

Autour de la criticité auto-organisée

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

Ecole Doctorale de Mathématique Hadamard (EDMH) n° 574
Spécialité de doctorat : Mathématiques appliquées
Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques
d'Orsay, 91405, Orsay, France.
Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse présentée et soutenue à Paris, le 2 octobre 2020, par

Nicolas FORIEN

Composition du jury :

Cristina Toninelli Directrice de recherche, CNRS & Université Paris-Dauphine	Présidente du jury
Christophe Garban Professeur, Université Lyon 1	Rapporteur & examinateur
Yvan Velenik Professeur, Université de Genève	Rapporteur & examinateur
Dmitry Chelkak Professeur, chaire ENS-Mitsubishi	Examineur
Jean-François Le Gall Professeur, Université Paris-Saclay	Examineur
Raphaël Cerf Professeur, Université Paris-Saclay	Directeur de thèse

Autour de la criticité auto-organisée

Thèse de doctorat préparée par Nicolas Forien,
sous la direction de Raphaël Cerf.

Résumé

De nombreux modèles physiques présentent un phénomène appelé transition de phase : il existe un point critique ou une courbe critique dans l'espace des paramètres qui sépare deux régimes distincts caractérisés par des propriétés macroscopiques très différentes. Le comportement de ces systèmes au point critique est particulièrement intéressant et fait apparaître des lois d'échelle qui sont souvent communes à tout un ensemble de systèmes très différents. Les physiciens Per Bak, Chao Tang et Kurt Wiesenfeld ont remarqué que ces comportements « critiques » sont étonnamment communs dans la nature, alors qu'ils ne devraient survenir que lorsque les paramètres se trouvent être précisément ajustés au point critique. Pour expliquer cela, ils ont montré que certains systèmes ont tendance à être naturellement attirés vers des points ou des régimes critiques. Ces systèmes présentent un phénomène appelé « criticité auto-organisée ».

Cette thèse porte sur la construction de plusieurs modèles simples présentant ce phénomène. Pour cela, nous partons d'un modèle présentant une transition de phase et nous le modifions pour forcer un comportement « auto-critique ». Nous étudions notamment une variante d'un modèle construit par Matthias Gorny à partir du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé, en passant d'un modèle de type champ moyen à une interaction limitée à une certaine portée. Nous construisons également quelques modèles de criticité auto-organisée à partir de la percolation Bernoulli dans des boîtes finies, ainsi qu'à partir du modèle d'Ising en dimension 2.

Summary

Many models in physics present a phenomenon called phase transition : there is a critical point or a critical curve in the parameter space separating two distinct regions characterized by very different macroscopic properties. In such systems, the behaviour at the critical point is of particular interest and presents some scaling laws which appear to be universal across a wide range of different systems. The physicists Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld pointed out that these “critical” features are very common in nature, although they should only appear when the parameters happen to be finely tuned to the critical point. To explain this, they showed that some systems tend to be naturally attracted by critical points or critical regimes. This phenomenon is called “self-organized criticality”.

The goal of this thesis is to construct several simple models which present this phenomenon. To achieve this, we consider a model with a phase transition and we modify it in order to obtain a “self-critical” behaviour. We study a modification of a model constructed by Matthias Gorny from the generalized Ising Curie-Weiss model, in which the mean-field Hamiltonian is replaced by a long-range interaction. Several other models of self-organized criticality are constructed from Bernoulli percolation in finite boxes, and from the planar Ising model.

Remerciements

Au terme de ces trois années d'aventure mathématique, je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse *Raphaël Cerf*, qui s'est toujours montré bienveillant, disponible et à l'écoute. C'était un plaisir de travailler ensemble, et sans sa confiance et son exigence, je me serais probablement découragé plus d'une fois. Je remercie également *Christophe Garban* et *Yvan Velenik* pour avoir été rapporteurs de ma thèse, ainsi que *Cristina Toninelli*, *Dmitry Chelkak* et *Jean-François Le Gall* qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury. Ma thèse n'aurait pas existé sans le travail de pionnier de mon prédécesseur *Matthias Gorny*, qui m'a fait découvrir la criticité auto-organisée. J'espère avoir réussi à donner une suite intéressante à son brillant manuscrit, dans lequel je me replonge souvent avec grand plaisir.

Rien n'aurait été possible sans le travail remarquable de *Bénédicte*, *Zaïna*, *Albane*, *Amélie* et *Fabienne*, qui orchestrent à merveille la vie du Département de Mathématiques et Applications de l'École normale supérieure. Je vais assurément regretter la compagnie de mes camarades du bureau des plaisirs, *Yichao*, *Guillaume*, *Wei*, *Tunan* et *Maxime*, qui ont fait de ce bureau ma deuxième maison, et des autres doctorants qui ont animé ces années de thèse, notamment *Alejandro*, *Aymeric*, *Barbara*, *Chenlin*, *Cyril*, *Daniel*, *Jérémy*, *Jessica*, *Joseph*, *Louise*, *Maxence*, *Michel*, *Mickaël*, *Paul*, *Pierre*, *Rémi*, *Shahriar*, *Thomas*, *Yijun* et *Yusuke*. Merci aussi aux autres membres du DMA que j'ai eu l'occasion de rencontrer au détour d'un séminaire, d'un buffet ou en battant le pavé. Je veux également remercier les membres de l'ANR PPPP, qui m'ont chaleureusement accueilli à Grenoble en me permettant de présenter longuement mon travail. Je remercie aussi toute l'équipe enseignante et administrative du CPES, où j'ai eu la chance d'enseigner pendant ces trois années de thèse. Merci aussi à tous mes élèves, que je me réjouissais de retrouver chaque semaine.

Je ne me serais pas autant passionné pour les mathématiques sans les professeurs exceptionnels que j'ai eu la chance de rencontrer tout au long de mon parcours scolaire, notamment *Raymond Jarnet*, *Catherine Chanson*, *Yves Duval* et *Anne-Laure Biolley*, ainsi que les professeurs de l'ENS et ceux du master de probabilités et statistiques d'Orsay.

Je salue également *Adrien*, *Assaf*, les deux *Guillaume*, *Tingchia* et *Ségolène*, avec lesquels j'ai eu le plaisir d'habiter à Bourg-la-Reine. En revanche, je ne remercie pas l'agence Foncia d'Antony pour les multiples déboires administratifs qui ont marqué la vie de cette colocation ! Merci aussi aux autres « Gros » : *Alexandre*, *Annette*, *Bill*, *Élie* et *Van*, avec lesquels nous ne comptons plus les repas gargantuesques, les week-ends improbables et autres virées improvisées. Je souhaite remercier mes amis de lycée *Brice*, *Fanny*, *Lucie*, *Marius*, *Sylvain* et *Vincent* pour m'avoir permis de m'aérer l'esprit de temps en temps, ainsi que mes camarades de classe prépa, et en particulier mes co-khôllés *Johnny*, *Anne-Laure* et *Thomas*. Merci aussi à toute la joyeuse troupe de la goguette des énervés, qui faisait du lundi le meilleur jour de la semaine, du moins avant l'avènement des apéros Zoom et autres soirées Skype, qui ne remplaceront jamais une bonne vieille soirée sur un bateau-bar à chanter des chansons... Merci quand même à tous les Français qui, par solidarité, sont restés eux aussi confinés chez eux pendant que je m'enfermais pour rédiger mon manuscrit.

Je ne remercierai jamais assez mes parents, qui m'ont permis de grandir et de m'épanouir dans les meilleures conditions, et mon frère, avec lequel je suis heureux de partager beaucoup de choses dont la passion des mathématiques.

Enfin, si ces années de thèse ont été si belles, c'est avant tout grâce à *Alice*, qui illumine mon quotidien jour après jour. Si l'aventure de la thèse se termine maintenant, j'espère bien que celle de notre vie à deux ne fait que commencer...

Table des matières

1	Introduction	1
1	Criticité auto-organisée	1
1.1	Mécanique statistique et transitions de phase	1
1.2	Phénomènes critiques et lois de puissance	2
1.3	L'émergence du concept de criticité auto-organisée	3
1.4	Un premier modèle de criticité auto-organisée : le tas de sable	5
2	La percolation	7
2.1	Description intuitive du modèle	7
2.2	Notations et définitions	8
2.3	Inégalités de corrélation	10
2.4	Phénomène de transition de phase	12
2.5	La FK-percolation	13
2.6	Dualité	14
3	Le modèle d'Ising	16
3.1	Définition du modèle	16
3.2	Couplage d'Edwards-Sokal	18
3.3	Le modèle d'Ising Curie-Weiss	18
4	Quelques modèles auto-critiques construits à partir de la percolation et du modèle d'Ising	19
4.1	Un modèle d'Ising Curie-Weiss de criticité auto-organisée	19
4.2	Des modèles pour les feux de forêts	20
4.3	La percolation gelée	22
4.4	La percolation d'invasion	23
2	Présentation des résultats	25
1	Un modèle d'Ising de criticité auto-organisée avec interactions à longue portée	25
1.1	Un premier modèle avec interactions entre proches voisins	25
1.2	Introduction d'une portée d'interaction	27
1.3	Un phénomène de seuil pour la portée d'interaction	28
1.4	Présentation de l'approche mise en œuvre	29
2	Quelques modèles de criticité auto-organisée en percolation	31
2.1	Définition des modèles	31
2.2	Résultat de convergence	32
2.3	Heuristique et stratégie de preuve	33
2.4	Deux variantes	33
3	Un modèle d'Ising de criticité auto-organisée en dimension 2	33
3.1	Définition du modèle et résultat de convergence	34
3.2	Stratégie et organisation de la démonstration	34

3.3	Amélioration de notre exposant	36
3.4	Un modèle plus naturel ?	37
3	Un modèle d'Ising de criticité auto-organisée avec interactions à longue portée	39
1	Étude des grandes déviations dans le modèle à courte portée	40
1.1	Calcul de la fonction génératrice des cumulants	41
1.2	Transformée de Fenchel-Legendre	45
1.3	Principe de grandes déviations	47
2	Quelques lemmes techniques	50
2.1	Comportement de la température	50
2.2	Étude du spectre	51
2.3	Les valeurs propres dans le régime du théorème 5	52
2.4	Les valeurs propres dans le régime intermédiaire	57
2.5	Inversion de Fourier	62
3	Preuve du théorème 4	65
3.1	La méthode des rectangles	66
3.2	Mise en forme de l'intégrale	66
3.3	Convergence simple de l'intégrande	70
3.4	Déplacement du contour d'intégration	73
3.5	Domination	75
3.6	Convergence dominée	77
4	Preuve du théorème 5	78
4.1	Mise en forme de l'intégrale	79
4.2	Convergence simple de l'intégrande	80
4.3	Déplacement du contour d'intégration	84
4.4	Domination	87
4.5	Convergence dominée	90
5	Preuve du théorème 6	91
5.1	Mise en forme de l'intégrale	91
5.2	Convergence simple de l'intégrande	92
5.3	Déplacement du contour d'intégration	98
5.4	Domination	102
5.5	Convergence dominée	105
6	Preuve du théorème 7	107
6.1	Une borne sur le Hamiltonien	107
6.2	Mise en forme de l'intégrale	108
6.3	Convergence simple de l'intégrande	109
6.4	Déplacement du contour d'intégration	111
6.5	Domination	113
6.6	Convergence dominée	115
6.7	Identification de la loi limite	116
4	Intermède géométrique	119
1	Résultat principal	119
2	Lemme « du boucher »	119
3	Lemme « du chirurgien »	123
5	Quelques modèles de criticité auto-organisée en percolation	127
1	Modèle avec le plus grand cluster	128
1.1	Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique	128
1.2	Décroissance exponentielle dans le régime surcritique	128
1.3	Minoration de la fonction de partition	130
1.4	Preuve du résultat de convergence	135

1.5	Variante sur le tore	136
2	Modèle avec le nombre de sommets reliés au bord	136
2.1	Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique	136
2.2	Décroissance exponentielle dans le régime surcritique	138
2.3	Minoration de la fonction de partition	138
2.4	Démonstration du résultat	144
3	Modèle avec la distribution des tailles de cluster	144
3.1	Preliminaires	144
3.2	Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique	146
3.3	Décroissance exponentielle dans le régime surcritique	148
3.4	Minoration de la fonction de partition	149
3.5	Démonstration du résultat	151
3.6	Contrôle de la vitesse de convergence	151
3.7	Variante avec les diamètres des clusters	152
6	Un modèle d'Ising de criticité auto-organisée en dimension 2	153
1	Décroissance exponentielle en température surcritique	154
1.1	Majoration du volume des clusters	154
1.2	Contrôle du cluster du bord	155
1.3	Le coût d'un changement de condition aux bords	156
1.4	Corrélation négative entre les tailles des clusters	156
1.5	Contrôle de la taille des clusters	158
1.6	Passage au modèle d'Ising	160
2	Décroissance exponentielle en température sous-critique	161
2.1	Contrôle du cluster du bord	162
2.2	Contrôle de la taille des clusters	162
2.3	Passage au modèle d'Ising	164
3	Quelques estimées en FK-percolation quasi-surcritique	165
4	Minoration de la fonction de partition	168
4.1	Heuristique	168
4.2	Le prix à payer pour fermer des arêtes	170
4.3	Construction du point fixe et estimées préalables	172
4.4	Découpage du cluster du bord	175
4.5	Passage au modèle d'Ising	179
5	Conclusion	183
	Bibliographie	185

Introduction

1 Criticité auto-organisée

1.1 Mécanique statistique et transitions de phase

Dans un verre d'eau, des millions de milliards de milliards de molécules interagissent les unes avec les autres, et de ces interactions découlent les propriétés physiques de l'eau que nous observons à notre échelle. Aujourd'hui, nous comprenons plutôt bien les lois physiques qui régissent l'interaction entre les molécules à l'échelle microscopique, si bien que le comportement de chaque molécule prise isolément semble être réglé comme du papier à musique. Pourtant, le trop grand nombre d'inconnues empêche de prédire l'évolution de l'ensemble des molécules d'eau dans le verre en calculant simplement la trajectoire de chacune d'entre elles. De cette interaction entre un très grand nombre d'éléments naît ce qui s'appelle tout simplement... le désordre.

Comprendre le désordre, c'est le défi qui intéresse de nombreux physiciens depuis le milieu du 19^{ème} siècle et les travaux de Ludwig Boltzmann [Bol66], fondateur de la mécanique statistique. Plus précisément, l'objectif de la mécanique statistique est de comprendre le comportement collectif de systèmes composés de très nombreux éléments en interaction, à partir des lois fondamentales qui régissent ces interactions. Pour cela, l'idée est de définir des quantités macroscopiques qui résument l'essentiel des propriétés qui nous intéressent, et dont les lois d'évolution sont bien comprises. Par exemple, dans le verre d'eau, la température et la pression obéissent à des principes physiques simples : du désordre local émerge un ordre global. Il y a donc une compétition entre l'ordre et le désordre. Les physiciens disent qu'un tel système de particules est gouverné par deux effets antagonistes : l'énergie et l'entropie. Alors que l'énergie pousse le système vers une configuration idéale, ordonnée (l'état d'énergie minimale), l'entropie quantifie le niveau de désordre qui provoque des fluctuations autour de cet état d'énergie minimale.

Le paramètre qui joue un rôle d'arbitre entre l'ordre et le désordre, c'est ici la température. Pour revenir à notre exemple, chacun peut observer que les propriétés de l'eau changent radicalement en fonction de la température, bien que les lois physiques qui régissent l'évolution des molécules d'eau soient toujours les mêmes. Quand la température descend au-dessous de 0°C (à pression atmosphérique), l'organisation des molécules d'eau change soudainement, et celles-ci tendent à s'organiser de façon très régulière : c'est l'état solide. Les physiciens parlent d'une phase ordonnée, dans laquelle les effets de l'énergie dominent et les molécules s'organisent « intelligemment » pour minimiser celle-ci. Mais quand la température dépasse cette limite de 0°C, le désordre l'emporte et les molécules d'eau se déplacent et s'entrechoquent : c'est l'état liquide. Nous parlons alors d'une phase désordonnée, dans laquelle les effets de l'entropie dominent et poussent le système physique dans un désordre relatif.

