Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Examen de rattrapage de juillet 2014

Deux heures — Sans document, ni calculatrice, ni téléphone, etc.
Les réponses doivent être concises, et les passages à la limite justifiés.
Chaque question numérotée sera notée sur environ deux points.

1. Questions indépendantes

1. — Montrer que $A = [0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$, et calculer sa mesure de Lebesgue.

2. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que, si f est continue ou monotone, f est borélienne. La réciproque est-elle vraie ?

3. — Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = -\mathbb{1}_{[n,+\infty[}$ sur $\mathbb{R}$. A-t-on $\lim \int f_n = \int \lim f_n$? Cela est-il compatible avec le théorème de convergence monotone ?

4. — Soit μ une mesure finie sur $([0,+\infty[, \mathcal{B}([0,+\infty[))$. La fonction

$$f : \mathbb{R}^+ \to [0,+\infty], \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} e^{-tx}\, d\mu(t)$$

est-elle finie ? continue ? dérivable ?

5. — Soit $\mathcal{A}$ la tribu des parties dénombrables ou de complémentaire dénombrable de $E = [0,1]$. Montrer qu'une fonction mesurable $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est constante en dehors d'une partie dénombrable, et en déduire l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{A}$ d'une fonction réelle borélienne intégrable définie sur E.

Solution. —

1. — L'ensemble $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, il est borélien et de mesure nulle. Donc $A = [0,1]^2 \cap \complement\mathbb{Q}$ est borélien et de mesure

$$\lambda(A) = \lambda([0,1]^2) - \lambda([0,1]^2 \cap \mathbb{Q}) = 1.$$

2. — Si f est continue, pour tout ouvert V de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(V)$ est ouvert, donc borélien. Comme les ouverts de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ engendrent la tribu borélienne, f est borélienne.

Supposons f monotone, et par exemple croissante. (Si f est décroissante, on considère $-f$ à la place, f et $-f$ étant simultanément boréliennes.) Si $x, y \in \mathbb{R}$ sont tels que $f(x) \le f(y)$, alors $x \le y$. Donc, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a])$ est un intervalle, donc est borélien. Comme les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, f est borélienne.

Réciproquement, il existe beaucoup de fonctions qui sont boréliennes sans être continues ni monotonem. Un exemple est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$.

3. — On a
$$\lim \int f_n = -\infty < \int \lim f_n = 0.$$
Ceci est compatible bien sûr avec le théorème de convergence monotone. Celui-ci en effet ne s'applique pas ici, bien que la suite (f_n) soit croissante, parce que les fonctions f_n ne sont pas positives.

4. — Remarquons déjà que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to [0, +\infty]$ est bien définie parce que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ la fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est continue donc borélienne, et positive.

Comme $e^{-tx} \leq 1$, et comme μ est finie, on a
$$f(x) \leq \int_{\mathbb{R}^+} d\mu < +\infty.$$

Pour montrer la continuité et la dérivabilité de f, une solution serait d'appliquer les théorèmes du cours. Autre solution plus élémentaire :

De plus, pour tout t la fonction $x \mapsto e^{-tx}$ est continue, et pour tout x la fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est dominée par la fonction μ-intégrable constante égale à 1. D'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre (le paramètre, ici, est x), f est donc continue sur $\mathbb{R}^+$ (ce qui découlera aussi de la dérivabilité de f démontrée ci-dessous).

Montrons enfin que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Soient $x \geq 0$ fixé et h petit (si $x = 0$, on suppose $h \geq 0$). Le taux d'accroissement de f entre x et $x + h$ vaut
$$\tau_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{-tx}}{h} \, (e^{-th} - 1) \, d\mu(t).$$
Or, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, $e^u - 1 = u\theta(u)$, où θ est la fonction C^∞ définie par
$$\theta(u) = \int_0^1 e^{us} \, ds.$$
Donc
$$\tau_x(h) = -\int_{\mathbb{R}^+} t \, e^{-tx} \theta(-th) \, d\mu(t).$$

Si x est un réel fixé > 0, la fonction $t \mapsto te^{-tx}$ est bornée, donc μ-intégrable et alors la famille indexée par h de fonctions $t \mapsto e^{-tx}\theta(-th)$ est dominée par une fonction $d\mu(t)$-intégrable indépendante de h :
$$|e^{-tx}\theta(-th)| \leq Cte \in \mathcal{L}^1(\mu).$$
De plus, pour tout $t \geq 0$, la limite simple de la fonction $h \mapsto te^{-tx}\theta(-th)$ en 0 est $te^{-tx}\theta(0) = te^{-tx}$. Donc d'après le théorème de convergence dominée,
$$\tau_x(h) \to_{h \to 0} -\int_{\mathbb{R}^+} te^{-tx} \, d\mu(t) \in \mathbb{R}^+.$$
Donc f est dérivable en $x > 0$ et
$$f'(x) = -\int_{\mathbb{R}^+} t \, e^{-tx} \, d\mu(t) \in \mathbb{R}^+.$$

Si $x = 0$, le même raisonement montre que f est dérivable (à droite) en $x = 0$ si et seulement si $t \in \mathcal{L}^1(\mu)$, auquel cas
$$f'(0) = -\int_{\mathbb{R}^+} t \, d\mu(t) \in \mathbb{R}^+.$$

5. — Montrons qu'une fonction $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable est constante en dehors d'une partie dénombrable.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable étagée. Ses ensembles de niveau $f^{-1}(y)$, $y \in f(E)$, forment une partition finie de E ; en particulier, si $y, z \in f(E)$, soit $f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$ (i.e. $y = z$) soit $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(z) = \emptyset$ (i.e. $y \neq z$).

