Université Paris-Dauphine — Année : 2026-2027
M1 Mathématiques et applications — Processus discrets

Partiel – 29 octobre 2026 – Sujet en français – durée : 2 heures

Les documents et appareils électroniques sont interdits. Vous pouvez rédiger en français ou en anglais. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

La plupart des questions sont indépendantes les unes des autres, et chaque exercice comporte des questions proches du cours, donc si vous bloquez, n'hésitez pas à passer à la question suivante en admettant le résultat. Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilités.

Exercice 1. (2 points) Soit X une variable aléatoire intégrable et soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$, avec $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,\big|\,\mathcal{H}\big] \;=\; \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]\,\big|\,\mathcal{G}\big] \;=\; \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,.$$

Exercice 2. (2 points) Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et soit $X \in L^2(\mathcal{F})$. Montrer (sans utiliser les notions d'espérance conditionnelle ou de projection) que pour tout $Y \in L^2(\mathcal{G})$, on a l'équivalence

$$\|X - Y\|_2 \;=\; \inf_{Z \in L^2(\mathcal{G})} \|X - Z\|_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (X - Y) \;\perp\; L^2(\mathcal{G})\,.$$

Exercice 3. (1 point) Énoncer et démontrer le lemme de Fatou conditionnel. On pourra utiliser, sans le redémontrer, le théorème de convergence monotone conditionnel.

Exercice 4. (3 points) Soit X une variable aléatoire de carré intégrable, et soit $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $\mathcal{G}_{n+1} \subset \mathcal{G}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}_n]$, et $Z_n = Y_{n+1} - Y_n$.

1. Montrer que les variables $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont orthogonales dans L^2.
2. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ converge dans L^2.
3. Soit $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$. Montrer que $Y_n \to \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}_\infty]$ dans L^2.

Exercice 5. (2 points) Soient X et Y deux variables réelles. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée, on a $\mathbb{E}[f(X) \,|\, Y] = \mathbb{E}[f(X)]$.

Exercice 6. (10 points) Soient X et Y deux variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs a et b. On peut penser par exemple à X et Y qui correspondent au temps d'attente du prochain bus sur deux lignes différentes, qui n'ont pas nécessairement la même fréquence. On note $M = \min(X, Y)$, l'heure d'arrivée du premier bus. L'un des buts de l'exercice est d'étudier l'espérance de X sachant M.

1. Calculer $\mathbb{E}[X + Y \,|\, X]$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X < Y \,|\, X)$.
3. Calculer $\mathbb{E}\big[X \,\big|\, \sigma(\{X < Y\})\big]$.
4. Quelle est la loi de la variable M ?
5. Pour cette question, on suppose $a = b = 1$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}[X \,|\, X + Y]$.
   (b) Montrer que la variable $\Delta = \max(X, Y) - M$ est indépendante de M, et déterminer sa loi.
   (c) En déduire que $\mathbb{E}[X + Y \,|\, M] = 2M + 1$.
   (d) En déduire que $\mathbb{E}[X \,|\, M] = M + \frac{1}{2}$.
6. On revient au cas général a et b quelconques. Soient X', Y', Z et B des variables indépendantes, avec X', Y' et Z suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs a, b et $a + b$, et B une variable de Bernoulli de paramètre $b/(a + b)$. On définit $X'' = Z + BX'$ et $Y'' = Z + (1 - B)Y'$. Montrer que le couple (X'', Y'') a même loi que (X, Y).
7. En déduire $\mathbb{E}[X \,|\, M]$.
8. Question bonus : quelle est la loi conditionnelle de X sachant M ?