Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Examen de rattrapage de juillet 2013

Deux heures. Sans document, ni calculatrice, ni téléphone, etc.
Le barême indiqué est approximatif.

Exercice 1 (*2 points*) Soient $f : E \to F$ une application, $\mathcal{E}$ une tribu sur E et $\mathcal{F}$ une tribu sur F. Les ensembles

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(B),\, B \in \mathcal{F}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} := \{f(A),\, A \in \mathcal{E}\}$$

sont-ils toujours des tribus ? On justifiera la réponse en utilisant la définition d'une tribu.

Exercice 2 (*2 points*) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-tribus indépendantes de $\mathcal{A}$, et X une v.a.r. mesurable à la fois par rapport à $\mathcal{F}$ et à $\mathcal{G}$. Montrer que X est constante presque partout ; on pourra commencer par montrer que, pour tout borélien $B \in \mathbb{R}$, $P(X \in B) = 0$ ou 1.

Exercice 3 (*2 points*) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi $N(0, \sigma^2)$. Soient

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{et} \quad \Theta = \operatorname{Arctan} \frac{Y}{X}.$$

Calculer les lois de R et de Θ.

Exercice 4 (*2 points*) Soient D une matrice carré symétrique et X un vecteur gaussien de loi $N(0, D)$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que les composantes de $Y = PX$ soient indépendantes.

Exercice 5 (*4 points*)

1. Montrer que la suite
$$c_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$
converge vers un nombre γ (appelé *constante d'Euler*). Montrer de plus que
$$\int_1^n \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx \to \gamma,$$
où $[x]$ désigne la partie entière de x, et en déduire que $\gamma > 0$.
2. (*) Montrer que
$$\gamma = -\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x} \ln x \, dx;$$
on pourra faire tendre n vers l'infini dans l'intégrale $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx$.

Exercice 6 Convergence en mesure (*8 points*) Soit (X_n) une suite de v.a.r.i.i.d. de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme dans $[0,1]$. Soit
$$Y_n = e^{-nX_1} + \cdots + e^{-nX_n}.$$
L'objectif est de calculer la limite de $P(Y_n < 1)$ quand n tend vers l'infini.

On définit la *transformée de Laplace* d'une v.a.r. positive Z ou d'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ comme les fonctions respectives
$$L(Z)(u) = \int_\Omega e^{-uZ} \, dP \quad \text{et} \quad L(f)(u) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ux} f(x) \, dx,$$
là où elles existent ($u \in \mathbb{R}$).

1. Deux entiers $n, k \geq 1$ étant fixés, exprimer la transformée de Laplace de $Z = e^{-nX_k}$ comme une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$; en déduire une expression de $L(Y_n)(u)$.

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ qui vaut 1 sur $[0,1]$, et qui vérifie
$$xf'(x) = -f(x-1)$$
presque partout sur $]1, +\infty[$. On admettra que sa transformée de Laplace existe sur $\mathbb{R}$.

2. (*) Montrer que
$$L(f)(u) = e^\gamma \exp\left(\int_0^u \frac{e^{-s} - 1}{s} \, ds\right),$$
où γ est la constante d'Euler (définie dans l'exercice 5) ; pour calculer le facteur e^γ, on pourra calculer la limite de $uL(f)(u)$ de deux façons différentes.

3. Montrer que $L(Y_n)$ converge uniformément vers $e^{-\gamma}L(f)$.

On admettra ici pouvoir en déduire que Y_n converge en loi vers $e^{-\gamma}f$. On en déduit alors directement que la limite de $P(Y_n < 1)$ vaut $e^{-\gamma}$.

Solution de l'exercice 1 $\mathcal{A}$ ainsi défini est toujours une tribu :

- $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{A}$
- Si $A \in \mathcal{A}$, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $A = f^{-1}(B)$, donc
$$\complement A = \complement f^{-1}(B) = f^{-1}(\complement B) \in \mathcal{A}.$$
- Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, il existe $B_1, B_2, ... \in \mathcal{F}$ tels que $A_i = f^{-1}(B_i)$, donc
$$\bigcup A_i = \bigcup f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcup B_i\right) \in \mathcal{A}.$$

En revanche, $\mathcal{B}$ n'est pas forcément une tribu, comme le montre l'exemple suivant. Soient $E = F = \{0,1\}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ et $f : x \mapsto 0$. Alors
$$\mathcal{B} = \{\emptyset, \{0\}, F\}$$
n'est pas stable par complémentation.

