Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Examen de rattrapage de septembre 2012

Deux heures. Sans document, ni calculatrice, ni téléphone, etc.
Chaque question numérotée vaut le même nombre de points. Chaque réponse doit être justifiée.

1 Soit T une application $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{A})$ d'un espace mesurable dans lui-même. Les ensembles de parties $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{A},\ T^{-1}(A) = A\}$ et $\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{A},\ T(A) = A\}$ sont-ils toujours des tribus de Ω ?

2 Soient $X : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ et $Y : (F, \mathcal{F}) \to (G, \mathcal{G})$ deux applications mesurables entre espaces mesurables. Montrer que $Y \circ X$ est mesurable, et donner un exemple tel que $Y \circ X$ soit mesurable sans que X et Y soient toutes deux mesurables.

3 Soit $\Omega = [0,1]^2$ muni de la mesure de Lebesgue. Construire un exemple de couple (X, Y) de variables aléatoires réelles indépendantes sur Ω. Les variables X et Y peuvent-elles avoir même loi ?

4 Montrer qu'une variable aléatoire $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possédant une densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est symétrique (au sens que X et $-X$ ont même loi) si et seulement si l'on peut choisir f paire (au sens que $f(x) = f(-x)$).

5 Soient X de loi gaussienne $N(0,1)$ et $a > 0$. Montrer que

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq a \\ -X & \text{si } |X| > a \end{cases}$$

aussi est gaussien de loi $N(0,1)$.

6 Soit (X, Y) un vecteur gaussien bidimensionnel tel que les variances σ_X^2 et σ_Y^2 soient non nulles. On note $\rho = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1, 1]$ le coefficient de corrélation de X et Y. À quelle condition sur ρ le couple (X, Y) admet-il une densité ? Dans ce cas, quelle est cette densité en fonction de $\mu_X = E(X)$, $\mu_Y = E(Y)$, σ_x, σ_Y et ρ ?

7 Soit pour tout entier n une variable aléatoire X_n de loi $N(\mu_n, \sigma_n^2)$. Supposons que la suite (X_n) converge en loi vers X. Montrer que les suites (μ_n) et (σ_n^2) elles-mêmes ont des limites $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \geq 0$ et que X est de loi $N(\mu, \sigma^2)$.

8 Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable qui possède une limite $f(1^-) \in \mathbb{R}_*$ à gauche en 1. Montrer que, quand n tend vers $+\infty$, on a $\int_0^1 x^n\, f(x)\, dx \sim \frac{f(1^-)}{n}$.

9 Soient $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles de $\mathcal{L}^2$ telles que X_n tende vers X dans $\mathcal{L}^2$. Montrer que $E(X_n^2)$ tend vers $E(X^2)$; on pourra utiliser l'identité $x^2 - y^2 = 2x(x-y) - (x-y)^2$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

10 Soient $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$ et (U_n) une suite de variable aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans $[0,1]$. Quelle est la limite presque sûre quand $n \to +\infty$ de $\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} f(U_k)$? Que dit le théorème central limite sur la vitesse de convergence en fonction de n ?

Corrigé

1 $\mathcal{I}$ est une tribu : $T^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ donc $\emptyset \in \mathcal{I}$; si $A \in \mathcal{I}$, $T^{-1}(\complement A) = \complement T^{-1}(A) = \complement A$ donc $\complement A \in \mathcal{I}$; et si $A_n \in \mathcal{I}$, $T^{-1}(\cup_n A_n) = \cup_n T^{-1}(A_n) = \cup_n A_n$ donc $\cup_n A_n \in \mathcal{I}$.
En revanche, $\mathcal{J}$ n'en est pas toujours une : si $\Omega = \{0,1\}$ et $T : x \mapsto 0$, $\Omega \notin \mathcal{J}$ donc $\mathcal{J}$ n'est pas une tribu.

2 Si $C \in \mathcal{G}$, $Y^{-1}(C) \in \mathcal{F}$ donc $(Y \circ X)^{-1}(C) = X^{-1}(Y^{-1}(C)) \in \mathcal{E}$.
En revanche, Si $X : E \to F$ est non mesurable et si $Y = 0 : F \to G = \mathbb{R}$, $Y \circ X = 0 = \mathbb{1}_\emptyset$ est mesurable bien que X ne le soit pas.

3 Soient X et Y de la forme $X(x_1, x_2) = \xi(x_1)$ et $Y(x_1, x_2) = \eta(x_2)$. Alors elles sont indépendantes, puisque quelles que soient deux fonctions mesurables positives f, g sur $\mathbb{R}$, $E(f \circ X g \circ \eta) = E(f \circ X)E(g \circ Y)$ d'après le théorème de Fubini. Si de plus $\xi = \eta$, $P_X = P_Y$.

