

Processus Discrets – Feuille d'exercices n°1 :

Probabilités générales

À la fin de la feuille il y a des indices pour certaines questions. Essayez d'abord sans regarder les indices, et ne les regardez que si vous êtes vraiment bloqué-e ! Les questions notées (★) sont un peu plus difficiles, et les questions marquées (★★) sont des questions “bonus” plus difficiles, à essayer seulement si vous vous ennuyez.

Dans toute cette feuille, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilités.

Exercice 1. Modes de convergence de variables aléatoires

1. Rappeler la définition de la convergence presque sûre, de la convergence en probabilité, de la convergence en loi et de la convergence dans L^p .
2. (a) Montrer que la convergence dans L^1 implique la convergence en probabilité.
(b) Montrer que l'implication réciproque n'est pas vraie (c'est-à-dire trouver un exemple d'une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité mais pas dans L^1).
3. (a) Montrer que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.
(b) Montrer que l'implication réciproque n'est pas vraie.
4. Soient $1 \leq p < q \leq \infty$.
(a) Montrer que pour toute variable aléatoire réelle X , on a $\|X\|_p \leq \|X\|_q$. On pourra traiter séparément le cas $q = \infty$.
(b) En déduire que la convergence dans L^q implique la convergence dans L^p .
(c) Montrer que l'implication réciproque n'est pas vraie (trouver un contre-exemple pour $p = 1$ et $q = 2$).
5. (a) Montrer que la convergence dans L^∞ implique la convergence presque sûre.
(b) Montrer que l'implication réciproque n'est pas vraie.
6. Montrer que si $X_n \rightarrow X$ presque sûrement et s'il existe une variable intégrable Z telle que $|X_n| \leq Z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $X_n \rightarrow X$ dans L^1 .
7. (★) Montrer que si X_n converge en probabilité vers X , alors il existe une sous-suite $(X_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge presque sûrement vers X .
8. (a) (★★) Montrer que la convergence en probabilité implique la convergence en loi.
(b) Montrer que l'implication réciproque n'est pas vraie.
(c) Montrer que, quand la variable limite X est une constante, alors la convergence en loi implique la convergence en probabilité.

Exercice 2.

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle telle que $X \geq 0$ presque sûrement. Montrer que si $\mathbb{E}[X] = 0$ alors $X = 0$ presque sûrement.

Exercice 3. Caractérisation de la fonction de répartition

Montrer que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si et seulement si elle satisfait les trois conditions suivantes :

1. F est croissante (au sens large) ;
2. F est càdlàg (continue à droite avec limites à gauche, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{y \rightarrow x, y > x} f(y) = f(x)$ et $\lim_{y \rightarrow x, y < x} f(y)$ existe) ;
3. On a $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$.

En déduire une méthode simple pour simuler une variable exponentielle de paramètre 1.

Exercice 4. Autour du lemme de Borel-Cantelli

1. Montrer que l'indépendance n'est pas équivalente à l'indépendance deux à deux, c'est-à-dire, construire trois variables aléatoires X, Y et Z qui ne sont pas indépendantes mais qui sont indépendantes deux à deux (i.e., $X \perp\!\!\!\perp Y$, $Y \perp\!\!\!\perp Z$ et $X \perp\!\!\!\perp Z$).
2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$, où on rappelle que $\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)$.
3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} (\Omega \setminus A_k)\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k)\right).$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} (\Omega \setminus A_k)\right) = 0$.

(c) En déduire que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

4. Montrer que si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables indépendantes deux à deux dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors on a l'égalité $\text{Var}(X_1, \dots, X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$.
5. On considère maintenant une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, mais on suppose seulement que ces événements sont indépendants deux à deux. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n 1_{A_k}$, et notons $m_n = \mathbb{E}[S_n]$ et $S = \lim S_n$.

(a) Montrer que $\text{Var}(S_n) \leq m_n$.

(b) Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que $\mathbb{P}(S \leq m_n/2) \leq 4/m_n$.

(c) Conclure que $\mathbb{P}(S = \infty) = 1$, et que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Exercice 5. Tribu engendrée par une variable aléatoire

1. (★) Trouver une variable aléatoire $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\sigma(X) = \sigma(\mathcal{B}([0, 1]), \{2\})$.

2. (★★) Pour chacune des tribus suivantes, trouver une variable aléatoire $Y : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui l'engendre.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \sigma\left(\{[-y, -x] \cup [x, y], 0 < x < y < 1\}\right), \\ \mathcal{F} &= \sigma\left(\{[-y, -x] \cup [x, y], 0 \leq x \leq y < 1\}\right), \\ \mathcal{G} &= \sigma\left(\{[-y, -x] \cup [x, y], 0 < x < y \leq 1\}\right), \\ \mathcal{H} &= \sigma\left(\{[-y, -x] \cup [x, y], 0 \leq x \leq y \leq 1\}\right).\end{aligned}$$

3. Considérons deux variables aléatoires $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ et $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable quelconque.
- (a) Montrer que s'il existe une fonction mesurable $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $Y = g(X)$, alors la variable Y est $\sigma(X)$ -mesurable.
- (b) (★★) Démontrer la réciproque.
- (c) (★★) La réciproque vaut-elle toujours si Y n'est pas à valeurs réelles?

