

Discrete Processes – Test – 15/09/2026

NOM et prénom / SURNAME and name : _____

Ce test ne compte pas dans la moyenne. Vous pouvez écrire en français ou en anglais.

This test does not count in the average. You can write in English or in French.

1. Citer (sans démontrer) 4 différentes implications qui valent entre les modes de convergence suivants : en probabilité, dans L^1 , dans L^2 , presque sûrement et en loi (citer 4 implications vraiment différentes, c'est-à-dire que si vous citez $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ alors $A \Rightarrow C$ ne compte pas comme une troisième implication!).

Cite (without a proof) 4 different implications which hold between the following modes of convergence : in probability, in L^1 , in L^2 , almost surely and in law (state 4 really different implications, that is to say, if you state $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$ does not count as a third implication!).

2. Démontrer 2 de ces implications. Prove 2 of these implications.

3. Est-il vrai que pour toutes variables aléatoires X , Y et Z , si X est indépendante de Y et X est indépendante de Z , alors X est indépendante du couple (Y, Z) ? Donner une preuve ou un contre-exemple précis.

Is it true that for any three random variables X , Y and Z , if X is independent of Y and X is independent of Z , then X is independent of the couple (Y, Z) ? Give a proof or a precise counter-example.

Tourner la page. Turn the page.

4. Est-il vrai que toute suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles converge en loi vers une variable X si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t)$ (où F_{X_n} est la fonction de répartition) ? Donner une preuve ou un contre-exemple précis.

Is it true that any sequence of real-valued random variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges in law to a variable X if and only if for every $t \in \mathbb{R}$, we have $F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t)$ (where F_{X_n} is the cumulative distribution function) ? Give a proof or a precise counter-example.

5. Énoncer et démontrer la loi faible des grands nombres. On pourra utiliser le théorème de continuité de Lévy, sans le redémontrer.

State and prove the weak law of large numbers. You may use Lévy's continuity theorem, without reproving it.

6. (★) Est-il vrai que pour tout ensemble Ω et toute tribu $\mathcal{F}$ sur Ω , il existe un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ et une application $X : \Omega \rightarrow E$ telle que $\mathcal{F} = \sigma(X)$? Donner une preuve ou un contre-exemple précis.

(★) Is it true that for every set Ω and every σ -field $\mathcal{F}$ on Ω , there exists a measurable space $(E, \mathcal{E})$ and a map $X : \Omega \rightarrow E$ such that $\mathcal{F} = \sigma(X)$? Give a proof or a precise counter-example.