Ce phénomène de nette séparation entre un état ordonné et un état désordonné est appelé transition de phase, et la valeur du paramètre (ici, la température) qui marque le seuil entre les deux phases est

appelée point critique. Lorsque plusieurs paramètres sont considérés, comme par exemple la température et la pression, ce point critique devient une courbe critique qui sépare deux régions dans l'espace des paramètres.

1.2 Phénomènes critiques et lois de puissance

Les systèmes physiques qui présentent une transition de phase ont souvent un comportement particulièrement intéressant au point critique, où les deux forces (énergie et entropie, ordre et désordre) sont en concurrence. Le comportement au point critique et au voisinage du point critique présente alors un certain nombre de caractéristiques qui sont communes à tout un ensemble de systèmes différents.

Notamment, pour de nombreux systèmes, lorsque nous sommes loin du point critique, la corrélation entre les particules décroît très rapidement avec la distance. La fonction de corrélation, qui mesure en quelque sorte l'influence d'une particule sur une autre en fonction de la distance qui les sépare, prend la forme d'une exponentielle décroissante, avec une certaine longueur caractéristique appelée longueur de corrélation. Cela signifie que l'évolution d'une particule est très peu influencée par les particules qui sont plus éloignées que cette longueur de corrélation. Les effets d'une petite perturbation locale se dissipent alors rapidement et ne sont ressentis que sur des courtes distances, de l'ordre de la longueur de corrélation. La sensibilité du système aux petites perturbations, que les physiciens appellent susceptibilité, est donc faible.

Plus les paramètres du système se rapprochent du point critique, plus la longueur de corrélation et la susceptibilité augmentent. Lorsque nous nous trouvons précisément au point critique, celles-ci deviennent infinies. La corrélation entre les particules ne décroît alors plus exponentiellement, mais selon une loi de puissance, ce qui fait qu'il n'y a plus aucune échelle de longueur qui joue un rôle particulier. Ainsi, les particules s'influencent mutuellement, même sur de très longues distances. Par conséquent, le comportement au point critique devient particulièrement complexe et intéressant, parce qu'il ne peut plus se résumer à l'interaction de chaque particule avec les particules voisines. La susceptibilité étant infinie, une petite perturbation locale peut se propager et avoir des effets majeurs à grande échelle. De plus, les effets d'une perturbation à un instant donné peuvent perdurer longtemps : il n'y a pas non plus de temps caractéristique, et la corrélation entre l'état d'une particule à un instant t et son état à un instant $t + \delta t$ suit aussi une loi de puissance en δt .

Puisqu'il n'y a plus de longueur ou de temps caractéristique qui joue un rôle particulier, les propriétés géométriques du système se ressemblent à plusieurs échelles différentes : nous parlons d'auto-similarité, ou de structure fractale. Cette auto-similarité est à la fois spatiale et temporelle, et elle peut se traduire par des « crises » dont l'ampleur suit une loi de puissance, c'est-à-dire que le nombre d'événements de taille L pendant un certain laps de temps est de l'ordre de L^{-a} , avec un certain exposant $a > 0$.

Ainsi, le comportement d'un système situé précisément au point critique est caractérisé par un certain nombre de lois de puissances dans les corrélations spatiales, les corrélations temporelles, ou la distribution des crises. D'autres lois de puissances s'observent également dans l'évolution de la longueur de corrélation ou de la susceptibilité au voisinage du point critique. Chacune de ces lois de puissance est caractérisée par un certain exposant, et ces exposants intéressent particulièrement les physiciens parce qu'ils permettent de décrire la transition de phase. L'un des objectifs de la mécanique statistique est donc de déterminer ces exposants, appelés exposants critiques, en les mesurant expérimentalement et en les prédisant avec des modèles mathématiques.

Étonnamment, ces exposants critiques se trouvent être les mêmes pour de nombreux systèmes physiques aux propriétés microscopiques très différentes : les physiciens parlent d'universalité. Ainsi, le comportement au point critique apparaît non seulement riche et complexe, mais il dépend peu des détails microscopiques, de la nature des particules, et du type de phénomène étudié. Cela explique peut-être le succès de certains modèles mathématiques apparemment trop simplistes pour modéliser les transitions de phase. Comme les propriétés des phénomènes critiques dépendent peu de la façon précise dont est défini le modèle, un modèle même très simple peut aider à comprendre des phénomènes qui s'observent dans beaucoup de situations différentes.

1.3 L'émergence du concept de criticité auto-organisée

Expliquer l'abondance des fractales dans la nature

Pourquoi s'intéresser au comportement d'un système à la température critique, si ce comportement ne peut s'observer que lorsque la température est exactement à sa valeur critique? L'intuition physique incite en effet à penser qu'il est très peu probable d'observer dans la nature un système dont les paramètres se trouvent être précisément ajustés pour se trouver au point critique. Pourtant, les comportements prédits par l'étude du régime critique (lois de puissance, auto-similarité, structure fractale) sont observés dans de nombreux domaines.

En 1987, les physiciens Per Bak, Chao Tang et Kurt Wiesenfeld ont donné une explication à cette contradiction dans leur article fondateur [BTW87]. Ils expliquent que certains systèmes physiques sont naturellement attirés vers des points ou des régimes critiques, et présentent les phénomènes critiques que nous avons décrits au paragraphe 1.2, sans qu'il y ait besoin d'ajuster précisément un paramètre comme la température à une valeur particulière. Ce phénomène est appelé « criticité auto-organisée » (en anglais, « self-organized criticality », ce qui peut également être traduit par « criticalité auto-organisée »).

Il y a une différence fondamentale avec le point critique dans une transition de phase « classique ». Dans un système présentant une transition de phase, l'état critique apparaît comme un régime extrêmement particulier et très fragile aux perturbations extérieures. Au contraire, dans le cas de la criticité auto-organisée, le comportement critique du système est robuste et il constitue plutôt un attracteur de la dynamique du système.

Des tas de sable aux incendies, en passant par les séismes et la biologie

Pour illustrer l'idée de la criticité auto-organisée, Bak, Tang et Wiesenfeld ont construit un modèle simple de tas de sable, qui est probablement l'exemple le plus célèbre de modèle présentant ce phénomène. Quand du sable est versé lentement sur une pile, le sable s'accumule et la pente du tas de sable augmente jusqu'à ce que des avalanches surviennent. Le tas de sable se reconstitue ensuite, et c'est ainsi que la pente du tas de sable reste toujours proche de la pente limite qui provoque des éboulements à grande échelle. Ce système se retrouve donc naturellement attiré par un état qui peut être qualifié de critique, et qui présente des propriétés d'auto-similarité spatiale et temporelle. Nous évoquerons ce modèle plus en détail en section 1.4.

D'autres modèles très étudiés concernent la propagation des incendies dans les forêts ou, de façon similaire, celle des épidémies dans les populations (voir section 4.2). L'idée de criticité auto-organisée a également été appliquée à l'étude des tremblements de terre [SS89, BT89]. Notamment, un modèle très simple pour décrire le phénomène de criticité auto-organisée pour les séismes a été construit par Zeev Olami, Hans Feder et Kim Christensen [OFC92]. Bien que très rudimentaire, ce modèle est capable de reproduire la loi de Gutenberg-Richter, d'après laquelle la puissance des secousses est distribuée selon une loi de puissance [LP01].

Cette idée de Bak, Tang et Wiesenfeld a également stimulé de nombreux travaux en biologie, et notamment en théorie de l'évolution. En effet, l'évolution des espèces semble reposer sur un délicat équilibre entre des mutations par petits pas, qui se produisent sur une échelle de temps relativement longue, et des extinctions biologiques majeures qui bouleversent soudainement l'ensemble de l'écosystème. L'ampleur des extinctions d'espèces semble être distribuée suivant une loi de puissance, ce qui amène à penser qu'un mécanisme de criticité auto-organisée est ici à l'œuvre [KJ91, Kau93]. Pour expliquer cela, Per Bak et Kim Sneppen ont introduit un modèle très simple d'évolution biologique d'espèces en interaction qui présente un comportement auto-critique [BS93]. D'autres modèles plus complexes d'évolution ont été proposés par la suite [CDKS98, SM96], en considérant les espèces comme un réseau d'interactions dont la connectivité s'ajuste d'elle-même pour se stabiliser dans une situation critique. Des idées similaires ont également permis de mettre en évidence un phénomène de criticité auto-organisée dans les réseaux neuronaux ou les réseaux d'interaction entre gènes [BR00, BR03, HG14]. En effet, dans ces réseaux de neurones ou de gènes, une connectivité critique pourrait avoir été sélectionnée par l'évolution parce qu'elle seule permet une transmission optimale de l'information et une réponse subtile aux stimuli extérieurs. Comme le résument Thierry Mora et William Bialek [MB11], « le cerveau

se trouve dans un état auto-critique, à la frontière entre un état quasi-mort et un état complètement épileptique ».

Plus généralement, dans [Mn18], Miguel Muñoz explique que l'évolution darwinienne de certains systèmes biologiques peut les amener à sélectionner un comportement « critique », car cela constitue le compromis le plus avantageux entre une phase désordonnée trop fragile dans laquelle les perturbations se propagent de façon incontrôlée et une phase ordonnée trop rigide qui empêche toute adaptation aux changements. Ainsi, en biologie, le mécanisme de criticité auto-organisée pourrait résulter d'une stratégie d'adaptation qui conduit le vivant à sélectionner un fonctionnement au voisinage d'un point critique, parce que celui-ci représente le juste milieu optimal entre robustesse et plasticité. Seul un fonctionnement critique permettrait donc de faire face à un environnement complexe de manière efficace. D'après [HGS⁺14], ce processus de sélection d'un comportement critique s'observe d'autant plus que l'environnement est complexe et imprévisible, et qu'il y a une diversité d'éléments (des espèces, des individus, ou même des neurones) qui évoluent ensemble en interagissant les uns avec les autres. En effet, au fur et à mesure qu'un individu évolue progressivement vers un fonctionnement critique, son environnement devient lui-même de plus en plus complexe, du fait des autres individus qui évoluent en même temps, ce qui pourrait accélérer l'émergence de la criticité auto-organisée comme stratégie collective.

Des phénomènes de criticité auto-organisée ont été identifiés dans de nombreux autres domaines scientifiques, avec des recherches expérimentales qui se poursuivent aujourd'hui encore [HAL⁺20]. Pour une revue plus complète, nous renvoyons aux ouvrages de Per Bak [Bak96], Henrik Jensen [Jen98] et Gunnar Pruessner [Pru12].

Un lent forçage vers une instabilité et des relaxations ponctuelles

Il n'existe pas aujourd'hui de théorie unifiée capable d'expliquer le phénomène de criticité auto-organisée. Comme décrit par Didier Sornette [Sor06], la criticité auto-organisée peut résulter de mécanismes très variés. Cependant, certaines caractéristiques communes à de nombreux systèmes présentant ce phénomène peuvent être identifiées. Notamment, un mécanisme qui peut mener à la criticité auto-organisée est la combinaison d'un lent forçage vers un état instable et d'un mécanisme pour libérer localement et partiellement la tension accumulée par ce forçage. Nous retrouvons cela dans les exemples des tremblements de terre qui relâchent d'un seul coup la tension accumulée le long d'une faille pendant des décennies, ou dans les avalanches du tas de sable qui emportent les grains entassés un à un, ou encore avec les extinctions biologiques qui bouleversent d'un coup le résultat de millions d'années d'adaptation. Comme expliqué par Peter Grassberger [Gra02], la tension n'étant que partiellement libérée, voire même seulement déplacée ou redistribuée, le système reste proche de cet état instable, avec des événements de relaxation à plusieurs échelles qui mènent à une distribution auto-similaire de ces « catastrophes ».

Un ingrédient qui apparaît important dans l'émergence de la criticité auto-organisée est la séparation des échelles de temps entre ce lent forçage vers l'instabilité et ces relaxations ponctuelles de la tension. Pour reprendre l'exemple géologique, l'énergie s'accumule le long d'une faille tectonique sur une échelle de temps très longue, tandis que la libération de l'énergie lors des séismes se fait sur une échelle de temps beaucoup plus petite. Ainsi, le forçage progressif du système vers toujours plus de tension et la relaxation de cette tension accumulée lors des catastrophes se font sur deux échelles de temps bien distinctes. Cependant, selon Deepak Dhar [Dha99], cet ingrédient n'est pas non plus indispensable, et cette séparation d'échelle n'est parfois valable que pour les catastrophes « majeures ».

Controverses

La popularité du concept de criticité auto-organisée a parfois suscité un certain scepticisme au sein de la communauté scientifique. Comme expliqué dans [WPC⁺16], c'est en partie parce que ce concept a été souvent mal interprété et exagéré, voire considéré comme une « théorie du tout », capable d'expliquer l'ensemble de la complexité du monde. Pourtant, le fait qu'un phénomène suive une loi de puissance ne suffit pas pour affirmer qu'il s'agit de criticité auto-organisée, et d'ailleurs l'article fondateur de Bak, Tang et Wiesenfeld [BTW87] ne prétendait pas que l'ensemble des lois de puissance et des structures

fractales observées dans la nature relèvent d'un mécanisme de criticité auto-organisée. De plus, la recherche de lois de puissance à tout prix et tous azimuts a souvent mené à des conclusions erronées et à des observations hâtives qui ne résistent pas à une analyse statistique rigoureuse [CSN09].

Par ailleurs, Miguel Muñoz [Mn18] explique qu'une interprétation erronée de certains phénomènes comme relevant de la criticité auto-organisée pourrait être due au fait que les modèles théoriques de transitions de phases ne sont capables de présenter un comportement complexe qu'à leur point critique. Pour Didier Sornette (paragraphe 15.1.1 de [Sor06]), « c'est uniquement dans l'état critique qu'existe le compromis entre ordre et fluctuations pouvant être qualifié de comportement véritablement complexe ». Ainsi, la nature étant complexe, nous ne parvenons à reproduire les phénomènes naturels qu'en ajustant nos modèles au point critique, ce qui nous pousse à croire à un comportement auto-critique. Mais, d'après [Mn18], cela pourrait s'expliquer par le fait qu'en dehors du point critique, nos modèles sont trop simples et donc incapables de reproduire le réel de façon satisfaisante.

Ainsi, nous pouvons dire pour résumer que l'idée proposée par Bak, Tang et Wiesenfeld apporte un point de vue nouveau et prometteur pour étudier de nombreux phénomènes, mais qu'il manque une théorie unifiée permettant de définir et d'expliquer précisément la criticité auto-organisée dans sa généralité, ce qui fait que chaque nouvel exemple d'un système physique concret ou d'un modèle mathématique peut rapidement initier une véritable controverse scientifique pour déterminer s'il s'agit ou non de criticité auto-organisée.

1.4 Un premier modèle de criticité auto-organisée : le tas de sable

Le cadre expérimental

Pour illustrer le concept de criticité auto-organisée, Bak, Tang et Wiesenfeld ont défini dans [BTW87] un modèle décrivant la dynamique d'un tas de sable qui présente ce phénomène. Prenez une table, par exemple circulaire, et versez lentement du sable dessus, en imaginant que chaque grain de sable tombe à une position choisie uniformément au hasard sur la table. Le sable s'accumule petit à petit pour former un tas, et la pente du tas augmente, jusqu'à ce que des avalanches surviennent. Quand une avalanche atteint le bord de la table, du sable peut s'échapper en tombant de la table (c'est-à-dire que le système est ouvert). Après une avalanche, si vous continuez à verser du sable, le tas se reconstitue et la pente du tas augmente, jusqu'à atteindre à nouveau la pente critique qui déclenche un éboulement. Au bout d'un certain temps, la forme du tas de sable va se stabiliser pour prendre la forme d'un cône, dont la pente est précisément la pente « critique » à partir de laquelle s'observent des éboulements à grande échelle.

