} \mathcal{A};$$

la famille dont on calcule ici l'intersection contient par exemple $\mathcal{P}(E)$. C'est bien une tribu :

- Stabilité par complémentation : Si $A \in \sigma(\mathcal{C})$, pour toute tribu $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{C}$, $A \in \mathcal{A}$, donc, par stabilité de $\mathcal{A}$ par complémentation, $A^c \in \mathcal{A}$, donc $A^c \in \sigma(\mathcal{C})$.
- Stabilité par union dénombrable : Si $A_1, A_2... \in \mathcal{C}$, pour tout n la partie A_n appartient à toutes les tribus $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{C}$, donc chacune de dernières, qui est stable par union dénombrable, contient $\cup_n A_n$, donc $\cup A_n$ appartient à $\sigma(\mathcal{C})$.

2. — Le complémentaire d'un élément quelconque $(A \cap B) \cup (A' \cap (E \setminus B))$ de $\mathcal{B}$ s'écrit

$$\complement \left[(A \cap B) \cup (A' \cap (E \setminus B))\right] = \left(\complement A \cap B\right) \cup \left(\complement A' \cap (E \setminus B)\right),$$

donc appartient à $\mathcal{B}$.

La stabilité de $\mathcal{B}$ par union dénombrable se démontre directement.

3. — Notons $\mathcal{B}'$ la tribu engendrée par $\mathcal{A} \cup \{B\}$. On veut montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. On voit directement que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.

D'autre part, pour toute partie $A_0 \in \mathcal{A}$, $A_0 \cup B \in \mathcal{B}$ puisque $A_0 \cup B$ est de la forme voulue avec

$$A = E \quad \text{et} \quad A' = A_0.$$

Donc $\mathcal{A} \cup \{B\} \subset \mathcal{B}$. Or, d'après la question précédente, $\mathcal{B}$ est une tribu. Donc $\mathcal{B}' = \sigma(\mathcal{A} \cup \{B\}) \subset \mathcal{B}$.

2. Sur la symétrie passé-futur

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $T : E \to E$ une bijection bi-mesurable (c'est-à-dire que T et T^{-1} sont mesurables), telle que la mesure image de μ par T égale μ.

1. — Donner un exemple d'espace de probabilité et de bijection vérifiant ces hypothèses, avec $T \neq \mathrm{id}$. Donner un exemple où la bijection ne préserve pas la mesure.

Soit $A \in \mathcal{A}$ une partie de E de mesure finie non nulle. On note multiplicativement la composition de T avec elle-même : $T^0 = \mathrm{id}$, pour tout entier $n \geq 0$, $T^{n+1} = T \circ T^n$, et $T^{-n} = (T^n)^{-1}$.

2. — $*$ Montrer que, pour μ-presque tout $x \in A$, si, pour tout $k \geq 0$, $T^k(x) \in A$, alors, pour tout $k \geq 0$, $T^{-k}(x) \in A$; on pourra comparer $\mu(A_+)$, $\mu(A_-)$ et $\mu(A_+ \cap A_-)$, avec

$$A_+ = \bigcap_{k \geq 0} T^k(A) \quad \text{et} \quad A_- = \bigcap_{k > 0} T^{-k}(A).$$

Solution. —

1. — Soient $E = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$, μ la probabilité uniforme (égale à $1/2$ sur les singletons) et T l'unique permutation non triviale de E. Alors $T(\mu) = \mu$.

Si maintenant $\mu = \delta_0$, T ne préserve pas μ puisque

$$T(\mu)(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 0 \neq \mu(\{0\}) = 1.$$

2. — On a

$$\begin{aligned}
\mu(A_+) &= \mu(T^{-\ell}(A_+)) && (\forall \ell \geq 0, \text{ par invariance de } \mu \text{ par } T) \\
&= \mu\left(\bigcap_{-\ell < k < +\infty} T^k(A) \right) && (\forall \ell \geq 0) \\
&= \mu\left(\bigcap_{-\infty < k < +\infty} T^k(A) \right) && (\text{continuité extérieure de } \mu) \\
&= \mu(A_+ \cap A_-) \\
&= \mu(A_-) && (\text{par symétrie}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mu(A_+ \setminus (A_+ \cap A_-)) = \mu(A_- \setminus (A_+ \cap A_-)) = 0.$$

En particulier, par exemple,

$$\mu(A_+ \setminus A_-) = 0,$$

autrement dit, au sein de A, la probabilité de rester dans A dans le futur et pas dans le passé est nulle.

3. Une fonction de Bessel modifiée

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$B(x) = \int_0^\pi e^{x \cos t} \cos t \, dt$$

(la fonction B s'appelle une *fonction de Bessel à argument imaginaire*).

1. — Justifier que la fonction B est continue sur $\mathbb{R}$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

L'objectif de la suite est de trouver un équivalent asymptotique de $B(x)$ quand x tend vers l'infini.

2. — Montrer avec le changement de variable $u = x(1 - \cos t)$ que

$$B(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2x}} \int_0^{2x} e^{-u} \frac{1 - u/x}{\sqrt{u}\sqrt{1 - u/(2x)}} \, du.$$

3. — Que dit le théorème de convergence dominée au sujet de cette expression intégrale de B ?

