

# Processus Discrets – Feuille d'exercices n°2 :

## Espérance conditionnelle

À la fin de la feuille il y a des indices pour certaines questions. Essayez d'abord sans regarder les indices, et ne les regardez que si vous êtes vraiment bloqué-e ! Les questions notées (★) sont un peu plus difficiles.

Dans toute cette feuille,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  désigne un espace de probabilités.

### Exercice 1.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables de carré intégrable, et soit  $\mathcal{G}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ . Montrer que

$$\mathbb{E}[X \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[Y \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] .$$

### Exercice 2.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables de Poisson indépendantes, de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ , respectivement.

1. Quelle est la loi de  $X + Y$  ?
2. Calculer  $\mathbb{E}[X | X + Y]$ .

### Exercice 3.

Dans tout ce qui suit,  $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  sont des sous-tribus de  $\mathcal{F}$ , les variables aléatoires  $X, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont dans  $L^1(\mathcal{F})$  et les propriétés valent presque sûrement.

1. Montrer la positivité de l'espérance conditionnelle : si  $X \geq 0$  p.s., alors  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$  p.s.
2. Montrer que  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$ .
3. Montrer que si  $X$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable, alors  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ .
4. (★) Démontrer la version conditionnelle du théorème de convergence monotone : soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de variables aléatoires positives, qui converge presque sûrement vers une variable  $X$ , alors

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] ,$$

c'est à dire que la suite de variables  $(\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}])_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers la variable  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ .  
On pourra utiliser le théorème de convergence monotone usuel, sans le redémontrer.

5. Montrer que si  $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$  alors

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1] | \mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2] | \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2] .$$

6. Montrer que si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{G}$ , alors

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X] .$$

### Exercice 4.

1. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables indépendantes uniformes sur  $[0, 1]$ . Calculer  $\mathbb{E}[X|XY]$ .
2. Soit  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Calculer  $\mathbb{E}[X^2|X]$  et  $\mathbb{E}[X|X^2]$ .

3. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables indépendantes uniformes sur  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Calculer

$$\mathbb{E}[\sin X | \cos X], \quad \mathbb{E}[X | e^X], \quad \mathbb{E}[\cos X | \sin X], \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\sin X | \cos(X + 2Y)].$$

### Exercice 5.

(★) Soit  $X$  une variable exponentielle de paramètre 1 et soit  $t > 0$ . On définit les variables  $V = \min(X, t)$  et  $W = \max(X, t)$ . Calculer  $\mathbb{E}[X|V]$  et  $\mathbb{E}[X|W]$ .

### Exercice 6.

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires intégrables i.i.d., et soit  $S = X_1 + \dots + X_n$ .

1. Calculer  $\mathbb{E}[S|X_1]$ .
2. (★) Calculer  $\mathbb{E}[X_1|S]$ .

### Exercice 7.

(★) Soit  $(X, Y)$  un vecteur Gaussien de moyenne  $m$  et de matrice de covariance  $\Sigma$  donnés par

$$m = \begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{YY} \end{pmatrix}.$$

Trouver deux constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  (qui dépendent de  $m$  et de  $\Sigma$ ) telles que  $\mathbb{E}[Y|X] = aX + b$ .

## Indices

- Exercice 2, question 2: utiliser la formule pour l'espérance conditionnelle dans le cas de deux variables aléatoires discrètes.
- Exercice 4, question 1: noter  $Z = XY$  et calculer d'abord la densité jointe du couple  $(X, Z)$ , puis utiliser la formule pour l'espérance conditionnelle de variables qui admettent une densité jointe.
- Exercice 5: considérer une fonction quelconque  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable et bornée et essayer, à partir de  $\mathbb{E}[Xg(V)]$ , d'obtenir une expression de la forme  $\mathbb{E}[\phi(V)g(V)]$ , pour une certaine fonction mesurable  $\phi$  à trouver.
- Exercice 6, question 2: deviner d'abord le résultat, en utilisant que les  $n$  variables jouent des rôles symétriques. Puis, montrer que la réponse trouvée satisfait les trois conditions dans la définition de l'espérance conditionnelle.
- Exercice 7: premier indice : commencer par déterminer  $a$  et  $b$  en supposant qu'ils existent, puis montrer que  $Y - (aX + b)$  est indépendante de  $X$ .
- Exercice 7: second indice : les composantes d'un vecteur Gaussien sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.