Le système est alors dans un état qui peut être qualifié de critique, parce que chaque nouveau grain de sable qui est versé sur le tas peut potentiellement déstabiliser une large partie du cône et provoquer une avalanche de grande échelle. Nous retrouvons ici la propriété de grande sensibilité aux petites perturbations que nous avons décrite au paragraphe 1.2.

Ce système présenterait également une propriété de géométrie fractale. En effet, une partie des grains de sable se trouve dans une position d'équilibre très fragile, prêts à tomber à la moindre perturbation. Nous disons que ces grains sont dans un état « métastable ». Lorsqu'une perturbation atteint un grain qui est dans un état métastable, ce grain est déstabilisé et la perturbation se propage aux grains voisins. S'il y a des grains métastables parmi ces voisins, alors ceux-ci s'écroulent à leur tour, et peuvent faire chuter leurs voisins. Ainsi, les avalanches se propagent de proche en proche dans le réseau formé par l'ensemble des grains qui se trouvent dans un état métastable. S'il y a énormément de grains dans cet état métastable, les avalanches peuvent se propager sur de grandes distances et affecter un grand nombre de grains. Ces grains retombent alors dans une position un peu plus stable, ce qui fait diminuer le nombre de grains métastables. Ainsi, le réseau des grains métastables se rétrécit peu à peu, jusqu'au point précis où ce réseau est tout juste suffisamment élagué pour que les perturbations ne parviennent plus à s'y propager sur des distances arbitraires. L'ensemble des grains métastables ressemble alors à une configuration de percolation critique (voir section 2), avec une géométrie fractale, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune échelle de longueur caractéristique. Dans cet état auto-critique, l'ampleur des avalanches est distribuée comme la taille des composantes connexes de grains métastables, c'est-à-dire selon une

loi de puissance.

Différentes expériences ont été menées pour tester ces prédictions théoriques, mais avec des résultats mitigés. Notamment le protocole ci-dessus a été mis en œuvre dans [HSS⁺90], ce qui a permis d'identifier une loi de puissance pour les petites avalanches, mais le phénomène semble différent pour les tas de plus grande taille. Une étude similaire a été menée avec des grains de riz [FCMS⁺96] et a permis d'observer un comportement auto-critique, mais celui-ci semble limité aux grains de riz les plus allongés. Dans [Nag92], Sydney Nagel explique que les effets de friction entre les grains, qui sont plus faibles pour les tas de petite taille ou pour les grains de riz allongés, empêchent l'observation du phénomène de criticité auto-organisée pour un tas de sable réel. Notamment, plutôt qu'une pente critique, il y a deux pentes critiques à cause du phénomène d'hystérésis induit par la friction. La pente à partir de laquelle les avalanches se déclenchent est différente de la pente « de repos », plus faible, qui s'observe après une avalanche. Pour les tas de petite taille, la différence entre ces deux pentes se traduit par une différence de hauteur de l'ordre d'un grain de sable, et n'est donc pas visible dans les expériences. Les grains de riz allongés, quant à eux, ont tendance à mieux glisser les uns sur les autres, ce qui réduit ce phénomène de friction. Ainsi, selon Nagel, la théorie de la criticité auto-organisée n'est ni confirmée ni infirmée, mais du moins les expériences montrent que son application aux tas de sable est discutable.

Modélisation mathématique par un automate cellulaire

Pas vraiment confirmé par les expériences réelles, l'intérêt de cette « expérience de pensée » du tas de sable réside plutôt dans le modèle mathématique proposé par Bak, Tang et Wiesenfeld. En effet, dans [BC89], Per Bak et Kan Chen expliquent, en parlant du tas de sable et d'autres modèles de criticité auto-organisée (nous traduisons de l'anglais) :

« Ces modèles ne sont des représentations réalistes d'aucun système réel. Nous avons choisi de sacrifier le réalisme pour la simplicité afin d'obtenir une saveur générale des mécanismes à l'œuvre. [...] Nous utilisons l'image du tas de sable non pas parce que nous sommes particulièrement intéressés par les tas de sable, ou parce que les modèles sont particulièrement réalistes pour les tas de sable (en fait ils ne le sont probablement pas), mais parce que cette image donne une bonne intuition du phénomène dont nous discutons. »

Le modèle mathématique du tas de sable est un automate cellulaire très simple, mais qui est déjà capable de reproduire l'essentiel du phénomène de criticité auto-organisée décrit ci-dessus. Ainsi, le succès de ce modèle, si tant est que l'on puisse parler de succès pour un modèle qui ne modélise pas très bien la réalité physique, réside principalement du côté de son étude théorique. Ce modèle est défini comme suit :

Choisissons des entiers $d \geq 1$ et $N \geq 2$, et considérons l'ensemble $E = \{1, \dots, N\}^d$. Une configuration de grains est donnée par un tableau d'entiers $h : E \rightarrow \mathbb{N}$ où, pour chaque position $x \in E$, le nombre $h(x)$ représente le nombre de grains de sable à cette position (dans certaines variantes, ce nombre représente la pente locale du nombre de grains dans une direction donnée). Nous commençons avec une configuration identiquement nulle, et nous mettons à jour la configuration à chaque itération, en suivant les instructions suivantes :

- Nous sélectionnons un sommet $x_0 \in E$ uniformément au hasard, et nous ajoutons un grain sur la case x_0 , c'est-à-dire que nous augmentons la hauteur $h(x_0)$ de 1.
- S'il existe un sommet $x_1 \in E$ tel que $h(x_1) \geq 2d$, alors nous choisissons un tel sommet x_1 . La pile située au sommet x_1 « s'écroule » sur ses voisins : nous diminuons $h(x_1)$ de $2d$ unités et, en chacun des au plus $2d$ voisins de x_1 dans E (si x_1 est sur le bord, il a strictement moins que $2d$ voisins), nous incrémentons la valeur de h de 1.
- Nous recommençons l'étape précédente tant qu'il existe encore au moins un sommet $x_1 \in E$ avec $h(x_1) \geq 2d$.

Comme démontré dans [Dha90], il n'y a bien qu'un nombre fini de sommets qui s'écroulent après ajout d'un grain, et le choix de x_1 à la deuxième étape n'a pas d'importance, c'est-à-dire que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel les sommets s'écroulent. Pour cette raison, ce modèle est appelé

le modèle du tas de sable abélien. L'ensemble des sommets qui se sont écroulés après l'ajout d'un grain constitue ce que l'on appelle une avalanche. Notons bien qu'une avalanche se déroule « instantanément », en comparaison de la vitesse à laquelle les grains sont versés, puisque nous attendons que tous les sommets de l'avalanche se soient écroulés avant de recommencer une nouvelle itération en ajoutant un grain. Nous reconnaissons ici un ingrédient commun à de nombreux modèles de criticité auto-organisée, comme expliqué au paragraphe 1.3, à savoir que l'échelle de temps du forçage extérieur du système est bien distincte de l'échelle de temps de la relaxation des avalanches.

L'ensemble des configurations stables (c'est-à-dire telles que $h(x) < 2d$ pour tout $x \in E$) peut être divisé en deux catégories, avec d'une part des configurations dites récurrentes, qui sont atteignables avec une probabilité positive depuis toutes les autres configurations en un nombre fini d'itérations, et qui reviennent donc presque sûrement une infinité de fois, et d'autre part les configurations dites transientes, que l'on ne peut plus retrouver une fois une configuration récurrente atteinte. Les questions intéressantes concernent cet ensemble de configurations récurrentes, leurs propriétés géométriques, et les propriétés statistiques des avalanches qui surviennent dans ces configurations. En dimension $d = 1$, le comportement du modèle est assez simple, car les seules configurations récurrentes sont les configurations où $h(x) = 1$ pour tout $x \in E$ sauf en au plus un emplacement [RS92]. C'est en dimension $d \geq 2$ que le modèle devient véritablement intéressant.

Ce modèle a donné lieu à de nombreux développements depuis plus de 30 ans, autant du côté des physiciens que des mathématiciens. Nous ne mentionnons ici que quelques-uns des résultats, et renvoyons à [Dha06] et [J18] pour une présentation plus complète.

Dans [MD92], une bijection est définie entre les configurations récurrentes et les arbres couvrants, grâce à une procédure appelée « burning method ». En utilisant cette correspondance, la distribution exacte des hauteurs de grains a été calculée par [Pri94]. Dans [IKP94], un nouveau point de vue sur les avalanches est introduit, qui consiste à considérer l'ensemble des sommets qui s'écroulent exactement une fois pendant une avalanche. Cet ensemble est appelé « vague », et peut être décrit avec des arbres couvrants doublement enracinés, ce qui permet d'obtenir des informations sur la distribution de la taille des vagues. Alors que la distribution des avalanches est mal comprise, la distribution des vagues présenterait des lois de puissance, et cette correspondance avec les arbres couvrants a permis de calculer plusieurs exposants critiques [KLGP00], et d'obtenir des résultats sur la limite en volume infini du modèle en dimension $d \geq 3$ dans [JR08]. Par ailleurs, il a été montré dans [Pri00] que la dimension critique du modèle du tas de sable est égale à 4, ce qui signifie qu'en dimension $d \geq 4$, le modèle se comporte de façon similaire au cas du graphe complet.

Dans [BHJ17], une inégalité sur les exposants critiques a été obtenue en toute dimension $d \geq 2$. Cependant, d'après [Dro00], la loi de puissance espérée sur la taille des avalanches n'est pas vérifiée en dimension 2, mais serait limitée aux avalanches qui atteignent le bord, c'est-à-dire celles qui dissipent des grains hors du système. Selon [DMST98] et [TDMS99], le cas de la dimension 2 présente une distribution multifractale plutôt qu'une loi de puissance, ce qui était déjà entrevu dans [KNWZ89]. Mais en dimension $d \geq 5$, les lois de puissance observées numériquement par Bak, Tang et Wiesenfeld concernant la distribution de la taille, du diamètre et du nombre des avalanches ont été confirmées récemment par [Hut20], en montrant que les forêts couvrantes uniformes présentent un comportement de type champ moyen. Mentionnons également le récent résultat [PS20] sur la géométrie fractale des motifs qui apparaissent dans certaines configurations récurrentes.

2 La percolation

2.1 Description intuitive du modèle

Parmi les modèles mathématiques qui présentent une transition de phase, l'un des plus célèbres est la percolation. Ce modèle a été défini en 1957 par Simon Broadbent et John Hammersley [BH57], dans le but de comprendre la propagation d'un fluide dans un solide poreux, ainsi que d'autres phénomènes similaires. Le solide poreux est constitué de fissures et de pores dans lesquels le fluide peut s'infiltrer, et une question intéressante est de savoir, en fonction de la quantité de pores et de fissures, jusqu'où

l'infiltration est possible. Pour simplifier, Broadbent et Hammersley considèrent que les pores forment un réseau cubique, c'est-à-dire qu'il y a un pore situé en chaque point de $\mathbb{Z}^3$. Les fissures sont quant à elles modélisées par des arêtes qui relient les pores voisins, c'est-à-dire les points voisins dans $\mathbb{Z}^3$.

Pour refléter le caractère irrégulier du solide, nous considérons que pour chaque arête entre deux pores voisins, avec une certaine probabilité p celle-ci est assez large pour laisser passer le fluide (nous disons alors que l'arête est ouverte), tandis qu'avec probabilité $1 - p$ la fissure est absente ou trop étroite et donc étanche au fluide (dans ce cas l'arête est dite fermée). Ainsi, chaque arête du réseau $\mathbb{Z}^3$ est ouverte avec probabilité p , et fermée avec probabilité $1 - p$. Dans le modèle le plus simple, appelé percolation de Bernoulli, les états des différentes arêtes sont indépendants.

Imaginons que le solide soit une roche plongée dans de l'eau, et que nous voulions savoir si l'eau va finir par atteindre le centre de la roche. Nous ne nous intéressons pas au temps nécessaire pour que le centre de la roche finisse par être mouillé, mais seulement au fait de savoir si cela finira par arriver. Des variantes plus complexes de la percolation permettent d'étudier cette vitesse d'infiltration, comme la percolation de premier passage ou la percolation d'invasion (voir paragraphe 4.4). Ainsi, nous voulons savoir s'il existe un chemin de fissures larges qui relie le centre de la roche au bord de la roche. Pour des roches de taille « normale », c'est-à-dire beaucoup plus grandes que la taille des pores, cette question revient plus ou moins à rechercher un chemin qui part d'un sommet dans $\mathbb{Z}^3$, n'emprunte que des arêtes ouvertes et continue arbitrairement loin, jusqu'à l'infini. C'est pourquoi nous nous intéressons à la probabilité qu'il existe dans notre modèle un chemin ouvert de longueur infinie.

Cette probabilité dépend bien sûr du paramètre p , et il n'est pas difficile de voir qu'elle vaut 0 si $p = 0$ et 1 si $p = 1$, et qu'elle est croissante entre ces deux valeurs. Mais ce qui est plus surprenant, c'est que la transition entre $p = 0$ (solide étanche) et $p = 1$ (solide complètement poreux) ne se fait pas du tout de façon progressive. Il y a au contraire un phénomène de seuil, avec une probabilité critique p_c , comprise strictement entre 0 et 1 et telle que, si $p < p_c$, alors la probabilité qu'il existe un chemin ouvert de longueur infinie est nulle, tandis que si $p > p_c$, cette probabilité vaut 1, c'est-à-dire qu'un tel chemin existe presque sûrement. Il s'agit donc d'une transition de phase, avec un point critique qui sépare deux régimes dont les comportements macroscopiques sont très différents.

D'un point de vue physique, ce modèle peut paraître un peu trop simpliste pour être réaliste. Pourtant, son comportement est déjà suffisamment riche pour aider à comprendre le phénomène de transition de phase, et son étude mathématique a contribué au développement de tout un ensemble de techniques et d'idées nouvelles en théorie des probabilités. De très nombreuses variantes existent, notamment en considérant d'autres graphes, et ont donné lieu à des applications variées, qui sont loin de se limiter à l'infiltration de l'eau dans les roches poreuses (par exemple la diffusion des épidémies ou des incendies, l'étude des réseaux sociaux, etc).

Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons le modèle de percolation dans $\mathbb{Z}^d$ et quelques-unes de ses propriétés qui nous seront utiles par la suite.

2.2 Notations et définitions

Arêtes, boîtes et bords

Nous nous plaçons en dimension d , avec d un entier supérieur ou égal à 2. Nous disons que deux points $x, y \in \mathbb{Z}^d$ sont voisins, ce que nous notons $x \sim y$, si $\|x - y\|_2 = 1$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne usuelle. Pour tout ensemble de sommets $V \subset \mathbb{Z}^d$, nous notons

$$\mathbb{E}[V] = \left\{ \{x, y\} \subset V : x \sim y \right\}$$

l'ensemble des arêtes (non orientées) entre deux sommets voisins de V . Nous définissons de cette façon $\mathbb{E}^d = \mathbb{E}[\mathbb{Z}^d]$. Il sera également intéressant de considérer le modèle de percolation sur des boîtes finies, c'est pourquoi nous noterons, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\Lambda(n) = \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right]^d \cap \mathbb{Z}^d = \left\{ -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\}^d$$

la boîte (hyper-)cubique centrée en 0 et contenant n^d sommets. L'ensemble des arêtes de cette boîte sera noté $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}[\Lambda(n)]$. Pour tout ensemble de sommets $V \subset \mathbb{Z}^d$, nous définissons son bord intérieur comme

$$\partial V = \left\{ x \in V : \exists y \in \mathbb{Z}^d \setminus V \quad x \sim y \right\},$$

et son bord extérieur, qui sera noté

$$\partial^e V = \left\{ e = \{x, y\} \in \mathbb{E}^d : x \in V \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{Z}^d \setminus V \right\}.$$

Le diamètre d'un ensemble fini non vide $V \subset \mathbb{Z}^2$ sera noté

$$\text{diam } V = \max_{x, y \in V} \|x - y\|_\infty \quad \text{où} \quad \|(x_1, \dots, x_d)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|.$$

Par un léger abus de langage, nous dirons qu'un ensemble $V \subset \mathbb{Z}^2$ est connexe si tous ses sommets sont reliés entre eux par un chemin d'arêtes de $\mathbb{E}^d$ dont tous les sommets intermédiaires appartiennent à V .

