

Partiel du 8 novembre 2011

Deux heures. Sans document, ni calculatrice, ni téléphone, etc.

**Exercice 1 Mesures**

Soient  $\mu$  et  $\nu$  les mesures sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  définies par

$$\mu = \sum_{n \geq 1} e^{-n} \delta_{1/n} \quad \text{et} \quad \nu = \sum_{n \geq 1} e^n \delta_{1/n},$$

où  $\delta_a$  est la mesure de Dirac en  $a \in \mathbb{R}$  (on admettra que ce sont des mesures positives).

1. Les mesures  $\mu$  et  $\nu$  sont-elles finies? de probabilité?  $\sigma$ -finies?
2. Calculer  $\mu(\{0\})$ ,  $\mu([0, 1/k])$  ( $k \geq 1$ ) et  $\lim_k \mu([0, 1/k])$ . Comparer les résultats.
3. Faire de même avec  $\nu$ .

**Solution de l'exercice 1**

1. Comme  $1/n \in \mathbb{R}$  pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n \geq 1} e^{-n} = \frac{e}{1 - e^{-1}}$$

et  $\mu$  est finie;  $\mu$  n'est pas une probabilité parce que  $e^2 \neq e - 1$  (puisque par exemple  $2 \leq e \leq 3$ , donc  $e^2 \geq 4$  tandis que  $e - 1 \leq 2$ ).

De même,

$$\nu(\mathbb{R}) = \sum_{n \geq 1} e^n = +\infty$$

donc  $\nu$  est infinie (et n'est pas une probabilité). Mais  $\nu$  est  $\sigma$ -finie, puisque

$$\mathbb{R} = \bigcup_n ]0, 1/n], \quad \text{avec } \nu(]0, 1/n]) = \sum_{1 \leq k < n} e^k < \infty.$$

2. Comme  $1/n \neq 0$  quel que soit  $n \geq 1$ ,  $\mu(\{0\}) = 0$ . Comme  $1/n \in [0, 1/k]$  si et seulement si  $n \geq k$ ,

$$\mu([0, 1/k]) = \sum_{n \geq k} e^{-n} = \frac{e^{-k}}{1 - e^{-1}}.$$

Le fait que  $\mu([0, 1/k]) \rightarrow_k \mu(\{0\})$  pouvait être prévu par le fait général qu'une mesure finie est continue extérieurement.

En revanche, la mesure infinie  $\nu$  n'est pas continue extérieurement puisque  $\nu(\{0\}) = 0$ , tandis que

$$\nu([0, 1/k]) = \sum_{n \geq k} e^n = +\infty \rightarrow +\infty.$$

## Exercice 2      Dés truqués

1. On jette deux dés non pipés. Calculer la loi de la somme des points. Indication : Calculer la fonction génératrice de la somme des points.
2. Peut-on truquer deux dés indépendants de façon que la somme des points soit équirépartie ? Indication : Étudier les racines complexes de la fonction (polynomiale) génératrice de la somme, et en déduire que cette fonction ne peut pas engendrer la loi uniforme.

### Solution de l'exercice 2

1. On pourrait répondre à cette question par un simple raisonnement de dénombrement. Nous allons passer par les fonctions génératrices, ce qui facilitera la résolution de la seconde question.

Soient  $X_i$ ,  $i = 0, 1$ , les variables aléatoires correspondant aux deux dés jetés, et  $S = X_0 + X_1$ . Soient  $G_i$  et  $G_S$  les fonctions génératrices associées :

$$G_i(s) = \sum_{1 \leq k \leq 6} P(X_i = k) s^k \quad \text{et} \quad G_S(s) = \sum_{2 \leq k \leq 12} P(S = k) s^k.$$

Comme les dés sont non pipés, la loi de  $X_i$ ,  $i = 0, 1$ , est uniforme et

$$G_i(s) = \frac{1}{6} \sum_{1 \leq k \leq 6} s^k.$$

Comme les variables aléatoires  $X_0$  et  $X_1$  sont indépendantes,

$$\begin{aligned} G_S(s) &= G_0(s) G_1(s) = \frac{1}{36} \left( \sum_{1 \leq k \leq 6} s^k \right)^2 \\ &= \frac{1}{36} (s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 4s^5 + 5s^6 + 6s^7 + 5s^8 + 4s^9 + 3s^{10} + 2s^{11} + s^{12}), \end{aligned}$$

expression développée dans laquelle on lit la probabilité  $P(S = k)$  cherchée sur le coefficient de  $s^k$ .