Supposons que $y, z \in f(E)$ et que $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(z)$ soient non dénombrables. Leurs complémentaires sont dénombrables. Comme $f^{-1}(y)$ ne peut pas être contenu dans le complémentaire de $f^{-1}(z)$, forcément $y = z$. Donc il existe au plus une valeur $y \in f(E)$ telle que $f^{-1}(y)$ soit non dénombrable. Mais il existe forcément une telle valeur y parce que E est non dénombrable et parce que f prend un nombre fini de valeurs (l'union finie de parties dénombrables est dénombrable). Donc $f = y$ en dehors de l'ensemble dénombrable $\complement f^{-1}(y)$.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables étagées positives, convergeant vers f. Pour chaque fonction f_n, d'après le cas précédent il existe un réel y_n tel que $f_n = y_n$ en dehors d'une partie dénombrable A_n. En dehors de la partie dénombrable $\cup A_n$, $f_n = y_n \to f$; donc la suite réelle (y_n) converge vers un certain $y \in \mathbb{R}$, et $f = y$ en dehors de $\cup A_n$.

Pour une fonction f mesurable de signe quelconque, le cas précédent appliqué aux parties positive et négative de f montre que f est constante en dehors d'une partie dénombrable.

Soit enfin $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ intégrable (sous-entendu par rapport à la mesure de Lebesgue, i.e. la loi uniforme sur $[0, 1]$). D'après ce aui précède, puisque la mesure de Lebesgue d'une partie dénombrable est nulle, $E(f|\mathcal{A})$ est constante presque sûrement. Comme $E(E(f|\mathcal{A})) = E(f)$, cette constante doit être $E(f)$. Donc $E(f|\mathcal{A}) = E(f)$ p.s.

2. Sommes de variables de Cauchy

Soient U une variable aléatoire uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. — Trouver la loi de $C = \alpha \tan U$ et, si elles existent, son espérance et sa variance ; C s'appelle une *variable de Cauchy* de paramètre α.

2. — Calculer la transformée de Fourier inverse de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-|t|}$ et en déduire que la fonction caractéristique de C est $\Phi_C(t) = e^{-\alpha|t|}$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables de Cauchy indépendantes de paramètre α.

3. — Que la loi des grands nombres nous apprend-elle sur la limite, quand n tend vers l'infini, de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$?

4. — Déterminer, pour $n \geq 1$, les lois de $\bar{X}_n$ et de $\bar{X}_{2n} - \bar{X}_n$.

5. — La suite $(\bar{X}_n)$ converge-t-elle dans L^1 ? En probabilités ? Presque sûrement ?

Solution. —

1. — Si f est une fonction mesurable positive sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dP_C(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\alpha\tan u)\,\frac{du}{\pi} \qquad \text{(formule de transfert)}$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(c)\,\frac{dc}{\pi\alpha\left(1+\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2\right)} \qquad \text{(changement de variable),}$$

donc C a pour densité

$$\rho_C(c) = \frac{1}{\pi\alpha\left(1+\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2\right)}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue.

Quand c tend vers l'infini,

$$c\,\rho_C(c) \sim \frac{\alpha}{\pi c} \notin L^1(]0,+\infty[),$$

donc $C \notin L^1(\Omega)$: C n'a pas d'espérance, et a fortiori pas de variance.

2. — En coupant l'intégrale en deux, on voit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\,e^{-|t|}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(xt)\,e^{-t}\,dt.$$

Or, deux intégrations par parties montrent que

$$I := \int_0^{\infty} \cos(xt)\,e^{-t}\,dt = 1 - x^2 I,$$

donc

$$I = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc la transformée de Fourier inverse de $e^{-|t|}$ est

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\,e^{-|t|}\,dt = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Donc, d'après la formule d'inversion de Fourier,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,e^{-ixt}\,dx = e^{-|t|}.$$

Donc la fonction caractéristique de C est

$$\Phi_C(t) = E(e^{-iCt})$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-ict}\,\frac{1}{\pi\alpha\left(1+\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2\right)}\,dc \qquad \text{(première question)}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha xt}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx \qquad \text{(changement de variable } c=\alpha x\text{)}$$
$$= e^{-\alpha|t|} \qquad \text{(calcul précédent).}$$

3. — La loi des grands nombres ne s'applique pas à $\bar{X}_n$ parce que les X_i ne sont pas intégrables.

4. — En revanche, comme les X_i sont indépendantes, on voit que la fonction caractéristique de $\bar{X}_n$ satisfait

$$E\left(e^{i\bar{X}_n t}\right) = E\left(e^{iX_1 t/n}\right)^n = \left(e^{-\alpha|t|/n}\right)^n = e^{-\alpha|t|}.$$

Par injectivité de la transformation de Fourier des probabilités, $\bar{X}_n$ est donc aussi une variable de Cauchy de paramètre α.

De même,

$$E\left(e^{it(\bar{X}_{2n}-\bar{X}_n)}\right) = e^{\alpha|t|},$$

donc $\bar{X}_{2n} - \bar{X}_n$ suit aussi une loi de Cauchy de paramètre α.

5. — Par la même estimation que dans la première question, $\bar{X}_n$ ne converge donc pas dans L^1.

Supposons par l'absurde que $\bar{X}_n$ converge en probabilités, vers une variable Y. Alors $\bar{X}_{2n} - \bar{X}_n$ converge en probabilités vers 0. Or, d'après la question précédente, la loi de $\bar{X}_{2n} - \bar{X}_n$ est de Cauchy de paramètre $4/3$, indépendante de n. Donc pour tout $\epsilon > 0$, $P\left(|\bar{X}_{2n} - \bar{X}_n| > \epsilon\right)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui est absurde. Donc $\bar{X}_n$ ne converge pas en probabilités. A fortiori, $\bar{X}_n$ ne converge pas presque sûrement.