Configurations et clusters

Soit $\omega : \mathbb{E}^d \rightarrow \{0, 1\}$. Un tel élément ω est appelé une configuration de percolation sur $\mathbb{Z}^d$. Les arêtes $e \in \mathbb{E}^d$ telles que $\omega(e) = 1$ sont dites ouvertes, et les autres arêtes sont dites fermées. L'espace des configurations est muni d'un ordre partiel naturel défini par $\omega_1 \leq \omega_2$ si $\omega_1(e) \leq \omega_2(e)$ pour toute arête $e \in \mathbb{E}^d$. Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures de probabilité sur $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, nous dirons que μ_2 domine stochastiquement μ_1 , ce qui sera noté $\mu_1 \preceq \mu_2$, si nous avons $\mu_1(X) \leq \mu_2(X)$ pour toute variable aléatoire croissante $X : \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout ensemble d'arêtes $H \subset \mathbb{Z}^d$, nous notons

$$\omega_H : e \in \mathbb{E}^d \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } e \in H, \\ \omega(e) & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \omega^H : e \in \mathbb{E}^d \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } e \in H, \\ \omega(e) & \text{sinon} \end{cases}$$

les configurations obtenues à partir de ω respectivement en fermant ou en ouvrant toutes les arêtes de H . Dans le cas d'un singleton $H = \{e\}$, nous écrirons simplement ω_e ou ω^e . Pour deux sommets $x, y \in \mathbb{Z}^d$, nous écrivons

$$x \xleftrightarrow{\omega} y$$

s'il existe un chemin constitué d'arêtes ouvertes dans la configuration ω reliant x à y . Pour $x \in \mathbb{Z}^d$, nous notons

$$C(x) = C(x, \omega) = \left\{ y \in \mathbb{Z}^d : x \xleftrightarrow{\omega} y \right\}$$

la composante connexe de x , ou « cluster » de x , dans la configuration ω . Si $x \in \mathbb{Z}^d$ et $Y \subset \mathbb{Z}^d$, nous écrivons

$$x \xleftrightarrow{\omega} Y \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in Y \quad x \xleftrightarrow{\omega} y.$$

Configurations sur la boîte

Soit $n \geq 1$. Un élément $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$ est appelé configuration de percolation sur la boîte $\Lambda(n)$. Les définitions ci-dessus s'étendent de façon naturelle aux configurations sur la boîte. Ainsi, le cluster d'un sommet $x \in \Lambda(n)$ dans la boîte $\Lambda(n)$ sera également noté $C(x, \omega)$, sauf s'il y a un risque de confusion, auquel cas nous préciserons $C_{\Lambda(n)}(x, \omega)$. L'ensemble des clusters ouverts dans la configuration ω sur la boîte $\Lambda(n)$ sera noté

$$\mathcal{C}_n(\omega) = \left\{ C_{\Lambda(n)}(x) : x \in \Lambda(n) \right\}.$$

L'ensemble des sommets reliés au bord de la boîte dans la configuration ω sera noté

$$\mathcal{M}_n(\omega) = \left\{ x \in \Lambda(n) : x \xleftrightarrow{\omega} \partial \Lambda(n) \right\},$$

tandis que $\mathcal{C}_n^-(\omega)$ désignera l'ensemble des clusters ouverts qui ne touchent pas le bord, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}_n^-(\omega) = \left\{ C_{\Lambda(n)}(x) : x \in \Lambda(n) \setminus \mathcal{M}_n(\omega) \right\}.$$

Nous avons ainsi une partition de la boîte $\Lambda(n)$:

$$\Lambda(n) = \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_n(\omega)} C = \mathcal{M}_n(\omega) \sqcup \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} C.$$

Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n^2\}$, nous noterons

$$\mathcal{C}_n^-(k) = \mathcal{C}_n^-(k, \omega) = \left\{ C \in \mathcal{C}_n^-(\omega) : |C| = k \right\}$$

l'ensemble des clusters ouverts qui ne touchent pas le bord et qui contiennent exactement k sommets. Pour $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$ une configuration de percolation dans la boîte $\Lambda(n)$, notons $C_{max}(\omega) \subset \Lambda(n)$ le plus grand cluster ouvert dans la configuration ω , en nombre de sommets. En cas d'égalité entre plusieurs clusters, nous en choisissons un avec un ordre arbitraire sur les parties de $\Lambda(n)$.

Définition du modèle de percolation Bernoulli

Pour $0 \leq p \leq 1$, sur l'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ muni de la tribu engendrée par les événements ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes, notons $\mathbb{P}_p$ la mesure produit telle que l'état de chaque arête suit une loi de Bernoulli de paramètre p . Ainsi, sous la loi $\mathbb{P}_p$, chaque arête est ouverte avec probabilité p et fermée avec probabilité $1 - p$, les arêtes étant indépendantes les unes des autres. Nous noterons aussi $\mathbb{P}_p$ la loi induite sur les configurations sur les boîtes. Ainsi, pour toute configuration $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$, nous avons

$$\mathbb{P}_p(\omega) = \prod_{e \in \mathbb{E}_n} p^{\omega(e)} (1 - p)^{1 - \omega(e)} = p^{o(\omega)} (1 - p)^{|\mathbb{E}_n| - o(\omega)},$$

où nous avons noté $o(\omega)$ le nombre d'arêtes de $\mathbb{E}_n$ qui sont ouvertes dans la configuration ω .

2.3 Inégalités de corrélation

Deux inégalités de corrélation jouent un rôle particulièrement important en théorie de la percolation. L'inégalité FKG, démontrée par Cees Fortuin, Pieter Kasteleyn et Jean Ginibre [FKG71], stipule que les événements croissants, c'est-à-dire les événements dont la fonction indicatrice est une fonction croissante de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ vers $\mathbb{R}$, sont positivement corrélés.

Proposition 1 (Inégalité FKG). *Si $p \in [0, 1]$ et si A et B sont deux événements croissants, alors*

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \mathbb{P}_p(B).$$

Une autre inégalité importante est l'inégalité BK, nommée d'après Jacob van den Berg et Harry Kesten [vdBK85]. Soient A et B deux événements croissants ne dépendant que d'un ensemble fini d'arêtes E . Nous notons $A \circ B$ l'événement donné par l'ensemble des configurations ω pour lesquelles il existe une partie $F \subset E$ telle que $\omega_F \in A$ et $\omega_{E \setminus F} \in B$. Cet événement est appelé l'occurrence disjointe de A et B .

Proposition 2 (Inégalité BK). *Si $p \in [0, 1]$ et si A et B sont deux événements croissants ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes, alors nous avons*

$$\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A) \mathbb{P}_p(B).$$

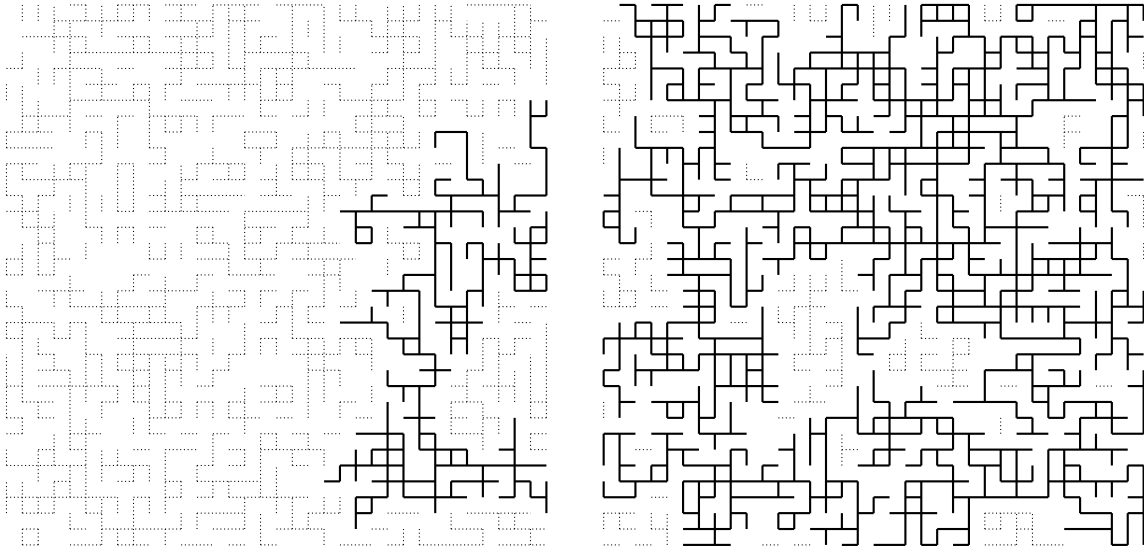


FIGURE 1.1 – Percolation dans la boîte $\Lambda(n)$ avec $p = 0.48$ à gauche et $p = 0.52$ à droite. Les arêtes du plus grand cluster sont dessinées en traits pleins et les autres arêtes ouvertes en pointillés.

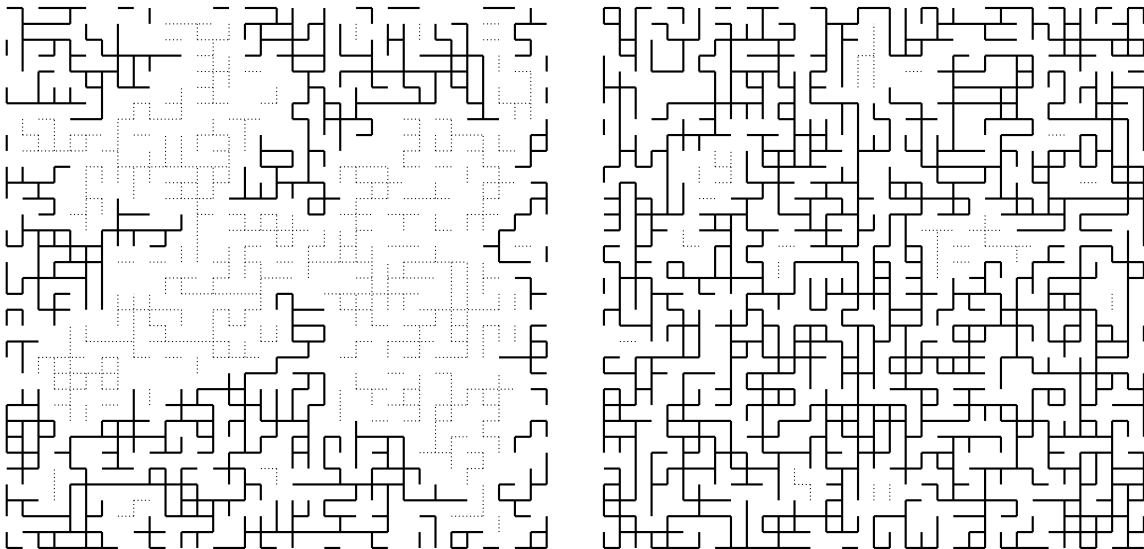


FIGURE 1.2 – Percolation dans la boîte $\Lambda(n)$ avec $p = 0.48$ à gauche et $p = 0.52$ à droite. Les arêtes reliées au bord sont dessinées en traits pleins et les autres arêtes ouvertes en pointillés.

2.4 Phénomène de transition de phase

Une question particulièrement intéressante dans le modèle de percolation sur $\mathbb{Z}^d$ tout entier est de savoir si le cluster d'un sommet donné contient un nombre infini de sommets. Le modèle étant invariant par translation, nous considérons le cluster de l'origine, et nous notons, pour $p \in [0, 1]$,

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty)$$

la probabilité que le cluster de l'origine soit infini dans une configuration ω tirée suivant $\mathbb{P}_p$. Nous définissons alors la probabilité critique p_c du modèle de percolation, en posant

$$p_c = \inf \left\{ p \in [0, 1] : \theta(p) > 0 \right\}.$$

Nous avons alors le résultat fondamental suivant, dû à Broadbent et Hammersley [BH57, Ham57, Ham59] :

Théorème 1. *En toute dimension $d \geq 2$, nous avons $0 < p_c < 1$, c'est-à-dire que le modèle de percolation présente effectivement un phénomène de transition de phase.*

Ce point critique p_c sépare deux régimes caractérisés par des propriétés très différentes. Dans le régime $p < p_c$, appelé phase sous-critique, les clusters sont tous de taille finie presque sûrement. De plus, la distribution du diamètre des clusters présente une décroissance exponentielle, démontrée par Mikhail Menshikov [Men86] :

Proposition 3. *Pour tout $p < p_c$, il existe $\psi(p) > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathbb{P}_p(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda(n)) \leq e^{-n\psi(p)}.$$

Nous avons une décroissance exponentielle similaire pour le volume des clusters, qui a été démontrée par Michael Aizenmann et Charles Newman [AN84] :

Proposition 4. *Pour tout $p < p_c$, il existe $\phi(p) > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathbb{P}_p(|C(0)| \geq n) \leq e^{-n\phi(p)}.$$

Plus précisément, nous avons

$$\forall n > \chi(p)^2 \quad \mathbb{P}_p(|C(0)| \geq n) \leq 2 \exp\left(-\frac{n}{2\chi(p)^2}\right),$$

où

$$\chi(p) = \mathbb{E}_p[|C(0)|]$$

est la taille moyenne des clusters.

Dans le régime surcritique, la situation est bien différente, comme le montre le résultat suivant, dû à Robert Burton et Michael Keane [BK89] :

Proposition 5. *Pour tout $p > p_c$, presque sûrement, il existe exactement un cluster ouvert infini.*

Ce cluster infini occupe alors une fraction positive du volume des grandes boîtes, ce qui a pour conséquence que dans chaque grande boîte $\Lambda(n)$, il y a avec grande probabilité un cluster qui touche le bord de la boîte et contient environ $\theta(p)n^d$ sommets, ce qui est précisé par la proposition suivante :

Proposition 6. *Pour tous $p > p_c$ et $r < \theta(p)$, il existe une constante $c(p, r) > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathbb{P}_p(\exists x \in \partial\Lambda(n) : |C_{\Lambda(n)}(x)| \geq rn^d) \leq e^{-c(p,r)n^{d-1}}.$$

Ce résultat a été démontré en dimension $d \geq 3$ par Agoston Pisztora (théorème 1.2 de [Pis96]), jusqu'à un seuil $\widehat{p}_c$ de percolation dans des tranches, dont Geoffrey Grimmett et John Marstrand ont démontré qu'il était égal à la probabilité critique p_c [GM90]. En dimension 2, cela découle des résultats de Kenneth Alexander, Jennifer Chayes et Lincoln Chayes [ACC90], comme nous le montrerons au lemme 36, dans le chapitre 5 (pour le cas $r = 1/8$, pour simplifier les notations).

De plus, la taille des clusters finis dans le régime surcritique est contrôlée par une inégalité exponentielle, obtenue par Jennifer Chayes, Lincoln Chayes et Charles Newman [CCN87] en dimension $d \geq 3$ en utilisant la percolation d'invasion (voir paragraphe 4.4), et en dimension 2 par Jennifer Chayes, Lincoln Chayes, Geoffrey Grimmett, Harry Kesten et Roberto Schonmann [CCG⁺89].

Proposition 7. *Pour tout $p > p_c$, il existe $\sigma(p) > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathbb{P}_p \left(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda(n) \quad \text{et} \quad |C(0)| < \infty \right) \leq e^{-n\sigma(p)}.$$

Le modèle de percolation peut également être défini sur d'autres graphes. Notamment, une variante consiste à considérer le même modèle mais sur le graphe complet à n sommets, c'est-à-dire que pour chaque paire de sommets parmi les n sommets, il existe une arête entre ces deux sommets avec probabilité p . Nous obtenons alors un graphe aléatoire appelé graphe d'Erdős-Rényi [ER59].

Une autre variante consiste à considérer la percolation sur un arbre régulier. Dans cette variante, de nombreuses quantités comme les exposants critiques peuvent être facilement calculées, et permettent de comprendre le comportement de la percolation dans $\mathbb{Z}^d$ en grande dimension [HS90].