2. Montrons qu'on ne peut pas choisir la loi des dés de façon que la somme soit équirépartie. La fonction génératrice d'une variable aléatoire  $S$  équirépartie serait le polynôme de degré 12

$$G_S(s) = \frac{1}{11} \sum_{2 \leq k \leq 12} s^k = \frac{s^2}{11} \frac{s^{11} - 1}{s - 1},$$

dont les racines sont 0 (avec multiplicité deux) et les dix racines 11-ièmes de l'unité distinctes de 1, soit  $\exp ki2\pi/11$ ,  $k = 1, \dots, 10$ .

D'autre part, comme  $G_i(0) = 0$  (par définition d'un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6), les polynômes  $G_i(s)$  sont de la forme  $sQ_i(s)$ , où  $Q_i(s)$  est un polynôme de degré  $\leq 5$ . Si les deux tirages sont indépendants, la loi de la somme est

$$G_0(s)G_1(s) = s^2 Q_0(s)Q_1(s).$$

On voudrait que ce produit soit de degré 12, donc forcément que les  $Q_i(s)$  soient chacun de degré 5. Mais alors les  $Q_i(s)$ , de degré impair, possèdent chacun une racine réelle, et leur produit ne peut pas être  $(s^{11} - 1)/11(s - 1)$ .

### Exercice 3 Transformée de Laplace d'une mesure

Soit  $\mu$  une mesure finie sur  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ . La fonction

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, +\infty], \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} e^{-tx} d\mu(t)$$

est-elle finie? continue? dérivable?

#### Solution de l'exercice 3

Remarquons déjà que la fonction  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, +\infty]$  est bien définie parce que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  la fonction  $t \mapsto e^{-tx}$  est continue donc borélienne, et positive.

Comme  $e^{-tx} \leq 1$ , et comme  $\mu$  est finie, on a

$$f(x) \leq \int_{\mathbb{R}^+} d\mu < +\infty.$$

De plus, pour tout  $t$  la fonction  $x \mapsto e^{-tx}$  est continue, et pour tout  $x$  la fonction  $t \mapsto e^{-tx}$  est dominée par la fonction  $\mu$ -intégrable constante égale à 1. D'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre (le paramètre, ici, est  $x$ ),  $f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}^+$  (ce qui découlera aussi de la dérivabilité de  $f$  démontrée ci-dessous).

Montrons enfin que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ . Soient  $x \geq 0$  fixé et  $h$  petit (si  $x = 0$ , on suppose  $h \geq 0$ ). Le taux d'accroissement de  $f$  entre  $x$  et  $x + h$  vaut

$$\tau_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{-tx}}{h} (e^{-th} - 1) d\mu(t).$$

Or, d'après la formule de Taylor avec reste intégral,  $e^u - 1 = u\theta(u)$ , où  $\theta$  est la fonction  $C^\infty$  définie par

$$\theta(u) = \int_0^1 e^{us} ds.$$

Donc

$$\tau_x(h) = - \int_{\mathbb{R}^+} t e^{-tx} \theta(-th) d\mu(t).$$

Si réel  $x$  fixé est  $> 0$ , la fonction  $t \mapsto te^{-tx}$  est bornée, donc  $\mu$ -intégrable et alors la famille indexée par  $h$  de fonctions  $t \mapsto e^{-tx}\theta(-th)$  est dominée par une fonction  $d\mu(t)$ -intégrable indépendante de  $h$  :

$$|e^{-tx}\theta(-th)| \leq Cte \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

De plus, pour tout  $t \geq 0$ , la limite simple de la fonction  $h \mapsto te^{-tx}\theta(-th)$  en 0 est  $te^{-tx}\theta(0) = te^{-tx}$ . Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\tau_x(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} - \int_{\mathbb{R}^+} te^{-tx} d\mu(t) \in \mathbb{R}^+.$$

Donc  $f$  est dérivable en  $x > 0$  et

$$f'(x) = - \int_{\mathbb{R}^+} te^{-tx} d\mu(t) \in \mathbb{R}^+.$$

Si  $x = 0$ , le même raisonnement montre que  $f$  est dérivable (à droite) en  $x = 0$  si et seulement si  $t \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , auquel cas

$$f'(0) = - \int_{\mathbb{R}^+} t d\mu(t) \in \mathbb{R}^+.$$

### Exercice 4 Mesurabilité par rapport à une variable aléatoire

Soient  $X$  et  $Y$  deux fonctions  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $\sigma(X)$  l'ensemble des parties  $X^{-1}(B)$  avec  $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ .

