

Processus Discrets – Feuille d'exercices n°3 : Compléments sur l'espérance conditionnelle

Exercice 1. Un contre-exemple à la loi des espérances conditionnelles itérées

En considérant par exemple $\Omega = \{a, b, c\}$, montrer que, si $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont des sous-tribus quelconques de $\mathcal{F}$, en général $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2]$ n'est pas presque sûrement égale à $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]$.

Exercice 2. Indépendance et indépendance conditionnelle

On dit que deux variables X et Y sont conditionnellement indépendantes sachant une tribu $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions mesurables et bornées f et g , on a $\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}] \times \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a pas d'implication entre l'indépendance et l'indépendance conditionnelle, dans aucune des deux directions.

1. Soient X et Y deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs $p, q \in (0, 1)$. Soit $\mathcal{G} = \sigma(\{X + Y > 0\})$.
 - (a) Calculer $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.
 - (b) Les variables $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ sont-elles indépendantes ?
 - (c) Les variables X et Y sont-elles conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{G}$?
2. (★) Construire un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, deux variables X et Y et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, avec X et Y conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{G}$ mais pas indépendantes.

Exercice 3. Deux implications et deux contre-exemples

1. Soient X et Y deux variables réelles telles que X, Y et XY sont intégrables. Démontrer les implications suivantes :
 - (a) X, Y indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.
 - (b) $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X] \Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$.

2. On veut montrer que la réciproque de l'implication (a) n'est pas vraie en général. Soit X une variable Gaussienne centrée réduite, et soit $Y = |X|$.
 - (a) Montrer que $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.
 - (b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. (★) Montrer que la réciproque de l'implication (b) n'est pas vraie en général, c'est-à-dire trouver un couple de variables (X, Y) avec X, Y et XY intégrables et tel que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y]$ mais $\mathbb{E}[X|Y]$ n'est pas presque sûrement égale à $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 4. L'espace L^2 est complet

Le but de cet exercice est de montrer que $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, équipé de la norme L^2 , est complet, c'est-à-dire que les suites de Cauchy convergent.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N$, on a $\|X_n - X_m\|_2 \leq \varepsilon$.

On veut montrer qu'il existe une variable aléatoire $X \in L^2$ telle que $X_n \rightarrow X$ en norme L^2 .

1. (★) Construire une sous-suite $(X_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\|X_{\varphi(n+1)} - X_{\varphi(n)}\|_2 \leq 2^{-n}$.
2. On écrit $\hat{X}_n = X_{\varphi(n)}$ et on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable $Y_n = \sum_{k=1}^n |\hat{X}_k - \hat{X}_{k-1}|$.
 - (a) Qu'est-ce qui permet d'affirmer que ces variables convergent-elles presque sûrement vers une certaine variable aléatoire Y , à valeurs dans $[0, +\infty]$?
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|Y_n\|_2 \leq 2$.
 - (c) En déduire que $Y \in L^2$.
 - (d) En déduire que $Y < \infty$ presque sûrement.
3. Soit $N = \{Y = \infty\}$.

(a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega \setminus N$ fixé, la série

$$\sum_{k \geq 1} (\hat{X}_k(\omega) - \hat{X}_{k-1}(\omega))$$

est convergente.

(b) En déduire que pour chaque $\omega \in \Omega \setminus N$ fixé, la suite réelle $\hat{X}_n(\omega)$ converge vers une certaine limite réelle finie, que l'on appelle $X(\omega)$.

(c) (★) Pour tout $\omega \in N$, on définit $X(\omega) = 0$. Montrer que cette application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.

(d) En déduire que $\hat{X}_n \rightarrow X$ presque sûrement.

4. On souhaite maintenant montrer que cette suite $(\hat{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X aussi dans L^2 . Rappel : en général, la convergence presque sûre n'implique pas la convergence dans L^2 .

(a) Montrer qu'il existe $Z \in L^2$ telle que $|\hat{X}_n| \leq Z$ pour tout n .

(b) En déduire que $\hat{X}_n \rightarrow X$ en norme L^2 .

5. (★) Montrer le résultat général suivant, qui suffit pour conclure la preuve : dans n'importe quel espace métrique (E, d) , si une suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5. Vrai ou faux ?

Déterminez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant chaque réponse par une preuve ou un contre-exemple.

1. Pour tout espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et tout $X \in L^1(\mathcal{F})$, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ est une sous-tribu triviale de $\mathcal{F}$ (i.e., si pour tout événement $A \in \mathcal{G}$ on a $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$), alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ p.s.
2. Pour tout $1 \leq p < \infty$, pour tout espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pour toute sous-tribu $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, l'application $\Phi : (L^p(\mathcal{F}), \|\cdot\|_p) \rightarrow (L^p(\mathcal{G}), \|\cdot\|_p)$ définie par $\Phi(X) = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est continue.

3. (★★) Pour tout espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et tout $X \in L^1(\mathcal{F})$, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est la variable dans $L^1(\mathcal{G})$ qui minimise la distance à X en norme L^1 .

4. (★★) Pour tout espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, si $X : \Omega \rightarrow [0, 1]$ est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in \{0, 1\}$ presque sûrement, alors $X \in \{0, 1\}$ presque sûrement.

Indices

- Exercice 1: Si vous vous souvenez de la loi des espérances conditionnelles itérées, remarquez que vous devez considérer deux tribus qui ne sont pas incluses l'une dans l'autre.
- Exercice 2, question 1(a): Écrire explicitement la tribu $\mathcal{G}$.
- Exercice 2, question 1(b): Compare the expectation of the product with the product of the expectations.
- Exercice 3, question 2(a): Calculer $\mathbb{E}[Xf(Y)]$ pour f une fonction bornée et mesurable, et utiliser que la loi de X est symétrique, c'est-à-dire que X et $-X$ ont même loi.
- Exercice 3, question 3(b): Chercher un exemple avec $\mathbb{E}[Y] = 0$.
- Exercice 4, question 2(b): On pourra utiliser l'inégalité triangulaire pour la norme L^2 .
- Exercice 4, question 2(c): On pourra utiliser le théorème de convergence monotone.
- Exercice 4, question 3(a): Montrer que cette série est absolument convergente.
- Exercice 4, question 4(a): Prendre $Z = |\hat{X}_0| + Y$.
- Exercice 4, question 4(b): Utiliser le théorème de convergence dominée. Quelle est la variable intégrable qui domine ?