Au lieu de déclarer chaque arête ouverte ou fermée, une variante appelée percolation par sites consiste à déclarer chaque sommet ouvert ou fermé avec probabilité p .

De nombreuses questions constituent encore des sujets actifs de recherche, comme la recherche des exposants critiques, qui ne sont connus qu'en dimension 2 dans le cas de la percolation par sites sur le réseau triangulaire [SW01], ainsi qu'en grande dimension. Une autre question centrale est de savoir si $\theta(p_c) = 0$, ce qui est prouvé en dimension 2 et en grande dimension, mais reste par exemple à l'état de conjecture en dimension 3. D'importants progrès ont été réalisés dans l'étude de la limite d'échelle de la percolation quasi-critique, c'est-à-dire l'étude du comportement lorsque l'échelle du réseau tend vers 0 en même temps que le paramètre p se rapproche du point critique p_c [SS11, GPS18a]. Un autre objet intéressant est le « cluster infini émergent », construit par Harry Kesten [Kes86], et qui correspond intuitivement au cluster de l'origine en percolation critique « conditionné à ce que celui-ci soit infini ». De nombreux travaux visent à démontrer que la percolation au point critique possède une propriété d'invariance conforme, ce qui a été démontré dans le cas du réseau triangulaire pour la percolation par sites [Smi01].

2.5 La FK-percolation

Une variante de la percolation Bernoulli, nommée FK-percolation d'après Cees Fortuin et Piet Kasteleyn, est particulièrement intéressante pour l'étude du modèle d'Ising, que nous aborderons plus loin. Le modèle de FK-percolation sur la boîte $\Lambda(n)$ de paramètres $p \in [0, 1]$ et $q > 0$ et avec condition aux bords $\xi \in \{0, 1\}$ est défini par la densité de probabilité suivante :

$$\phi_{n,p,q}^\xi(\omega) : \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n} \mapsto \frac{1}{Z_{n,p,q}^\xi} q^{k^\xi(\omega)} \prod_{e \in \mathbb{E}_n} p^{\omega(e)} (1-p)^{1-\omega(e)}$$

où $Z_{n,p,q}^\xi$ est la constante de normalisation appropriée, qui vaut

$$Z_{n,p,q}^\xi = \sum_{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} q^{k^\xi(\omega)} \prod_{e \in \mathbb{E}_n} p^{\omega(e)} (1-p)^{1-\omega(e)},$$

et où $k^0(\omega) = |\mathcal{C}_n(\omega)|$ est le nombre de clusters ouverts dans la configuration ω et $k^1(\omega) = |\mathcal{C}_n^-(\omega)| + 1$ est le nombre de clusters ouverts lorsque tous les clusters qui touchent le bord sont comptés comme un seul et même cluster.

Nous parlons de condition aux bords « libre » dans le cas $\xi = 0$, tandis que la condition aux bords $\xi = 1$ est appelée « liée ». Si $p \in [0, 1]$, $\xi \in \{0, 1\}$ et $q \geq 1$, alors quand n tend vers l'infini, la mesure $\phi_{n,p,q}^\xi$ converge faiblement vers une mesure de probabilité $\phi_{p,q}^\xi$ sur l'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, muni de la tribu engendrée par les événements ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes (voir théorème 4.19 de [Gri06]). Nous notons alors, pour $p \in [0, 1]$, $\xi \in \{0, 1\}$ et $q \geq 1$,

$$\theta^\xi(p, q) = \phi_{p,q}^\xi(|C(0)| = \infty)$$

la probabilité que l'origine appartienne à un cluster de taille infinie, et nous notons $p_c(q)$ le point critique du modèle de FK-percolation, défini par

$$p_c(q) = \inf \left\{ p \in [0, 1] : \theta^1(p, q) > 0 \right\}.$$

Nous omettrons parfois le paramètre q dans les notations, cela signifiera alors que $q = 2$. Dans ce cas particulier $q = 2$, les mesures $\phi_{p,2}^0$ et $\phi_{p,2}^1$ se trouvent être égales (d'après le corollaire 3 dans [Rao20]), donc nous noterons simplement $\theta(p) = \theta^1(p, 2)$. Remarquons enfin que pour $q = 1$, nous retrouvons le modèle de percolation Bernoulli dans lequel les états des arêtes sont indépendants.

Les mesures de FK-percolation possèdent la propriété suivante d'imbrication, qui signifie que l'imposition d'une condition aux bords revient à prendre la mesure FK dans une plus grande boîte et à conditionner par rapport à l'état des arêtes à l'extérieur de la boîte initiale. Cette proposition est un cas particulier du lemme 4.13 dans [Gri06].

Proposition 8. *Soient $p \in [0, 1]$, $q > 0$, $\xi_1, \xi_2 \in \{0, 1\}$, et n_1, n_2 tels que $n_2 \geq n_1 + 2$. Pour tout événement $\mathcal{A}$ ne dépendant que des arêtes de la boîte $\Lambda(n_1)$, nous avons*

$$\phi_{n_2,p,q}^{\xi_2}(\mathcal{A} \mid \forall e \in \mathbb{E}_{n_2} \setminus \mathbb{E}_{n_1} \quad \omega(e) = \xi_1) = \phi_{n_1,p,q}^{\xi_1}(\mathcal{A}).$$

L'inégalité FKG est encore valable dans le cadre de la FK-percolation, mais uniquement si $q \geq 1$. Nous avons donc :

Proposition 9 (Inégalité FKG). *Soient $p \in [0, 1]$ et $q \geq 1$. Si A et B sont deux événements croissants, alors*

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \mathbb{P}_p(B).$$

Des résultats de décroissance exponentielle similaires à ceux de la percolation existent également dans le cas de la FK-percolation, même si la situation est plus complexe. Nous ne détaillons pas ces résultats ici, et renvoyons cette discussion au moment où nous aurons besoin de ces inégalités, au cours du chapitre 6.

2.6 Dualité

Le modèle de FK-percolation (et donc *a fortiori* la percolation) en dimension 2 possède une propriété de dualité que nous présentons ici. Fixons un entier $n \geq 2$, et définissons le dual de la boîte $\Lambda(n)$ comme

$$\Lambda^*(n) = \Lambda(n-1) \pm \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left\{ \left(x_1 \pm \frac{1}{2}, x_2 \pm \frac{1}{2} \right) : (x_1, x_2) \in \Lambda(n-1) \right\},$$

avec un signe $-$ si n est pair et un signe $+$ sinon, de telle sorte que les sommets de $\Lambda^*(n)$ sont situés au milieu des faces du graphe $(\Lambda(n), \mathbb{E}_n)$, comme représenté sur la figure 1.3. Définissons aussi les arêtes duales, avec le même signe $\pm$, comme

$$\mathbb{E}_n^* = \mathbb{E}_{n-1} \pm \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left\{ \{x, y\} \subset \Lambda^*(n) : \|x - y\|_1 = 1 \right\}.$$

Définissons les arêtes intérieures de la boîte $\Lambda(n)$ comme

$$\mathbb{E}_n^{int} = \left\{ e = \{x, y\} \in \mathbb{E}_n : \{x, y\} \not\subset \partial\Lambda(n) \right\}. \quad (1.1)$$

Pour toute arête intérieure $e \in \mathbb{E}_n^{int}$, nous notons e^* l'arête de $\mathbb{E}_n^*$ qui coupe e perpendiculairement en son milieu, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \left\{ (x_1, x_2), (x_1 + 1, x_2) \right\}^* = \left\{ \left(x_1 + \frac{1}{2}, x_2 - \frac{1}{2} \right), \left(x_1 + \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2} \right) \right\} \\ \left\{ (x_1, x_2), (x_1, x_2 + 1) \right\}^* = \left\{ \left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2} \right), \left(x_1 + \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2} \right) \right\} \end{cases}.$$

Nous avons alors

$$\mathbb{E}_n^* = \left\{ e^* : e \in \mathbb{E}_n^{int} \right\}.$$

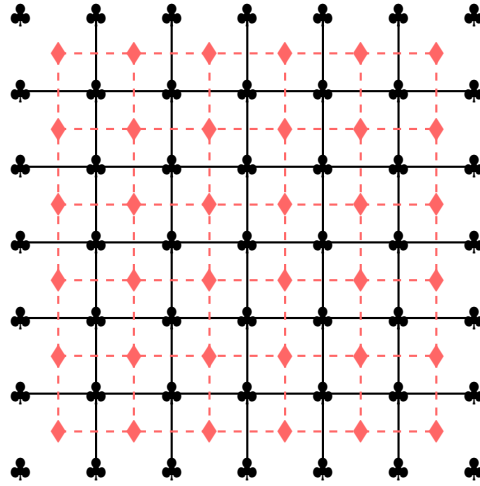


FIGURE 1.3 – La boîte $(\Lambda(n), \mathbb{E}_n^{int})$ en traits pleins et son dual $(\Lambda^*(n), \mathbb{E}_n^*)$ en tirets.

Ainsi, au sens usuel de dualité pour les graphes, le graphe $(\Lambda^*(n), \mathbb{E}_n^*)$ est le dual du graphe obtenu à partir de $(\Lambda(n), \mathbb{E}_n^{int})$ en identifiant tous les sommets du bord $\partial\Lambda(n)$. Si $F \subset \mathbb{E}_n^{int}$ est un ensemble d'arêtes intérieures, nous noterons $F^* = \{e^* : e \in F\}$. À toute configuration $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n}$, nous pouvons associer une configuration duale $\omega^* \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n^*}$ en posant

$$\forall e \in \mathbb{E}_n^{int} \quad \omega^*(e^*) = 1 - \omega(e).$$

Si nous identifions le graphe $(\Lambda^*(n), \mathbb{E}_n^*)$ avec la boîte $(\Lambda(n-1), \mathbb{E}_{n-1})$, ce qui revient à effectuer une translation d'un vecteur $\pm(1/2, 1/2)$, avec un signe $+$ si n est pair et un signe $-$ sinon, alors nous avons la propriété suivante (qui découle de l'équation 6.12 dans [Gri06]) :

Proposition 10. *Soient $p \in [0, 1]$, $q \geq 1$ et $n \geq 2$. Soit $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n}$ une configuration de percolation distribuée suivant la loi $\phi_{n,p,q}^1$. Alors la configuration duale associée $\omega^* \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n^*} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{E}_{n-1}}$ est distribuée suivant la loi $\phi_{n-1,p^*,q}^0$, où le paramètre p^* est donné par la relation*

$$pp^* = q(1-p)(1-p^*).$$

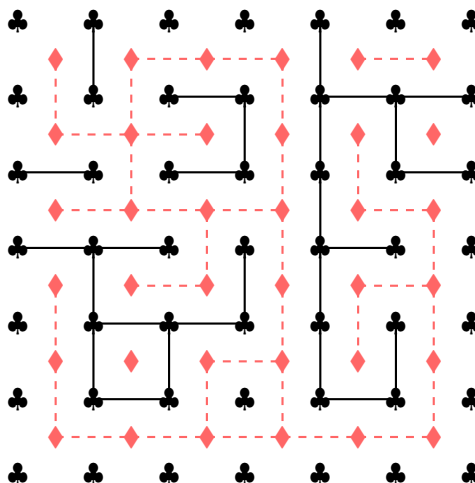


FIGURE 1.4 – Une configuration $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n}$ en traits pleins (dont seules les arêtes intérieures sont représentées) et sa configuration duale $\omega^* \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n^*}$ en tirets.

3 Le modèle d'Ising

3.1 Définition du modèle

Un autre modèle important qui présente une transition de phase est le modèle d'Ising, très étudié à la fois par les physiciens et par les mathématiciens. Ce modèle a été défini dans les années 1920 par Wilhelm Lenz et son élève Ernst Ising, qui a étudié dans sa thèse le cas de la dimension 1. Inventé pour décrire la physique des aimants, le modèle d'Ising standard est défini dans un premier temps sur la boîte $\Lambda(n)$, définie au paragraphe 2.2. Contrairement à la percolation qui peut être facilement construite directement sur $\mathbb{Z}^d$ tout entier, le modèle d'Ising est d'abord défini en volume fini, puis une opération de passage à la limite est nécessaire pour obtenir le modèle d'Ising sur $\mathbb{Z}^d$. Imaginons que la boîte $\Lambda(n)$ représente un aimant, et qu'en chaque point de $\Lambda(n)$ se situe un atome. Cet atome possède un « spin » magnétique, qui ne peut prendre que deux valeurs, notées $+$ et $-$. Ainsi, à chaque sommet $x \in \Lambda(n)$ est associée une variable $\sigma(x) \in \{-, +\}$. Un élément $\sigma \in \{-, +\}^{\Lambda(n)}$ est appelé une configuration de spin.

Du fait de la force électromagnétique, les spins des atomes voisins interagissent de façon attractive, c'est-à-dire qu'ils ont tendance à s'aligner pour prendre le même signe. Cette interaction peut être encodée dans la fonction d'énergie suivante, appelée Hamiltonien de la configuration de spin σ :

$$\mathcal{H}_n(\sigma) = - \sum_{\{x,y\} \in \mathbb{E}_n} \sigma(x)\sigma(y) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{(x,y) \in \Lambda(n)^2 \\ x \sim y}} \sigma(x)\sigma(y),$$

où nous prenons la somme sur tous les couples $\{x, y\}$ de sommets voisins dans la boîte $\Lambda(n)$. Le signe négatif signifie que les configurations dans lesquelles les atomes voisins ont des spins égaux ont une énergie plus faible, et sont donc favorisées. Les états d'énergie minimale sont alors les deux configurations constantes $\sigma \equiv +$ et $\sigma \equiv -$, dans lesquelles tous les spins sont alignés.

Mais, à cause des fluctuations thermiques, un aimant observé à une température T est rarement dans un état d'énergie minimale. Au lieu de cela, son état tend à être distribué suivant une loi de Boltzmann, donnée par la distribution de probabilité

$$\mu_{n,T} : \sigma \in \{-, +\}^{\Lambda(n)} \mapsto \frac{1}{Z_{n,T}} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_n(\sigma)}{T}\right),$$

où $Z_{n,T}$ est la constante de normalisation appropriée, appelée fonction de partition, qui vaut

$$Z_{n,T} = \sum_{\sigma \in \{-,+\}^{\Lambda(n)}} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_n(\sigma)}{T}\right).$$

Par conséquent, les deux configurations extrémales dans lesquelles tous les spins sont égaux sont celles de probabilité maximale, mais les configurations avec une répartition plus équilibrée de spins $+$ et $-$ sont bien plus nombreuses : nous disons que ces dernières ont une plus grande entropie. Il y a donc une compétition entre l'énergie et l'entropie, et la température joue un rôle d'arbitre, en décidant lequel des effets l'emporte.

Pour étudier ce modèle, nous ajoutons une contrainte en imposant une condition aux bords. Par exemple, nous pouvons forcer les spins sur la frontière de la boîte $\Lambda(n)$ à porter un signe $+$. Nous étudions alors une mesure $\mu_{n,T}^+$, qui s'obtient à partir de la mesure $\mu_{n,T}$ en conditionnant par rapport à l'événement que $\sigma(x) = +$ pour tout $x \in \partial\Lambda(n)$. Nous avons donc

$$\mu_{n,T}^+ : \sigma \in \{-,+\}^{\Lambda(n)} \mapsto \frac{1}{Z_{n,T}^+} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_n^+(\sigma)}{T}\right)$$

où $Z_{n,T}^+$ est la nouvelle fonction de partition, et où le Hamiltonien $\mathcal{H}_n^+$ est donné par

$$\mathcal{H}_n^+(\sigma) = \begin{cases} \mathcal{H}_n(\sigma) & \text{si } \sigma(x) = + \text{ pour tout } x \in \partial\Lambda(n), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous étendons la définition ci-dessus au cas d'une température nulle en posant

$$\mu_{n,0}^+ : \sigma \in \{-,+\}^{\Lambda(n)} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(x) = + \text{ pour tout } x \in \Lambda(n), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour toute configuration $\sigma : \Lambda(n) \rightarrow \{-,+\}$, nous définissons la magnétisation de σ comme

$$m(\sigma) = \sum_{x \in \Lambda(n)} \sigma(x).$$

Une question intéressante se pose alors : lorsque la taille de la boîte $\Lambda(n)$ tend vers l'infini, est-ce que l'aimantation moyenne $m(\sigma)/|\Lambda(n)|$ reste influencée par la condition aux bords ? Plus précisément, nous considérons la limite décroissante suivante :

$$m^*(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,T}^+(m(\sigma)),$$

où $\mu_{n,T}^+(\cdot)$ désigne l'espérance par rapport à la mesure d'Ising à température T avec condition $+$ aux bords de la boîte $\Lambda(n)$. La propriété fondamentale du modèle d'Ising est l'existence d'une transition de phase, avec une température critique, notée T_c . Quand $T < T_c$, nous avons $m^*(T) > 0$, ce qui signifie que les spins $+$ l'emportent sur les spins $-$, tandis que $m^*(T) = 0$ pour $T > T_c$, ce qui signifie que, loin du bord, les spins ont tendance à être distribués équitablement. Alors que pour des tailles de boîtes finies, les fonctions $T \mapsto \mu_{n,T}^+(m(\sigma))$ sont analytiques, leur limite quand le nombre de spins en interaction tend vers l'infini n'est plus analytique et présente un comportement singulier au voisinage de la température critique.