1. Montrer que  $\sigma(X)$  est une tribu. On l'appelle la *tribu engendrée* par  $X$ .
2. Montrer que s'il existe une fonction borélienne  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $Y = f \circ X$ , la fonction  $Y : (\Omega, \sigma(X)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  est mesurable.
3. Montrer la réciproque, d'abord dans le cas où  $Y$  est étagée positive, puis dans le cas général.

#### Solution de l'exercice 4

1.  $\emptyset = X^{-1}(\emptyset)$  et  $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R})$ , donc  $\emptyset, \Omega \in \sigma(X)$ . De plus, si  $A \in \sigma(X)$ , par définition il existe un borélien  $B$  tel que  $A = X^{-1}(B)$ . Par stabilité de la tribu borélienne par passage au complémentaire,  $\bar{A}$  lui-même est borélien, et

$$\bar{A} = \mathbb{C}X^{-1}(B) = X^{-1}(\bar{B}) \in \sigma(X).$$

Enfin, si  $(A_n)$  est une suite de  $\sigma(X)$ , pour tout  $n$  il existe un borélien  $B_n$  tel que  $A_n = X^{-1}(B_n)$ , donc

$$\cup_n A_n = \cup_n X^{-1}(B_n) = X^{-1}(\cup_n B_n) \in \sigma(X).$$

Donc  $\sigma(X)$  est une tribu sur  $\Omega$ .

2. S'il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne telle que  $Y$  est de la forme  $f \circ X$ , pour tout borélien  $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  on a

$$Y^{-1}(B) = (f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B)).$$

Comme  $f$  est borélienne  $f^{-1}(B)$  est une partie borélienne de  $\mathbb{R}$ . Donc  $Y^{-1}(B)$  appartient à  $\sigma(X)$  par définition.

3. Supposons que  $Y$  est  $\sigma(X)$ -mesurable et montrons qu'il existe une fonction borélienne  $f$  telle que  $Y = f \circ X$ .  
— Supposons d'abord que  $Y$  est en plus une fonction étagée :

$$Y = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i},$$

avec  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  et  $A_i \in \sigma(X)$ . Par définition de  $\sigma(X)$ , il existe des parties boréliennes de  $\mathbb{R}$  telles que  $A_i = X^{-1}(B_i)$ . Alors

$$\mathbb{1}_{A_i} = \mathbb{1}_{X^{-1}(B_i)} = \mathbb{1}_{B_i} \circ X,$$

et il suffit de poser

$$f = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}$$

pour avoir  $Y = f \circ X$ . Cette fonction  $f$  est bien borélienne. (On remarque que  $f$  n'est généralement pas du tout unique, puisque  $f$  ne subit aucune contrainte, si ce n'est de mesurabilité, en dehors des valeurs prises par  $X$ .)

— Traitons maintenant le cas général d'une fonction  $Y$  quelconque. Soit  $(Y_n)$  une suite de fonctions étagées convergeant simplement vers  $Y$  (pour voir l'existence d'une telle suite en se ramenant strictement au cours, on peut décomposer  $Y$  en la différence  $Y^+ - Y^-$  de

ses parties positives et négatives, invoquer l'existence de suites croissantes d'approximations étagées de  $Y^+$  et  $Y^-$ , puis former la différence de ces suites). Comme les  $Y_n$  sont étagées, d'après le cas particulier précédent, il existe des fonctions boréliennes  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $Y_n = f_n \circ X$ . L'ensemble de convergence  $C$

$$C = \{\liminf f_n = \limsup f_n\}$$

de la suite  $(f_n)$  est borélien et, comme  $Y = \lim Y_n = \lim f_n \circ X$ ,  $C$  contient  $X(\Omega)$  (qui n'est pas forcément borélien!). Alors la fonction borélienne  $f$  par

$$f = (\lim f_n) \mathbb{1}_C$$

vérifie bien  $Y = f \circ X$ .