Solution de l'exercice 2 Pour tout borélien B de $\mathbb{R}$,
$$P(X \in B) = P(X \in B \ \cap\ X \in B) = P(X \in B)^2,$$
donc
$$P(X \in B) \in \{0,1\}.$$

Soient maintenant x et y tels que $P(X = x) > 0$ et $P(X = y) > 0$. Comme ces deux probabilités sont non nulles, d'après ce qui précède elles valent 1. Or $\{X = x\}$ et $\{X = y\}$ sont soit confondues soit d'intersection vide selon que $x = y$ ou pas. Deux parties distinctes ne pouvant pas être l'une et l'autre être certaines, $x = y$. Donc X est constante presque partout.

Solution de l'exercice 3 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction borélienne,
$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(R)\,dP &= \int_\Omega f(\sqrt{X^2+Y^2})\,dP \\
&= \int_{\Omega^2} f(\sqrt{X^2+Y^2})\,dP^{\otimes 2} && \text{(indépendance)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty f(r) e^{-r^2/2\sigma^2}\,r\,dr\right)d\theta && \text{(passage en polaires)} \\
&= \int_0^\infty f(r)\,\frac{r}{\sigma^2}\,e^{-r^2/2\sigma^2}\,dr,
\end{aligned}$$

donc la loi de R a pour densité

$$\frac{r}{\sigma^2}\, e^{-r^2/2\sigma^2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(r)$$

(on dit que R suit une loi de Rayleigh).

De même,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(\Theta)\, dP &= \int_\Omega f\left(\operatorname{Arctan}\frac{Y}{X}\right)\, dP \\
&= \int_{\Omega^2} \left(\operatorname{Arctan}\frac{Y}{X}\right)\, dP^{\otimes 2} && \text{(indépendance)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f\left(\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\right)\, \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}\, dx\, dy \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta)\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{\mathbb{R}} r\, e^{-r^2/2\sigma^2}\, dr\right)\, d\theta
\end{aligned}$$

donc la densité de Θ est

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{\mathbb{R}} r\, e^{-r^2/2\sigma^2}\, dr = \frac{1}{2\pi},$$

et Θ suit la loi uniforme.

Solution de l'exercice 4 Soit P une matrice orthogonale telle que PDP^{-1} soit une matrice diagonale Λ. La matrice de covariance de $Y = PX$ est $PDP^t = PDP^{-1} = \Lambda$. Comme de plus Y est gaussien, les composantes de Y sont indépendantes.

Solution de l'exercice 5

1. Quand n tend vers l'infini,

$$\begin{aligned}
c_{n+1} - c_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\sim -\frac{1}{2n^2}.
\end{aligned}$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, celle de terme général $|c_{n+1} - c_n|$ aussi, donc c_n converge ; on note γ sa limite.

Notons $f(x) := \frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}$. On a

$$\int_1^n \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right)\, dx = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - \ln n = c_n - \frac{1}{n} \to \gamma.$$

Par ailleurs, la fonction f est positive, donc, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\int_1^n f(x)\,dx \to \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Donc

$$\gamma = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Cette dernière intégrale est >0 parce que f est ≥ 0 partout, et continue >0 presque partout.

2. Pour commencer, on a

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,dx \to \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx.$$

En effet, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x \mathbf{1}_{[0,n]}$ converge simplement vers $e^{-x}\ln x$, et

$$0 \leq 1-\frac{x}{n} \leq e^{-x/n} \quad (\forall 0 \leq x \leq n),$$

donc

$$0 \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \quad (\forall 0 \leq x \leq n),$$

donc

$$0 \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x \mathbf{1}_{[0,n]}(x) \leq e^{-x}\ln x \in L^1,$$