Physiquement, ce phénomène se traduit par une propriété des aimants sous l'effet d'un champ magnétique : si un champ extérieur est appliqué sur un aimant, les spins de cet aimant ont tendance à s'aligner avec le champ magnétique extérieur. Si ce champ est ensuite « éteint », alors nous observons deux comportements différents en fonction de la température. Au-dessous de la température critique T_c , les spins « gardent la mémoire » du champ magnétique et restent majoritairement alignés dans la même direction, alors qu'ils « oublient » celui-ci et reviennent au désordre au-dessus de cette température.

3.2 Couplage d'Edwards-Sokal

Le modèle de FK-percolation avec $q = 2$ est relié au modèle d'Ising via le couplage d'Edwards-Sokal. Nous reprenons ici le résultat exposé en section 1.4 de [Gri06]. Soient $p \in]0, 1]$ et $T \geq 0$ tels que $p = 1 - e^{-2/T}$ (avec la convention $e^{-2/0} = 0$). Considérons la distribution de probabilité

$$\mu : (\sigma, \omega) \in \{-, +\}^{\Lambda(n)} \times \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n} \mapsto \frac{1}{Z_\mu} \prod_{e=\{x,y\} \in \mathbb{E}_n} p^{\omega(e)} (1-p)^{1-\omega(e)} \delta_{\sigma(x), \sigma(y)} \prod_{x \in \partial \Lambda(n)} \delta_{\sigma(x), +}$$

où Z_μ est la constante de normalisation appropriée. Alors la marginale de μ sur $\{-, +\}^{\Lambda(n)}$ est la mesure d'Ising $\mu_{n,T}^+$, tandis que la marginale de μ sur $\{0, 1\}^{\mathbb{E}_n}$ est la mesure de FK-percolation $\phi_{n,p,2}^1$. Pour une configuration $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$, la mesure conditionnelle $\mu(\cdot | \omega)$ s'obtient en posant $\sigma(x) = +$ pour tout $x \in \mathcal{M}_n(\omega)$ et en associant des spins constants sur les autres clusters, indépendants entre clusters, et chacun étant distribué uniformément sur $\{-, +\}$. Pour $\sigma : \Lambda(n) \rightarrow \{-, +\}$ vérifiant $\sigma(x) = +$ pour tout $x \in \partial \Lambda(n)$, la mesure conditionnelle $\mu(\cdot | \sigma)$ s'obtient en posant $\omega(e) = 0$ pour les arêtes $e = \{x, y\}$ qui sont telles que $\sigma(x) \neq \sigma(y)$, et en tirant $\omega(e)$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre p pour les autres arêtes e , les états des arêtes étant conditionnellement indépendants. La température critique du modèle d'Ising et la probabilité critique du modèle de FK-percolation sont donc reliées par

$$p_c(2) = 1 - e^{-2/T_c}. \quad (1.2)$$

3.3 Le modèle d'Ising Curie-Weiss

Le modèle d'Ising Curie-Weiss est une variante du modèle d'Ising, nommée d'après Pierre Curie et Pierre Weiss, pionniers de l'étude des propriétés magnétiques des matériaux. Ce nouveau modèle est construit avec la même fonction d'interaction que le modèle d'Ising standard, mais sur un graphe complet plutôt que sur le réseau $\mathbb{Z}^d$. Les configurations sont alors des éléments de $\{-, +\}^n$, et le Hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H}_n^{CW}(\sigma) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma(i) \sigma(j) = -\frac{S_n^2(\sigma)}{2n}, \quad \text{où} \quad S_n(\sigma) = \sigma(1) + \dots + \sigma(n).$$

Le modèle d'Ising Curie-Weiss à la température $T > 0$ est donc défini par

$$\mu_{n,T}^{CW} : \sigma \in \{-, +\}^n \mapsto \frac{1}{Z_{n,T}^{CW}} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_n^{CW}(\sigma)}{T}\right).$$

Alors que dans le modèle d'Ising ordinaire, le champ magnétique ressenti par un atome dépend de la moyenne des spins de ses voisins, dans le modèle d'Ising Curie-Weiss, celui-ci dépend de la moyenne des spins de l'ensemble des autres atomes. Pour cette raison, cette variante est appelée approximation du champ moyen. Cette simplification peut paraître extrême, mais le modèle d'Ising Curie-Weiss présente déjà une transition de phase similaire au modèle d'Ising classique, comme le montre le résultat suivant, présenté au chapitre V.9 de [Ell06] :

Théorème 2. *Pour tout $n \geq 1$, notons $S_n = \sigma(1) + \dots + \sigma(n)$, où σ est une configuration distribuée suivant $\mu_{n,T}^{CW}$. Si $T > 1$, alors nous avons la convergence en loi*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{T}{T-1}\right).$$

Si $0 < T < 1$, alors il existe $m(T) > 0$ tel que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{\delta_{-m(T)} + \delta_{m(T)}}{2}.$$

Dans le cas critique $T = 1$, nous avons

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right) dx.$$

4 Quelques modèles auto-critiques construits à partir de la percolation et du modèle d'Ising

La percolation et le modèle d'Ising étant parmi les modèles les plus simples et les plus étudiés qui présentent une transition de phase, c'est tout naturellement que de nombreux modèles de criticité auto-organisée ont été construits comme des variantes de ces deux modèles fondamentaux. Nous présentons ici un modèle construit à partir du modèle d'Ising en champ moyen, puis certains modèles issus de la percolation, dont plusieurs modèles de feux de forêts.

4.1 Un modèle d'Ising Curie-Weiss de criticité auto-organisée

Une idée naturelle pour obtenir un modèle présentant le phénomène de criticité auto-organisée, présentée par Didier Sornette dans [Sor92], est de considérer un modèle qui présente une transition de phase et d'introduire une rétroaction de la configuration vers le paramètre de contrôle (par exemple, la température). Si cette rétroaction est bien choisie, le paramètre de contrôle peut alors se retrouver attiré vers le point critique. Le modèle obtenu présente donc un comportement critique, sans qu'il soit besoin d'ajuster un paramètre à une valeur précise, puisque ce paramètre s'ajuste de lui-même. Nous pouvons donc parler de criticité auto-organisée. L'article [Sor92] applique cette idée en proposant un mécanisme dynamique pour transformer la percolation ou le modèle d'Ising en modèles auto-critiques, en mettant à jour étape par étape le paramètre du modèle pour l'ajuster au point critique. Le même principe est mis en œuvre expérimentalement dans [FSS93], et adapté dans un contexte de sciences sociales par [SWdA⁺00]. Cependant, les modèles proposés sont assez complexes et définis de façon algorithmique, ce qui fait que leur étude se limite souvent à des simulations numériques.

Dans sa thèse [Gor15], Matthias Gorny a construit un modèle simple de variables aléatoires en interaction de type champ moyen qui présente un phénomène de criticité auto-organisée, en utilisant cette idée d'une rétroaction sur le paramètre de contrôle. Construit à partir du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé (c'est-à-dire avec une loi ρ quelconque pour les spins, qui n'est pas forcément la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$), avec une température qui n'est plus fixe mais fonction des variables aléatoires elles-mêmes, ce modèle est défini par la densité de probabilité sur $\mathbb{R}^n$:

$$d\nu_{n,\rho}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

où ρ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, et Z_n est la constante de normalisation. Le point intéressant est alors que la somme $S_n = x_1 + \dots + x_n$ présente un comportement asymptotique qui correspond à celui du cas critique : Matthias Gorny a démontré le résultat suivant :

Théorème 3 ([CG16]). *Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas la masse de Dirac en 0 et telle que*

$$\exists \nu_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{\nu_0 z^2} d\rho(z) < +\infty.$$

Notons σ^2 la variance de ρ et μ_4 son moment d'ordre 4. Alors, sous $\nu_{n,\rho}$, nous avons la convergence en loi

$$\frac{\mu_4^{1/4} S_n}{\sigma^2 n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{s^4}{12}\right) ds.$$

Ainsi, sous certaines conditions sur la mesure ρ , les fluctuations de S_n sont d'ordre $n^{3/4}$ et la loi limite n'est pas gaussienne, mais de la forme $C \exp(-s^4/12)$, ce qui correspond à la loi limite du modèle d'Ising Curie-Weiss critique, comme expliqué au paragraphe 3.3. Le modèle ainsi « auto-thermostaté » tend de lui-même vers un régime critique, sans qu'il y ait besoin d'ajuster un paramètre à une valeur particulière : nous pouvons donc bien parler de criticité auto-organisée. Plus loin, nous étudions une variante de ce modèle qui n'est plus de type champ moyen, mais avec des interactions à longue portée (voir la première section du chapitre 2).

4.2 Des modèles pour les feux de forêts

Un premier modèle où le feu se transmet d'arbres en arbres

De nombreux modèles de feux de forêts ont été définis pour illustrer le phénomène de criticité auto-organisée, en suivant une idée similaire au modèle du tas de sable. Un premier automate cellulaire a été défini par [BC89, BCT90], mais des simulations ont par la suite montré que ce modèle ne présentait pas le comportement de criticité auto-organisée espéré [GK91, MDS92]. Le modèle le plus étudié par les physiciens est plutôt celui défini par Barbara Drossel et Franz Schwabl [DS92], qui est une modification du modèle de [BCT90]. Ce modèle est défini comme suit : chaque case du réseau $\{1, \dots, N\}^d$ peut être ou bien occupée par un arbre vert, ou bien occupée par un arbre en feu, ou bien vide. Nous commençons par exemple par une configuration où toutes les cases sont vides. Puis nous mettons à jour la configuration et effectuant simultanément les quatre opérations suivantes :

- Tous les arbres qui étaient en feu deviennent des cases vides ;
- Tous les arbres verts dont au moins un voisin était en feu deviennent des arbres en feu ;
- Sur chaque case qui était vide, un arbre vert pousse avec probabilité p , indépendamment des autres cases ;
- Chaque arbre qui était vert et dont aucun voisin n'était en feu devient en feu avec probabilité f , indépendamment du reste (nous disons que l'arbre est frappé par la foudre).

Notons que ces opérations ont lieu en parallèle, une case ne peut pas devenir vide et voir un arbre vert repousser au cours de la même itération, et un feu qui apparaît sur un arbre ne se transmet aux arbres voisins qu'à l'itération suivante, puis aux voisins des voisins à l'itération d'après, etc. D'après [DS92], sous la condition

$$\left(\frac{f}{p}\right)^{-1/d} \ll \frac{1}{p} \ll \frac{1}{f}, \quad (1.3)$$

le modèle présente un comportement critique, au sens d'une distribution auto-similaire de la taille des clusters d'arbres, de la durée de vie des arbres et des incendies, et d'une limite non triviale pour la densité d'arbres, dans la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$. La condition (1.3) correspond à une séparation des échelles de temps : le temps qu'il faut pour brûler tout un cluster d'arbres doit être beaucoup plus petit que le temps nécessaire pour qu'un arbre repousse, qui doit lui-même être très petit devant le temps qui sépare deux éclairs en un même site. Nous retrouvons ici une caractéristique commune à de nombreux modèles de criticité auto-organisée, qui rappelle le fait que, dans le modèle du tas de sable, les avalanches sont instantanées par rapport à l'ajout des grains, ou que les séismes durent beaucoup moins longtemps que le temps d'accumulation de l'énergie dans une faille géologique, comme expliqué au paragraphe 1.3. Il y a ici une double séparation des échelles de temps, puisque nous avons trois échelles de temps bien distinctes au lieu de deux habituellement.

Par la suite, plusieurs simulations sur des systèmes de plus grande taille ont contredit les prédictions de [DS92], en obtenant d'autres valeurs pour les exposants critiques et en montrant que le comportement du modèle est en réalité plus complexe [Hen93, Gra93], ce qui sera confirmé par [CDS94]. D'après [SDCS00], la distribution de la taille des incendies n'est plus auto-similaire lorsque nous considérons le modèle à grande échelle. Il se formerait alors des parcelles au sein desquelles la densité d'arbres est relativement homogène, mais différente d'une parcelle à l'autre, ce qui impliquerait l'existence de deux catégories qualitativement distinctes d'incendies : ceux qui s'étendent sur toute une parcelle et ceux qui sont plus petits. Ces derniers brûlent des ensembles d'arbres qui ressemblent à des clusters en percolation et ont une structure fractale, ce qui n'est plus le cas des feux qui affectent toute une parcelle. Cette situation plus complexe qu'un comportement critique « standard », dans lequel aucune échelle ne joue un rôle particulier, pourrait expliquer les observations divergentes sur des simulations à des échelles différentes [SDS02].

Mais après toutes ces explications contradictoires, des simulations numériques sur des grilles de très grande taille sont venues contredire les travaux précédents, du moins en dimension 2. D'après [Gra02] et [PJ02], le modèle ne présente aucune des lois de puissances qui lui sont attribuées, et même la densité limite ne correspond pas aux prévisions antérieures : Peter Grassberger conjecture que celle-ci converge plutôt vers la probabilité critique de la percolation par sites sur $\mathbb{Z}^2$.

Les prévisions de ce modèle de feux de forêts ont été comparées avec des observations d'incendies naturels [MMT98] qui ont confirmé que la taille des incendies est plutôt bien décrite une loi de puissance. L'article cite notamment des implications pratiques de ce modèle, en expliquant qu'il permet de comprendre pourquoi il vaut parfois mieux laisser brûler les petits et moyens incendies pour éviter une trop forte densification et l'accumulation de nombreux arbres morts et donc un terreau favorable à des feux catastrophiques. Ce modèle a également été appliqué à l'analyse de certaines épidémies [RA96].

Malgré sa définition simple et intuitive, ce modèle a surtout été étudié par des simulations et des raisonnements heuristiques. Peu de résultats mathématiquement rigoureux ont été obtenus, les travaux un peu plus analytiques se limitant par exemple à la version en champ moyen [CFO93] ou au cas de la dimension 1 [DCS93].

D'autres modèles avec destruction instantanée des clusters

Les mathématiciens se sont intéressés à plusieurs variantes du modèle de Drossel-Schwabl, qui se prêtent mieux à une étude théorique. Notamment, Maximilian Dürre a étudié un modèle défini sur $\mathbb{Z}^d$ en temps continu. Les cases peuvent être ou bien libres ou bien occupées par un arbre, et chaque case libre devient occupée selon un processus de Poisson de taux 1, indépendamment des autres cases. Parallèlement, et indépendamment, chaque case est frappée par des éclairs selon un processus de Poisson de taux λ . Lorsqu'une case occupée est frappée par un éclair, l'ensemble de son cluster de cases occupées devient aussitôt vacant, c'est-à-dire que tous les arbres voisins brûlent instantanément (contrairement au modèle précédent, dans lequel le feu se propageait petit à petit). L'existence d'un tel processus sur $\mathbb{Z}^d$, qui n'est déjà pas évidente, a été démontrée par [Dür06a], et son unicité a été montrée sous certaines conditions [Dür06b].