4. — Montrer que, lorsque x tend vers l'infini,

$$\int_x^{2x} e^{-u} \frac{1 - u/x}{\sqrt{u}\sqrt{1 - u/(2x)}} \, du \to 0;$$

on pourra majorer e^{-u} par e^{-x}, puis faire le changement de variable $u = xv$.

5. — En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ qu'on déterminera, telle que B possède l'équivalent asymptotique suivant, quand x tend vers l'infini :

$$B(x) \sim C \frac{e^x}{\sqrt{x}};$$

on pourra utiliser l'égalité suivante sans la démontrer : $\int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} \, du = \sqrt{\pi}$.

6. — $*$ Trouver le terme suivant dans le développement asymptotique.

Solution. —

1. — Soit (x_n) une suite réelle convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Notons

$$f_n(t) = e^{x_n \cos t} \cos t.$$

Comme, pour tout t, la fonction $x \mapsto e^{x \cos t} \cos t$ est continue, $(f_n(t))$ converge vers $e^{x \cos t} \cos t$. De plus, (x_n) est bornée, disons $|x_n| \le C$, donc

$$|f_n| \le e^C \in \mathcal{L}^1([0, \pi]).$$

Par convergence dominée,

$$B(x_n) = \int_0^\pi e^{x_n \cos t} \cos t \, dt \to \int_0^\pi e^{x \cos t} \cos t \, dt = B(x).$$

Donc B est continue sur $\mathbb{R}$.

2. — Calcul direct d'application de la formule du changement de variable dans une intégrale de Riemann.

3. — La fonction $f_x : u \mapsto \frac{1-u/x}{\sqrt{u}\sqrt{1-u/(2x)}}$ n'est pas bornée au voisinage de $u = 2x$, donc n'est dominée p.p. par aucune fonction intégrable g. Donc le théorème de convergence dominée ne s'applique pas directement quand x tend vers l'infini.

Justifions plus précisément l'absence de domination intégrable. Soit g une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$, et supposons qu'elle domine les f_x ($f_x(u) \le g$ p.p.) pour x assez grand, disons $x \ge X \ge 0$. Comme g est intégrable, elle est finie presque partout. En particulier, il existe $u_0 = 2x_0 > 2X$ tel que $g(u_0) < \infty$. Or, quand $u \to u_0^-$, $f_{x_0}(u) \to +\infty$. Donc il existe $u_1 \in]2X, u_0[$ tel que $f_{x_0}(u) > g(u_0)$ sur $[u_1, u_0[$, intervalle de mesure de Lebesgue > 0. Donc g ne domine pas toutes $(f_x)_{x \ge X}$ p.p.

4. — On a

$$\begin{aligned}
\int_x^{2x} e^{-u} \frac{1-u/x}{\sqrt{u}\sqrt{1-u/(2x)}} \, du &\le e^{-x} \int_x^{2x} \frac{1-u/x}{\sqrt{u}\sqrt{1-u/(2x)}} \, du \\
&= e^{-x} \sqrt{x} \int_1^2 \frac{1-v}{\sqrt{v}\sqrt{1-v/2}} \, du \qquad (u = xv) \\
&\to 0 \quad \text{quand } x \to +\infty.
\end{aligned}$$

5. — Soit $f_x(u) = e^{-u} \frac{1-u/x}{\sqrt{u}\sqrt{1-u/(2x)}} \mathbb{1}_{[0,x]}(u)$. On a

$$f_x(u) \to_{x \to +\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$$

et, si $u \in [0, x]$,

$$|f_x(u)| \le e^{-u} \sqrt{\frac{2}{u}} \in \mathcal{L}^1([0, +\infty], du)$$

(la majoration est vraie sur $[0, x]$, où $1 - u/(2x) \ge 1/2$, et est triviale sur $[x, +\infty[$). Par convergence dominée,

$$\int_0^x f_x(u) \, du \to \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \, du = \sqrt{\pi}.$$

Donc
$$B(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^x.$$

6. — En développant
$$\frac{1-u/x}{\sqrt{1-u/(2x)}} = 1 - \frac{3}{4}\frac{u}{x} + O\left(\frac{u}{x^2}\right),$$
on voit que
$$B(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2x}} \int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(1 - \frac{3u}{4x} + O\left(\frac{u^2}{x^2}\right)\right) du.$$
Le premier terme est celui calculé dans la question précédente. Le second est lui-même équivalent à
$$\frac{e^x}{\sqrt{2x}} \left(-\frac{3}{4x}\right) \int_0^\infty e^{-u}\sqrt{u}\, du,$$
où
$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-u}\sqrt{u}\, du &= 2\int_0^\infty e^{-v^2} v^2\, dv && (u = v^2)\\
&= \int_0^\infty e^{-v^2}\, dv && \text{(intégration par parties)}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} && \text{(intégrale gaussienne classique).}
\end{aligned}$$
Donc, quand x tend vers l'infini,
$$B(x) = e^x \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 - \frac{3}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$