Processus Discrets – Feuille d'exercices n°4 : Temps d'arrêt

Exercice 1. Définition d'un temps d'arrêt

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. Quelles sont les implications qui sont vérifiées entre les propriétés suivantes ? Pour chaque implication vraie, donner une preuve, et pour chaque implication fausse, donner un contre-exemple précis.

1. $\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \{T \geq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Definition. *(au cas où on ne l'a pas encore vue en cours)*
Un temps d'arrêt relatif à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ qui satisfait la première propriété de l'exercice 1.

Exercice 2. Opérations sur les temps d'arrêt

Si S et T sont deux temps d'arrêt, est-il vrai en général que $\min(S, T)$ est aussi un temps d'arrêt ? Même question pour $\max(S, T)$, $S + T$, $S \times T$ et $S - T$. Pour chaque cas, donne une preuve ou un contre-exemple précis.

Exercice 3. Espérance de vie ($\star$)

Soit T un temps d'arrêt relatif à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(T \leq n + 1 \,|\, \mathcal{F}_n) \geq \varepsilon$ presque sûrement. Montrer que $\mathbb{E}[T] < \infty$, puis en déduire que T est presque sûrement fini.

Exercice 4. La tribu du passé

Soit X une variable aléatoire intégrable, et soit T un temps d'arrêt relatif à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit la tribu du passé jusqu'à T comme

$$\mathcal{F}_T \;=\; \left\{A \in \mathcal{F} \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}_T$ est une tribu.
2. Prouver que T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que $T \equiv k$ (c'est-à-dire $T(\omega) = k$ pour tout $\omega \in \Omega$). Montrer que, dans ce cas, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_k$.
4. Prouver que si $T < \infty$ presque sûrement et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.
5. Montrer que si S et T sont des temps d'arrêt tels que $S(\omega) \leq T(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
6. Montrer que si S et T sont deux temps d'arrêt, alors $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
7. Montrer que si S et T sont deux temps d'arrêt, alors $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
8. ($\star\star$) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus, soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa filtration naturelle, supposons que $\sigma((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathcal{F}$ et soit T un temps d'arrêt relatif à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\mathcal{F}_T = \sigma((X_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}})$.
9. ($\star\star$) Le résultat de la question 8 reste-t-il valable si on retire l'hypothèse $\sigma((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathcal{F}$? Le résultat vaut-il encore si, au lieu de supposer que $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la filtration engendrée par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose seulement que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Indices

— Exercice 3: premier indice : si X est une variable aléatoire à valeurs dans N, alors on a l'égalité $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

— Exercice 3: deuxième indice : pour trouver l'intuition, imaginez que T est le premier jour auquel une machine tombe en panne, et essayez d'abord de faire l'exercice avec votre intuition, sans écrire de maths. Pouvez-vous reformuler l'hypothèse $\mathbb{P}(T \leq n+1 \,|\, \mathcal{F}_n) \geq \varepsilon$ en une phrase ? À partir de ça, en déduire une borne sur la probabilité, sachant que la machine fonctionne encore au jour n, qu'elle fonctionne encore au jour $n+1$? Puis en déduire une borne sur la probabilité que la machine fonctionne encore après n jours. Une fois que vous avez une idée du raisonnement, essayez d'écrire les choses mathématiquement.

— Exercice 4, question 2: Commencer par montrer que pour tout $km \in \mathbb{N}$, on a $\{T = k\} \in \mathcal{F}_T$.

— Exercice 4, question 8: vérifier d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\{T = n\} \in \sigma((X_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}})$ puis, pour $A \in \mathcal{F}_T$, écrire

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \big(A \cap \{T = n\}\big) \cap \{T = n\}\,.$$