4 Supposons que P_X admet une densité paire f. Pour tout borélien B, D'après la formule du changement de variable ($x \mapsto -x$) on a

$$P(-X \in B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(-x)\, f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)\, f(x)\, dx = P(X \in B).$$

Réciproquement, si $P_X = P_{-X}$, pour tout borélien B on a

$$\int \mathbb{1}_B(x)\, (f(x) - f(-x))\, dx = (P_X - P_{-X})(B) = 0,$$

donc f est paire dx-presque partout.

5 Notons $\gamma(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ la densité de X. Pour tout fonction borélienne positive f,

$$\begin{aligned}
E(f(Y)) &= \int f \circ Y\, dP \\
&= \int_{|X| \le a} f \circ X\, dP + \int_{|X| > a} f \circ (-X)\, dP \\
&= \int_{|X| \le a} f(x)\, \gamma(x)\, dx + \int_{|X| > a} f(-x)\, \gamma(x)\, dx \\
&= \int_{|X| \le a} f(x)\, \gamma(x)\, dx + \int_{|X| > a} f(x)\, \gamma(x)\, dx \quad \text{car } f \text{ est paire} \\
&= \int f(x)\, \gamma(x)\, dx,
\end{aligned}$$

donc γ est aussi la densité de Y.

6 La matrice de dispersion de (X, Y) est

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Le couple (X, Y) admet une densité si et seulement si le déterminant de D, qui vaut $\sigma_X^2\sigma_Y^2(1 - \rho^2)$, est non nul, soit $|\rho| \neq 1$, auquel cas cette densité vaut

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\det D}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)' \cdot D^{-1}(x - \mu)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - \frac{2\rho(x - \mu_X)(y - \mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}.$$

7 La fonction caractéristique

$$\varphi_{X_n}(u) = \exp\left(i\mu_n u - \frac{1}{2}\sigma_n^2 u^2\right)$$

de X_n tend p.s. vers la fonction caractéristique $\varphi_X(u)$ de X. Les moyennes m_n et variances σ_n^2 peuvent être récupérées en calculant les quantités

$$m_n = u^{-1}\mathrm{Arg}\,\varphi_{X_n}(u) \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 = -2u^{-2}\log|\varphi_{X_n}(u)|$$

(pour tout $u \neq 0$), qui convergent presque sûrement respectivement vers

$$m = u^{-1}\mathrm{Arg}\,\varphi_X(u) \quad \text{et} \quad \sigma^2 = -2u^{-2}\log|\varphi_X(u)|.$$

On en déduit que φ_{X_n} converge p.s. vers

$$\exp\left(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right)$$

et que donc la loi de X est $N(\mu, \sigma^2)$.

8 Cette question avait été posée à l'examen de janvier 2011. Comme f a une limite finie quand x tend vers 1, il existe deux réels $\alpha \in [0,1[$ et $M > 0$ tels que $|f(x)| \leq M$ sur $[\alpha, 1]$.
Notons $f_n(x) = nx^n f(x)$. Quand n tend vers $+\infty$, la suite (f_n) tend simplement vers 0 sur $[0, \alpha]$. En outre, comme nx^n tend vers 0, on a $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ sur $[0, \alpha]$ à partir d'un certain rang. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^\alpha nx^n f(x)\,dx \to 0$.
Par ailleurs on a

$$\int_\alpha^1 nx^n f(x)\,dx = \int_{\alpha^n}^1 y^{1/n} f(y^{1/n})\,dy.$$

Or la suite des fonctions $y^{1/n} f(y^{1/n}) \mathbb{1}_{[\alpha^n,1]}$ tend simplement vers la fonction constante $f(1^-)$ et elle est majorée en valeur absolue par la fonction constante M, qui est intégrable sur $[0,1]$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_\alpha^1 nx^n f(x)\,dx \to \int_0^1 f(1^-)\,dy = f(1^-).$$

Finalement, $nI_n \to f(1^-)$, et, si $f(1^-) \neq 0$,

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx \sim \frac{f(1^-)}{n}.$$

9 On suppose que $\int (X_n - X)^2$ tend vers 0 et l'on veut montrer que $\int (X_n^2 - X^2)$ tend vers 0. L'identité $x^2 - y^2 = 2x(x-y) - (x-y)^2$ appliquée au cas où $x = |X|$ et $y = |X_n|$ montre que

$$\int (X_n^2 - X^2) = 2\int |X|(|X| - |X_n|) - \int (|X| - |X_n|)^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le premier terme est majoré par

$$2\sqrt{\int X^2}\sqrt{\int (X - X_n)^2} \to 0,$$

et d'après l'inégalité triangulaire le second est majoré par

$$\int |X - X_n|^2 \to 0.$$

10 D'après la loi forte des grands nombres, $\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n} f(U_k)$ tend presque sûrement vers $E(f(U_1)) = \int_{[0,1]} f(u)\,du$. D'après le théorème central limite, la vitesse de convergence est en $1/\sqrt{n}$.