# Processus discrets – Feuille d'exercices n°5 – Martingales

**Exercice 1.**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

**Exercice 2.**

Soit $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable (pas nécessairement indépendantes, ni identiquement distribuées). On définit $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $X_n = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}[\Delta_n] = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[\Delta_1^2] + \cdots + \mathbb{E}[\Delta_n^2]$.

**Exercice 3. Martingales vs. tartingales**

Un processus réel $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé une tartingale si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable $M_n$ est intégrable et satisfait $\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = M_n$ (tartingale n'est pas une terminologie standard, c'est juste un mot inventé pour cet exercice).

1. Rappeler la définition d'une martingale.
2. Montrer que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, alors c'est aussi une tartingale.
3. On considère l'exemple suivant.
   Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. avec
   $$\mathbb{P}(X_1 = 1) \;=\; \mathbb{P}(X_1 = -1) \;=\; \frac{1}{2}\,.$$
   On définit ensuite un processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $M_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$M_{n+1} \;=\; \begin{cases} M_n + X_{n+1} & \text{si } M_n \neq 0\,, \\ X_1 & \text{si } M_n = 0\,. \end{cases} \tag{1}$$
   Autrement dit, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire au détail près que, à chaque fois que la marche revient en 0, le pas suivant est une répétition du tout premier pas, au lieu d'être un nouveau pas tiré au hasard. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration canonique associée au processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathbb{E}\big[M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\big] \;=\; \begin{cases} M_n & \text{si } M_n \neq 0\,, \\ X_1 & \text{si } M_n = 0\,. \end{cases}$$
4. Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-il une martingale ?
5. Montrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une tartingale.
6. ($\star$) Question bonus : montrer que si un processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est à la fois une tartingale et une chaîne de Markov, alors c'est une martingale. On pourra utiliser, au choix, l'une des deux définitions suivantes d'une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (aucune autre connaissance sur les chaînes de Markov n'est nécessaire) :

• Un processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est une chaîne de Markov si et seulement si il existe une suite de variables aléatoires réelles indépendentes $(X_n)_{n\geqslant 1}$, indépendentes de $M_0$, et des fonctions mesurables $f_n : \mathbb{Z}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ telles que $M_{n+1} = f_n(M_n,\, X_{n+1})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

• Un processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est une chaîne de Markov si et seulement si il existe des fonctions $Q_n : \mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, et pour tous $x_0,\,\ldots,\,x_{n+1}\in\mathbb{Z}$ tels que $\mathbb{P}(M_0 = x_0,\,\ldots,\,M_n = x_n) > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(M_{n+1} = x_{n+1}\,\big|\,M_0 = x_0,\,M_1 = x_1,\,\ldots,\,M_n = x_n\big)&\\ = \ \mathbb{P}\big(M_{n+1} = x_{n+1}\,\big|\,M_n = x_n\big)&\\ = \ Q_n(x_n,\,x_{n+1})\,.&\end{aligned}$$

# Indices

— Exercice 3, question 3: écrire (1) en une formule, avec une somme de deux termes avec des indicatrices, puis utiliser les propriétés de l'espérance conditionnelle.