Si $\lambda = 0$, l'état du modèle au temps t (avec toutes les cases vides comme condition initiale) correspond à une percolation indépendante par sites de paramètre $p = 1 - e^{-t}$. Par conséquent, à tout instant $t > t_c = -\ln(1 - p_c)$, où p_c désigne la probabilité critique pour la percolation par sites sur $\mathbb{Z}^d$, il existe presque sûrement un cluster infini. Avec un paramètre $\lambda > 0$ fixé, les éclairs empêchent l'apparition de trop grands clusters, qui se retrouvent rapidement brûlés. Le comportement le plus intéressant s'observe dans le régime où $\lambda \rightarrow 0$, où les clusters d'une taille finie fixée sont détruits à un taux négligeable, tandis qu'un cluster infini ne peut survivre sans être aussitôt détruit. Le système se retrouverait alors forcé dans une situation où le cluster infini est sur le point d'apparaître, mais n'y parvient pas.

Ce modèle a été étudié en dimension 1 dans le régime où $\lambda \rightarrow 0$ par [vdBJ05], qui montre que la densité de cases vides est d'ordre $1/\ln(1/\lambda)$, confirmant ainsi une prédiction des physiciens [DCS93] mais en corrigeant leurs estimations sur la taille des clusters.

Dans [RT09], Balázs Ráth et Bálint Tóth étudient un modèle défini de façon similaire, mais sur un graphe complet à n sommets, c'est-à-dire en champ moyen. Le régime le plus intéressant est alors celui où le taux de croissance des arbres en chaque case est de $1/n$, et le taux d'apparition des éclairs est choisi de telle sorte que $n^{-1} \ll \lambda(n) \ll 1$. Dans ce régime, les auteurs montrent que, sous certaines conditions sur la configuration initiale, la distribution stationnaire des tailles de clusters converge quand n tend vers l'infini vers une distribution en loi de puissance, qui est obtenue comme solution d'une équation de Smoluchovski modifiée : le nombre de clusters de taille k est alors d'ordre $k^{-3/2}$, ce qui montre que ce modèle présente un phénomène de criticité auto-organisée. Par la suite, cette description a été notamment complétée par [CFT15] qui étudie l'évolution de la taille du cluster d'un sommet fixé, et par [CRY18] qui s'intéresse à la structure de graphe des clusters et la distribution des « âges » des sommets (le temps écoulé depuis le dernier éclair frappant leur cluster).

Mentionnons également une variante de ce modèle, construite à partir de la percolation dynamique dans $\mathbb{Z}^d$, où les clusters disparaissent à un taux égal à leur taille. Étudiée dans [BF09], ce modèle se veut une simplification du modèle du tas de sable décrit au paragraphe 1.4.

La percolation autodestructrice

La percolation autodestructrice est un modèle apparenté au modèle précédent de feux de forêts, qui a été introduit par Jacob van den Berg et Rachel Brouwer dans [vdBB04]. Il consiste à tirer une

configuration de percolation surcritique par sites sur $\mathbb{Z}^d$, à fermer tous les sites appartenant au cluster infini, puis à ouvrir chaque site fermé indépendamment et avec une petite probabilité $\delta > 0$ (aussi bien les sites du cluster infini que l'on vient de fermer, que les sites qui étaient déjà fermés avant cela). La loi de la configuration ainsi obtenue est notée $\mathbb{P}_{p,\delta}$. La question intéressante est alors de savoir si le fait d'ouvrir cette petite proportion de sites suffit ou non à recréer un cluster infini. Van den Berg et Brouwer conjecturent que, en dimension 2 et pour δ assez petit, cela n'est pas le cas, c'est-à-dire qu'il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $p > p_c$, il n'existe $\mathbb{P}_{p,\delta}$ -presque sûrement aucun cluster infini. Cette conjecture sera démontrée plus tard par [KMS15].

Une implication intéressante et quelque peu déroutante de ce résultat est la non-existence, en dimension 2, d'un processus dans lequel les arbres poussent avec un taux 1 et tout cluster infini est détruit immédiatement dès son apparition. Un tel modèle correspondrait en quelque sorte à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$ du modèle construit par Maximilian Dürre décrit plus haut, c'est-à-dire que les éclairs ne frappent que les clusters infinis, et ce, dès qu'ils apparaissent. L'intuition, décrite par [KMS15], est que, si un tel modèle existait, alors aucun cluster infini n'apparaîtrait aux temps $t \leq t_c = -\ln(1 - p_c)$ mais, pour tout temps $t > t_c$, un cluster infini a forcément brûlé entre t_c et t , sans quoi il y aurait un cluster infini au temps t . Ainsi, un nombre infini d'incendies de clusters infinis s'accumule juste après le temps critique t_c , ce qui contredit le fait que la reconstitution d'un cluster infini nécessite de rouvrir au moins une proportion minorée par $\delta > 0$ des sites.

Cette conjecture est en revanche fausse pour ce modèle sur des graphes non moyennables [AST14] ou en grande dimension [ADCKS15]. Les résultats de [KMS15], combinés avec ceux de [vdBB06], impliquent par ailleurs plusieurs propriétés pour une autre variante du modèle de feux de forêts, dans laquelle les clusters sont brûlés dès qu'ils atteignent une certaine taille fixée.

4.3 La percolation gelée

La percolation gelée est un modèle similaire aux modèles précédents, dans lequel les clusters sont gelés au lieu d'être brûlés, et ne peuvent plus évoluer une fois gelés. Ce modèle est inspiré de l'étude du processus de polymérisation à l'œuvre dans ce qui s'appelle la transition sol-gel, c'est-à-dire le fait que des molécules isolées baignant dans un solvant, en se liant petit à petit les unes aux autres, finissent par former une structure cohérente appelée gel [Flo41, Sto43].

Une première version, construite à partir de la percolation par sites, consiste à geler les clusters dès lors qu'il deviennent infinis. Une fois un cluster gelé, il n'est pas supprimé, mais les sites fermés qui délimitent sa frontière restent définitivement fermés, empêchant ce cluster de grandir davantage. L'existence d'un tel processus a été prouvée par David Aldous dans [Ald00] pour le cas particulier de la percolation sur l'arbre binaire infini. Dans ce modèle, dès lors que plus de la moitié des sites sont ouverts, le modèle se bloque dans un état que l'on peut qualifier d'auto-critique, les clusters finis ressemblant alors à des clusters de percolation critique.

Sur le réseau carré $\mathbb{Z}^2$, un tel processus dans lequel les clusters infinis sont gelés n'existe pas, d'après un argument de Benjamini et Schramm présenté en section 3 de [vdBT01]. Cela a amené à considérer, dans [vdBdLN12], un modèle dans lequel les clusters sont gelés dès lors que leur diamètre dépasse un certain seuil N . L'évolution d'un site ne dépend alors que des sites à une distance inférieure ou égale à N , ce qui assure que le processus est bien défini comme un système de particules en interaction avec une portée finie (voir [Lig85]). Dans le cas de l'arbre binaire infini, un tel modèle permet bien de retrouver le comportement observé par Aldous dans la limite $N \rightarrow \infty$ [vdBKN12]. Dans $\mathbb{Z}^2$, le modèle a été étudié par Demeter Kiss [Kis15], qui a démontré que, dans la limite $N \rightarrow \infty$, les clusters qui sont gelés le sont tous dans une fenêtre « quasi-critique », c'est-à-dire à $p_c + O(n^{-3/4})$, et ces clusters ressemblent donc en un certain sens à des clusters de percolation critique. Ainsi, ce modèle présente un phénomène qui peut être qualifié de criticité auto-organisée. Dans [vdBN17a], une variante de ce modèle est étudiée, dans laquelle la condition aux bords des clusters gelés est modifiée en ne fermant plus les sites adjacents à un cluster gelé. Ces sites continuent alors d'évoluer, et peuvent se fermer, et se geler quand le diamètre de leur cluster de sites fermés mais non gelés dépasse N . Ce modèle modifié présente alors des différences notables avec le modèle précédent, avec l'apparition de certains clusters très denses, qui gèlent longtemps après le point critique.

Plutôt que le diamètre des clusters, d'autres travaux ont porté sur le modèle dans lequel les clusters sont gelés dès lors que leur taille en nombre de sommets dépasse le seuil N [vdBN17b, vdBKN18], qui montrent que ce modèle est assez différent du modèle avec le volume des clusters. D'après [vdBN17a], le comportement est dans ce cas plus robuste vis-à-vis des conditions particulières imposées aux bords des clusters gelés.

Dans [Rât09], une variante de la percolation gelée en champ moyen est étudiée, dans laquelle les clusters gèlent lorsqu'ils sont frappés par des éclairs. Ce modèle présente un comportement similaire au modèle de feux de forêts en champ moyen décrit dans [RT09], que nous avons évoqué plus haut. Pour un large régime du taux d'éclairs, le modèle se bloque dans un état qui ressemble à un graphe d'Erdős-Rényi critique, et les clusters non gelés ressemblent alors à des arbres de Galton-Watson critiques.

4.4 La percolation d'invasion

La percolation d'invasion est une autre manière peut-être plus naturelle d'obtenir un modèle de criticité auto-organisée à partir de la percolation. Ce modèle a été introduit au départ pour décrire l'évolution de l'interface entre deux liquides non miscibles dans un milieu poreux [CKLW82]. Plus précisément, il s'agit d'étudier la façon dont l'un des liquides, injecté au fur et à mesure, gagne peu à peu du terrain sur l'autre liquide en « envahissant » les uns après les autres les pores que le premier liquide occupait. Motivée au départ en partie par des intérêts économiques, notamment l'extraction des hydrocarbures, l'étude de ce modèle s'est révélée intéressante d'un point de vue théorique, en apportant un nouveau point de vue sur la percolation. Mentionnons par exemple l'utilisation de la percolation d'invasion pour démontrer la décroissance exponentielle dans la phase surcritique (voir proposition 7) en dimension $d \geq 3$ dans [CCN87], ou encore pour démontrer des résultats sur la façon dont les clusters infinis fusionnent dans la phase où il existe une infinité de clusters infinis dans [HPS99], sur des graphes non moyennables.

La percolation d'invasion est un processus dynamique d'exploration du réseau $\mathbb{Z}^d$, défini de la façon suivante. Comme pour construire la percolation dynamique, pour chaque arête $e \in \mathbb{E}^d$ du réseau cubique $\mathbb{Z}^d$, nous tirons une variable aléatoire τ_e suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, les variables $(\tau_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$ étant indépendantes. Décrivons ici la situation dans laquelle l'un des deux fluides est injecté en 0, tandis que l'autre fluide occupe initialement tout le reste du réseau. Nous définissons une suite croissante $(E_t)_{t \in \mathbb{N}}$ de sous-graphes de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, le graphe E_t correspondant à la zone envahie au temps t par le fluide injecté. Nous prenons pour E_0 le sous-graphe constitué du seul sommet 0, et d'aucune arête. À chaque temps $t \in \mathbb{N}$, nous regardons l'ensemble des arêtes de $\mathbb{E}^d$ qui relient un sommet de E_t à un sommet de $\mathbb{Z}^d \setminus E_t$, et nous ajoutons à E_t l'arête parmi celles-ci pour laquelle τ_e est minimal, ainsi que le nouveau sommet à l'extrémité de cette arête. Cela représente le fait que le liquide se propage à l'endroit où la résistance opposée est la plus faible. Ce processus d'exploration peut alors continuer indéfiniment, et nous obtenons à la limite un arbre infini $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ (c'est un arbre parce que nous ne rajoutons que les arêtes qui mènent à de nouveaux sommets), qui se trouve avoir des propriétés particulièrement intéressantes.

Ce modèle suppose implicitement qu'au fur et à mesure que le liquide injecté se propage, l'autre liquide peut s'échapper à l'infini, ou aux bords de la boîte si le processus est restreint à une boîte finie. Mais il peut arriver qu'au cours du processus, une poche de liquide envahi se retrouve encerclée par le liquide envahissant. Si les liquides sont incompressibles, il faut alors ajouter une contrainte pour interdire l'invasion de cette poche, puisque le liquide envahi ne peut pas s'échapper et ne se laisse donc pas envahir par l'autre liquide. Il existe donc deux variantes de la percolation d'invasion, dites avec ou sans piégeage, selon que l'on autorise ou non l'invasion de ces poches isolées.

De par sa construction algorithmique, la percolation d'invasion a d'abord été étudiée par des simulations numériques, qui ont mis en évidence les propriétés auto-critiques du modèle, avant même que la théorie de la criticité auto-organisée ne soit théorisée par Bak, Tang et Wiesenfeld en 1987. Dans [WW83], des simulations sont menées sur des boîtes finies, en interrompant l'invasion dès qu'un des bords de la boîte a été atteint. L'ensemble exploré par le processus ressemble alors au « cluster infini émergent » dans la percolation critique, et possède la même dimension fractale, du moins dans le modèle sans piégeage. En ajoutant le piégeage, les résultats sont peu modifiés en dimension 3, mais, comme

l'explique [WW83], l'arbre exploré en dimension 2 se retrouve très aminci. Cela peut s'expliquer par le fait qu'en dimension 3, il est plus difficile d'encercler une poche de liquide envahi qu'en dimension 2. Le modèle avec piégeage, plus complexe, a été beaucoup moins étudié par la suite, et nous décrivons donc principalement ici le modèle sans piégeage.

Un raisonnement intuitif permet d'expliquer pourquoi l'ensemble exploré ressemble au « cluster infini émergeant » critique. Considérons pour cela les p -clusters pour la percolation dynamique couplée avec la percolation d'invasion, c'est-à-dire tirée avec les mêmes variables $(\tau_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$. Dès que l'envahisseur a atteint un p -cluster infini, alors il reste ensuite pour toujours à l'intérieur de celui-ci, c'est-à-dire qu'il n'explore plus aucune arête e pour laquelle $\tau_e > p$, puisque les arêtes avec $\tau_e \leq p$ suffisent déjà pour s'étendre indéfiniment. Au fur et à mesure de son évolution, le processus d'exploration va alors atteindre des p -clusters infinis pour des valeurs $p > p_c$ de plus en plus proches de p_c . De plus, si un sommet est adjacent à l'arbre exploré à un instant t et est relié à celui-ci par une arête e telle que $\tau_e < p_c$, alors ce sommet sera forcément exploré au plus tard une fois que tous les τ_e -clusters qui intersectent l'arbre E_t auront été intégralement explorés. Ceux-ci étant presque sûrement finis, ce sommet finit donc par être atteint par le processus d'exploration. Ainsi, nous comprenons pourquoi le cluster exploré devrait ressembler au cluster infini émergeant dans la percolation critique.

Les heuristiques décrites de façon informelles ci-dessus ont été rendues rigoureuses par [CCN85, HPS99], ce qui confirme que la région envahie ressemble asymptotiquement au cluster infini émergeant de la percolation critique. Ces résultats ont été précisés dans le cas de la dimension 2 par [Zha95, J03, DS12]. Cette ressemblance entre la percolation d'invasion et la percolation critique a tout de même ses limites, et certaines propriétés de la région explorée diffèrent de celles du cluster infini émergeant. Notamment, en dimension 2, la mesure de percolation d'invasion et la mesure du cluster infini émergeant sont mutuellement singulières, d'après [DSV09]. Dans [GPS18b], la convergence de la percolation d'invasion dans la limite d'échelle est étudiée, et il est montré que l'objet limite est invariant par rotations et homothéties, mais il est conjecturé qu'il n'est pas invariant conforme.