donc les hypothèses sont satisfaites pour appliquer le théorème de convergence dominée.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,dx &= n\int_0^1 (1-y)^n \ln(ny)\,dy \quad (x=ny)\\
&= \frac{n}{n+1}\ln n + n\int_0^1 (1-y)^n \ln y\,dy\\
&= \frac{n}{n+1}\ln n + n\int_0^1 z^n \ln(1-z)\,dz \quad (z=1-y)\\
&= \frac{n}{n+1}\ln n - n\int_0^1 \sum_{k\geq 1} \frac{z^{n+k}}{k}\,dz\\
&= \frac{n}{n+1}\ln n - n\sum_{k\geq 1}\int_0^1 \frac{z^{n+k}}{k}\,dz
\end{aligned}$$

d'après le théorème de convergence monotone, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,dx &= \frac{n}{n+1}\ln n - n\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(n+k+1)}\\
&= \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k+1}\right)\right]\\
&= \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \sum_{1\leq k\leq n+1}\frac{1}{k}\right]\\
&= \frac{n}{n+1}\left[-c_n - \frac{1}{n+1}\right]\\
&\to -\gamma.
\end{aligned}$$

Solution succinte de l'exercice 6

1. Si w est une v.a. positive sur $\mathbb{R}$, On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega w(Z)\,dP &= \int_0^1 w(e^{-nx})\,dx\\
&= \int_{e^{-n}}^1 w(z)\,\frac{dz}{nz},
\end{aligned}$$

donc la densité de Z est $\frac{1}{nz}$ sur $[e^{-n},1]$. La transformée de Laplace de Z est donc

$$L(Z)(u) = \frac{1}{n}\int_{e^{-n}}^1 \frac{e^{-uz}}{z}\,dz.$$

Comme les X_k sont indépendantes, on a

$$L(Y_n) = L(e^{-nX_1})...L(e^{-nX_n});$$

comme de plus elles ont même loi,

$$L(Y_n)(u) = \left(\frac{1}{n}\int_{e^{-n}}^1 \frac{e^{-uz}}{z}\,dz\right)^n.$$

2. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale,

$$\begin{aligned}
u(L(f)(u))' &= -u\int_0^\infty xf(x)e^{-ux}\,dx\\
&= \left[xf(x)e^{-ux}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-ux}(xf'(x)+f(x))\,dx\\
&= (e^{-u}-1)L(f)(u).
\end{aligned}$$

Donc
$$L(f)(u) = C\exp\int_0^u \frac{e^{-s}-1}{s}\,ds.$$
Calculons C. D'une part, d'après la définition de $L(f)$,
$$uL(f)(u) = \int_0^\infty e^{-x} f\left(\frac{x}{u}\right)\,dx,$$
donc, puisque la famille de fonctions est stationnaire quand u tend vers $+\infty$ (f valant 1 au voisinage de 0^+), on a
$$uL(f)(u) \to f(0)\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$
D'autre part,
$$\begin{aligned}\int_0^u \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx &= \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx + \int_1^u \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \ln u\\ &= -\ln u + \left(\int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx\right) + o(1),\end{aligned}$$
où le terme entre parenthèses est la limite quand A tend vers l'infini de
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx + \int_1^A \frac{e^{-x}}{x}\,dx &= \int_0^A \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx + \ln A\\ &= \left[\ln x(e^{-x}-1)\right]_0^A + \ln A + \int_0^A e^{-x}\ln x\,dx\\ &= \int_0^A e^{-x}\ln x\,dx\end{aligned}$$
soit, d'après le théorème de convergence dominée, $-\gamma$; donc, d'après l'expression obtenue de $L(f)$,
$$uL(f)(u) = Ce^{\gamma} + o(1).$$
Donc $C = e^{-\gamma}$.

3. D'après la première question,
$$\begin{aligned}nL(Z)(u) &= \int_{e^{-n}}^1 \frac{e^{-uz}}{z}\,dz\\ &= n + \int_{e^{-n}}^1 \frac{e^{-uz}-1}{z}\,dz\\ &= n + \int_0^1 \frac{e^{-uz}-1}{z}\,dz + O(e^{-n}).\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} L(Y_n)(u) &= \left(1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{e^{-zu}-1}{z}\,dz + O(e^{-n}/n)\right)^n \\ &\to \exp\left(\int_0^1 \frac{e^{-zu}-1}{z}\,dz\right) = e^{-\gamma}L(f)(u) \end{aligned}$$

uniformément.