Exercice 6. Convergence monotone, Fatou et convergence dominée

1. Démontrer le lemme de Fatou à partir du théorème de convergence monotone.
2. (★) Dédurre le théorème de convergence dominée à partir du lemme de Fatou.

Exercice 7. Loi forte des grands nombres

Le but de cet exercice est de démontrer la loi forte des grands nombres.

1. Énoncer la loi faible et la loi forte des grands nombres.
2. Démontrer la loi faible des grands nombres.

Le but est maintenant de démontrer la loi forte des grands nombres. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles intégrables, qu'on suppose centrées, pour simplifier les notations. On note $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Soient $a > 0$ et $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} (S_n - na)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$M_n = \max_{0 \leq k \leq n} (S_k - ka) \quad \text{et} \quad M'_n = \max_{0 \leq k \leq n} (S_{k+1} - X_1 - ka).$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux variables M_n et M'_n ont même loi.
4. (★) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M_{n+1} = M'_n - \min(M'_n, a - X_1).$$

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[\min(M'_n, a - X_1)] \leq 0$.
6. En déduire que $\mathbb{E}[\min(M', a - X_1)] \leq 0$, où $M' = \lim M'_n$.
7. Dédurre de la question précédente que $\mathbb{P}(M' = \infty) < 1$. On pourra raisonner par l'absurde.
8. En déduire que $\mathbb{P}(M = \infty) < 1$.

9. En déduire que $\mathbb{P}(M = \infty) = 0$. On pourra utiliser la loi du zéro-un de Kolmogorov : pour toute suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes, la tribu de queue

$$\mathcal{G} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_k, k \geq n)$$

est triviale, c'est-à-dire que tous les événements de $\mathcal{G}$ ont probabilité égale à zéro ou un.

10. Déduire de la question précédente que $\limsup S_n/n \leq a$.
11. Conclure la preuve de la loi forte des grands nombres. Où a-t-on utilisé l'indépendance ? Où a-t-on utilisé l'hypothèse que les variables sont identiquement distribuées ?

Hints

- Exercice 1, question 2(a): Utiliser l'inégalité de Markov.
- Exercice 1, question 3(a): Utiliser le théorème de convergence dominée.
- Exercice 1, question 4(a): Pour le cas $q < \infty$, utiliser l'inégalité de Jensen. Essayer d'abord $p = 1$ et $q = 2$ si vous êtes perdu-e.
- Exercice 1, question 6: On pourra utiliser le théorème de convergence dominée.
- Exercice 1, question 7: Construire une extraction φ (c'est-à-dire une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) telle que pour tout $n \geq 1$, on ait $\mathbb{P}(|X_{\varphi(n)} - X| \geq \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^2}$, puis utiliser le lemme de Borel-Cantelli.
- Exercice 1, question 8(a): Premier indice : on pourra utiliser le résultat de la question précédente.
- Exercice 1, question 8(a): Second indice : fixer une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée, et remarquer que, la suite de réels $(\mathbb{E}[f(X_n)])_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, pour montrer qu'elle converge vers $\mathbb{E}[f(X)]$, il suffit de montrer que pour toute sous-suite de cette suite qui converge vers une certaine limite ℓ , on a $\ell = \mathbb{E}[f(X)]$. Pour montrer ceci, on pourra utiliser le résultat de la question précédente.
- Exercice 2, premier indice: Écrire $\{X > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{X \geq 1/n\}$.
- Exercice 2, second indice: Utiliser l'inégalité de Markov.
- Exercice 3, $\Leftarrow$ implication: Considérer $x = G(U)$, où $G(y) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\}$ et U est une variable uniforme sur $[0, 1]$.
- Exercice 4, question 2: Poser $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{A_n}$ et montrer que $\limsup A_n = \{S = \infty\}$.
- Exercice 6, question 2: Si $f_n \rightarrow f$ presque sûrement et $|f_n| \leq g$ pour tout n , avec g intégrable, considérer les fonctions $h_n = 2g - |f_n - f|$.
- Exercice 7, question 2: Utiliser les fonctions caractéristiques.
- Exercice 7, question 4: Utiliser que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x - \min(x, y) = \max(0, x - y)$.
- Exercice 7, question 6: Utiliser le théorème de convergence dominée, et ne pas oublier de préciser quelle variable intégrable est utilisée pour l'hypothèse de domination.