Processus Discrets – Feuille d'exercices n°6 : Plus de martingales

Exercice 1. Notion de processus

Imaginez que quelqu'un vous demande si le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(M_n = 2^n) \;=\; \frac{1}{2^n} \;=\; 1 - \mathbb{P}(M_n = 0) \tag{1}$$

est une martingale ou pas.

1. Quel est le problème avec cette question ?
2. Construire un processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie (1) et qui est une martingale (le démontrer).
3. Construire un processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie (1) et qui n'est pas une martingale (le démontrer).

Exercice 2. Un couple étrange

Cet exercice n'a rien à voir avec les martingales, c'est une révision sur l'espérance conditionnelle.

1. Dans cette question, X et Y sont deux variables aléatoires réelles intégrables, et on suppose que (X, Y) et (Y, X) ont même loi.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}[X \,|\, X+Y] = \mathbb{E}[Y \,|\, X+Y]$.
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X \,|\, X+Y]$.
2. Dans les questions suivantes, on considère X une variable qui est distribuée uniformément dans $\{0,1,2\}$ et on pose

$$Y \;=\; X+1 \text{ mod. } 3 \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } X = 0\,, \\ 2 & \text{si } X = 1\,, \\ 0 & \text{si } X = 2\,. \end{cases}$$

   Trouver une function $f : \{1,2,3\} \to \{0,1,2\}$ telle que $X = f(X+Y)$.
3. En déduire $\mathbb{E}[X \,|\, X+Y]$.
4. En déduire $\mathbb{E}[Y \,|\, X+Y]$.
5. Que remarquez-vous ? Est-ce que X et Y ont la même loi ? Est-ce que les couples (X,Y) et (Y,X) ont la même loi ? Est-il vrai que pour toutes variables aléatoires réelles intégrables X et Y, si X et Y ont la même loi, alors $E[X|X+Y] = \mathbb{E}[Y|X+Y]$?

Exercice 3. Processus de Galton-Watson

Soit $(X_{n,k})_{n\geq 0,\, k\geq 1}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, de moyenne m. On suppose que $0 < m < \infty$, et on considère le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $Z_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} \;=\; \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}\,,$$

avec la convention $\sum_{k=1}^{0} \cdots = 0$. On peut penser à Z_n comme la taille d'une population au temps n, dans laquelle chaque individu numéro k, pour $1 \leq k \leq Z_n$, est remplacé au temps $n+1$ par un nombre aléatoire $X_{n,k}$ d'enfants. La filtration de référence $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la filtration naturelle de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[Z_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = mZ_n$.
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, la variable Z_n est intégrable.
3. Trouver une suite déterministe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que le processus $(Z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $Z'_n = c_n Z_n$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 4. La martingale

À l'origine le terme *martingale* faisait référence à une stratégie qui consiste, dans une série de jeux de pile ou face, à doubler sa mise tant

que le joueur perd, et à s'arrêter au premier succès. Le but de cet exercice est d'analyser cette stratégie.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher (i.e. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$). On considère le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $M_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} X_k \,,$$

et on pose $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$ (avec la convention habituelle $\inf \varnothing = +\infty$).

1. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale est que T est un temps d'arrêt (par rapport à la même filtration).
2. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[M_{n\wedge T}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que T est presque sûrement fini. Quelle est la valeur de M_T ? Commenter.
4. Montrer que $\mathbb{E}[M_{T-1}] = -\infty$. Commenter.

Exercice 5. Inégalité de Azuma-Hoeffding

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Soit L un entier avec $L \geq 1$, et soit $D : \mathbb{Z} \to \{1, \ldots, L\}$ une fonction. On considère le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $M_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_{n+1} \;=\; M_n + D(M_n) X_{n+1} \,.$$

La filtration de référence est $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \geq 1$, et $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$

1. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}\big[M_n^2\big] \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\big[D(M_k)^2\big] \,.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq \mathbb{E}[M_n^2] \leq nL^2$.
4. Soit $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\big[e^{\lambda M_{n+1}} \,\big|\, \mathcal{F}_n\big] \;=\; e^{\lambda M_n} \cosh\big(\lambda D(M_n)\big) \,.$$

5. En utilisant l'inégalité $\cosh(x) \leq e^{x^2/2}$, conclure que

$$\mathbb{E}\big[e^{\lambda M_n}\big] \;\leq\; \exp\left(\frac{n\lambda^2 L^2}{2}\right) .$$

6. Montrer l'inégalité de Azuma-Hoeffding : pour tout $a > 0$ et tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\big(M_n \geq a\big) \;\leq\; \exp\left(-\frac{a^2}{2nL^2}\right) .$$

7. En déduire que pour tous $a > 0$ et $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}\big(|M_n| \geq a\big) \;\leq\; 2\exp\left(-\frac{a^2}{2nL^2}\right) .$$

8. En déduire que $M_n/n \to 0$ presque sûrement.
9. ($\star$) Refaire les trois dernières questions en remplaçant $|M_n|$ par $\max_{0\leq k\leq n} |M_k|$.

Indices

— Exercice 2, question 2: considérer simplement les trois cas pour déterminer quelle doit être la fonction f.

— Exercice 5, question 6: utiliser que $\mathbb{P}(M_n \geq a) = \mathbb{P}(e^{\lambda M_n} \geq e^{\lambda a})$ et optimiser en $\lambda > 0$.