Chapitre

2

Présentation des résultats

Sommaire

1	Un modèle d'Ising de criticité auto-organisée avec interactions à longue portée	25
1.1	Un premier modèle avec interactions entre proches voisins	25
1.2	Introduction d'une portée d'interaction	27
1.3	Un phénomène de seuil pour la portée d'interaction	28
1.4	Présentation de l'approche mise en œuvre	29
2	Quelques modèles de criticité auto-organisée en percolation	31
2.1	Définition des modèles	31
2.2	Résultat de convergence	32
2.3	Heuristique et stratégie de preuve	33
2.4	Deux variantes	33
3	Un modèle d'Ising de criticité auto-organisée en dimension 2	33
3.1	Définition du modèle et résultat de convergence	34
3.2	Stratégie et organisation de la démonstration	34
3.3	Amélioration de notre exposant	36
3.4	Un modèle plus naturel ?	37

1 Un modèle d'Ising de criticité auto-organisée avec interactions à longue portée

Nous présentons dans cette partie une variante du modèle d'Ising Curie-Weiss de criticité auto-organisée que nous avons décrit en section 4.1 de l'introduction. En remplaçant le Hamiltonien de type champ moyen par une interaction limitée à une certaine portée, nous mettons en évidence un phénomène de seuil qui se produit pour une portée d'ordre $n^{3/4}$. Les résultats énoncés ci-dessous sont démontrés dans le chapitre 3, qui est d'ailleurs indépendant des chapitres qui le suivent.

1.1 Un premier modèle avec interactions entre proches voisins

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le modèle d'Ising Curie-Weiss de criticité auto-organisée construit par Matthias Gorny est défini comme la distribution de probabilité

$$d\nu_{n,\rho}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{nH_n(x_1, \dots, x_n)}{2T_n(x_1, \dots, x_n)}\right) \mathbb{1}_{T_n > 0} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

où ρ est une distribution de probabilité sur $\mathbb{R}$ satisfaisant une certaine condition de moment exponentiel, et où nous avons noté

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j^2 \quad \text{et} \quad H_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j. \quad (2.1)$$

Comme nous le voyons dans l'expression de H_n , l'interaction est de type champ moyen, c'est-à-dire que tous les spins interagissent entre eux de façon indifférenciée. Un objectif naturel est donc de définir un modèle analogue, mais qui ne soit plus de type champ moyen, c'est-à-dire dans lequel l'interaction entre les spins dépend d'une certaine géométrie. Une première idée consiste alors à remplacer l'interaction entre tous les spins par une interaction limitée aux plus proches voisins d'une chaîne de spins en dimension 1, avec conditions aux bords périodiques. Pour simplifier, nous ne considérons pas des spins avec une loi générale comme décrit en section 4.1, mais nous nous limitons à une distribution initiale gaussienne, ce qui rendra possible un certain nombre de calculs exacts. Nous considérons donc l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu des boréliens, et nous notons

$$d\mu_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} dx_j$$

la loi de n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ gaussiennes centrées réduites indépendantes. Nous définissons ensuite la fonction d'interaction

$$H_n : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{j=1}^n x_j x_{j+1},$$

avec la convention $x_{n+1} = x_1$, et nous conservons la même température auto-ajustée T_n donnée par (2.1). Nous nous intéressons alors à la distribution de probabilité suivante :

$$d\hat{\mu}_n = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{nH_n}{2T_n}\right) d\mu_n, \quad (2.2)$$

où Z_n est la constante de normalisation adéquate, que nous appellerons fonction de partition. Cette distribution est bien définie puisque nous avons

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad |H_n(x_1, \dots, x_n)| \leq \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2 + x_{j+1}^2}{2} = T_n(x_1, \dots, x_n), \quad (2.3)$$

ce qui nous assure que

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{nH_n}{2T_n}\right) d\mu_n \leq e^{n/2} < \infty.$$

Nous nous intéressons alors à la distribution de la somme

$$S_n : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{j=1}^n x_j,$$

et nous nous voulons déterminer l'ordre de grandeur des fluctuations de cette somme, ainsi que l'expression de la loi limite. Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 4. *Considérons un tableau triangulaire infini de variables aléatoires $(X_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ tel que pour tout $n \geq 1$, le vecteur $(X_1^n, \dots, X_n^n)$ est distribué suivant la loi $\hat{\mu}_n$ définie par l'équation (2.2). Nous avons alors la convergence en loi*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sqrt{2} + 1).$$

Ainsi, les fluctuations de la somme des spins sont gaussiennes et d'ordre $\sqrt{n}$, ce qui tranche avec le comportement du modèle de Matthias Gorny dans lequel S_n est d'ordre $n^{3/4}$ avec une loi limite de la forme $C \exp(-s^4/12)$. Ce premier modèle semble donc trop simple pour présenter un comportement pouvant être qualifié de criticité auto-organisée. Ce résultat n'est pas très surprenant, puisque le modèle gaussien sous-jacent dans lequel la température T_n serait fixe, c'est-à-dire le modèle

$$\frac{1}{Z'_n} \exp \left(\frac{H_n(x_1, \dots, x_n)}{2T} \right) d\mu_n,$$

ne présente pas de transition de phase.

1.2 Introduction d'une portée d'interaction

Le comportement du modèle avec une interaction limitée aux plus proches voisins étant différent de celui du modèle en champ moyen, il semble naturel d'étudier un modèle avec une portée d'interaction intermédiaire. Entre les deux cas extrêmes du champ moyen et de l'interaction entre sommets voisins, de nombreux modèles différents existent. De manière générale, nous pouvons considérer un Hamiltonien H_n (notre H_n est plutôt l'opposé du Hamiltonien, mais par abus de langage nous l'appelons ainsi) de la forme

$$H_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} J(i, j) x_i x_j,$$

où le couplage $J(i, j) = J(i - j)$ est une fonction décroissante de la distance qui sépare les deux spins i et j (avec des conditions aux bords périodiques). Le comportement du modèle dépend alors de la vitesse avec laquelle cette fonction de couplage décroît. Étant données deux suites réelles (a_n) et (b_n) , nous écrivons $a_n \ll b_n$ et $a_n \gg b_n$ pour signifier respectivement $a_n = o(b_n)$ et $b_n = o(a_n)$. Dans [ACCN88], l'exemple fondamental d'un couplage proportionnel à $|i - j|^{-2}$ est étudié, et il est montré que le modèle en question présente une transition de phase, de même que les modèles construits avec une fonction de couplage qui décroît moins vite que cela. En revanche, si $J(i, j) \ll |i - j|^{-2}$, alors le modèle d'Ising obtenu ne présente plus de transition de phase, ce qui montre que le couplage en $|i - j|^{-2}$ joue un rôle de pivot entre les deux types de modèles.

Une autre manière de construire des modèles intermédiaires consiste à tirer les couplages $J(i, j)$ de façon aléatoire. Dans [BG93], Anton Bovier et Véronique Gayraud ont proposé un tel modèle en tirant les valeurs $J(i, j)$ suivant des variables de Bernoulli indépendantes de paramètres p , ce qui revient à considérer le modèle d'Ising sur un graphe d'Erdős-Rényi. En faisant varier le paramètre p avec n , il apparaît alors plusieurs régimes caractérisés par des fluctuations différentes pour la somme des spins. Ces fluctuations ont été étudiées par Zakhar Kabluchko, Matthias Löwe et Kristina Schubert [KLS19a, KLS19b] qui ont notamment montré que, pour une température critique et un paramètre p_n choisi tel que $p_n \gg n^{-3/4}$, le comportement ressemble à celui du modèle d'Ising Curie-Weiss critique, c'est-à-dire que la somme des spins est d'ordre $n^{3/4}$ avec des fluctuations de la forme $C \exp(-s^4/12)$. Quand le paramètre p_n devient d'ordre $n^{-3/4}$, toujours à la température critique, la loi limite change et un terme quadratique apparaît aux côtés du terme en s^4 . Si $p_n \ll n^{-3/4}$ alors ce terme quadratique l'emporte, et donc les fluctuations de la somme des spins se retrouvent être gaussiennes.

Cette approche a été généralisée par Nabarum Deb et Sumit Mukherjee [DM20], qui ont étudié les fluctuations du modèle d'Ising construit sur un ensemble plus général de graphes. Sous certaines conditions de régularité et de connectivité, ils parviennent à retrouver les mêmes fluctuations que dans le modèle en champ moyen lorsque le degré moyen d_n vérifie $d_n \gg (n \ln n)^{1/3}$ dans le régime surcritique, $d_n \gg \sqrt{n}$ dans le régime sous-critique, ou $d_n \gg \sqrt{n} \ln n$ au point critique.

Dans notre cas, nous avons fait le choix de faire interagir chaque spin avec ses $2d_n$ plus proches voisins, où d_n est un paramètre pouvant évoluer avec n . Cela correspond à une fonction de couplage de la forme

$$J(i, j) = \frac{1}{2d_n} \times \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \{i - d_n, \dots, i - 1\} \cup \{i + 1, \dots, i + d_n\} + n\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

N'oublions pas que notre modèle est différent des modèles mentionnés ci-dessus, parce que les spins ne sont pas à valeurs dans $\{-1, +1\}$ mais ont une distribution gaussienne, et parce que l'ensemble des spins interagissent par l'intermédiaire de notre température auto-ajustée T_n . Ainsi, nous ne savons pas *a priori* quelle portée d'interaction d_n sera nécessaire pour obtenir une loi limite en $C \exp(-s^4/12)$, comme pour le modèle d'Ising Curie-Weiss. Nous nous donnons donc une suite d'entiers $(d_n)_{n \geq 2}$ telle que $0 < 2d_n < n$ pour tout $n \geq 3$, et nous définissons le Hamiltonien

$$H_n : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{d_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_n} x_i x_{i+j},$$

avec la convention $x_{n+k} = x_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Comme précédemment, nous avons

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad |H_n(x_1, \dots, x_n)| \leq \frac{1}{d_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_n} \frac{x_i^2 + x_{i+j}^2}{2} = T_n(x_1, \dots, x_n), \quad (2.4)$$

ce qui nous permet de définir la distribution de probabilité

$$d\hat{\mu}_n = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{nH_n}{2T_n}\right) d\mu_n, \quad (2.5)$$

où Z_n est la constante de normalisation appropriée. Ainsi, le modèle précédent (2.2) correspond au cas particulier $d_n = 1$, tandis que le modèle étudié par Matthias Gorny correspond quasiment au cas $2d_n = n - 1$ (il y a un facteur multiplicatif $1 - 1/n$ entre les deux Hamiltoniens, qui n'a pas de conséquence sur la loi limite). Nous souhaitons donc savoir à partir de quel régime de la portée d'interaction d_n apparaît le phénomène de criticité auto-organisée que nous avons décrit en section 4.1 de l'introduction pour le modèle en champ moyen. Dans un premier temps, nous avons considéré une interaction avec une proportion positive de l'ensemble des sommets mais, comme le montre le résultat suivant, ce n'est pas suffisant pour observer un changement de comportement par rapport au cas de l'interaction de type champ moyen.

Théorème 5. *Considérons un tableau triangulaire infini de variables aléatoires $(X_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ tel que pour tout $n \geq 3$, le vecteur $(X_1^n, \dots, X_n^n)$ est distribué suivant la loi $\hat{\mu}_n$ définie par (2.5). Si le paramètre d_n est tel que*

$$d_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda n \quad \text{avec} \quad 0 < \lambda < 1,$$

alors nous avons la convergence en loi

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/4)} \exp\left(-\frac{z^4}{4}\right) dz.$$

Dans un tel régime de la portée d'interaction, nous observons donc les mêmes fluctuations que pour le modèle construit par Matthias Gorny. Cependant, le théorème 5 ne nous permet pas de voir à partir de quelle portée d'interaction apparaît la loi limite en $\exp(-z^4/4)$, puisque le comportement est le même quelle que soit la constante λ .

1.3 Un phénomène de seuil pour la portée d'interaction

Étant donné qu'avec une portée d'interaction de l'ordre du nombre n de spins, nous n'observons pas de changement pour le comportement de S_n , nous avons ensuite considéré une portée d'interaction qui grandit comme une puissance de n . Le modèle présente alors des fluctuations similaires au champ moyen dès lors que la portée d'interaction est très grande devant $n^{3/4}$, comme le montre le théorème ci-dessous :

Théorème 6. *Considérons un tableau triangulaire infini de variables aléatoires $(X_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ tel que pour tout $n \geq 3$, le vecteur $(X_1^n, \dots, X_n^n)$ est distribué suivant la loi $\hat{\mu}_n$ définie par (2.5). Si le paramètre d_n est tel que*

$$n^{3/4} \ll d_n \ll n,$$

alors nous avons la convergence en loi

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/4)} \exp\left(-\frac{z^4}{4}\right) dz.$$

Bien que la loi limite de la somme S_n soit identique à celle du théorème 5, nous démontrons séparément ces deux théorèmes car le comportement des valeurs propres du Hamiltonien est différent, comme expliqué plus loin. Cette fois-ci, l'exposant $3/4$ est optimal puisque si la portée d_n est d'ordre $n^{3/4}$, alors la loi limite change. Plus précisément, nous démontrons :

Théorème 7. *Considérons un tableau triangulaire infini de variables aléatoires $(X_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ tel que pour tout $n \geq 3$, le vecteur $(X_1^n, \dots, X_n^n)$ est distribué suivant la loi $\hat{\mu}_n$ définie par (2.5). Si le paramètre d_n est choisi de telle sorte que*

$$d_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\sim} \lambda n^{3/4} \quad \text{avec} \quad \lambda > 0,$$

si $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une famille de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes, et si f est la densité de la variable aléatoire

$$Z = \sqrt{2}Y_0 - \frac{3}{2\lambda^2\pi^2} \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{Y_j^2}{j^2}, \quad (2.6)$$

alors nous avons la convergence en loi

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{f(z^2) dz}{\int_{\mathbb{R}} f(t^2) dt}.$$

Ce théorème montre qu'il y a un phénomène de transition de phase dans la portée d'interaction elle-même. La forme de la loi limite résulte de la compétition entre les deux termes dans (2.6), le second terme disparaissant lorsque $\lambda = \infty$, pour donner la loi limite du théorème 6. Ces résultats laissent en suspens la question du comportement dans le régime intermédiaire $d_n \ll n^{3/4}$, que nous n'avons pas encore étudiée. Par ailleurs, nos résultats ne concernent que le cas de variables initialement gaussiennes, qui permet des calculs explicites. Pour autant, le comportement mis en évidence par Matthias Gorny dans le cas du modèle en champ moyen s'applique à tout un ensemble de lois initiales satisfaisant une certaine condition de moment exponentiel, et donc notre résultat pourrait éventuellement s'étendre à des distributions plus générales.

1.4 Présentation de l'approche mise en œuvre

L'étude de notre modèle dans les différents régimes de portée d'interaction fait l'objet du chapitre 3 de cette thèse. Le point de départ de l'ensemble de notre étude consiste à écrire le Hamiltonien sous une forme diagonale. La matrice de la forme quadratique H_n est une matrice symétrique circulante, qui s'écrit

$$\mathfrak{M}(H_n) = \frac{1}{2d_n} \sum_{m=1}^{d_n} (J^m + J^{-m}),$$

où la matrice J est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\mathbb{1}_{j=i+1 \bmod n} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

La matrice J est diagonalisable avec pour valeurs propres

$$\text{sp}(J) = \left\{ e^{2ij\pi/n} : j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Nous en déduisons que, pour tout $m \geq 1$,

$$\text{sp}(J^m + J^{-m}) = \left\{ 2 \cos \left(\frac{2jm\pi}{n} \right) : j \in \{1, \dots, n\} \right\},$$

et donc les valeurs propres de notre Hamiltonien H_n sont données par

$$\alpha_j^n = \frac{1}{d_n} \sum_{m=1}^{d_n} \cos \left(\frac{2jm\pi}{n} \right) \quad \text{pour } j = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale telle que la matrice de la forme quadratique H_n s'écrive ${}^t P D P$, où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\alpha_1^n, \dots, \alpha_n^n$. Nous définissons alors, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, les variables aléatoires

$$Y_j = \sum_{k=1}^n P_{j,k} X_k.$$

Avec ce changement de variables, nous pouvons écrire :

$$H_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j^n Y_j^2, \quad T_n = \sum_{j=1}^n Y_j^2 \quad \text{et} \quad S_n = \sqrt{n} Y_n.$$

Ce changement de variables étant orthonormal, les variables aléatoires $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont encore des gaussiennes centrées réduites indépendantes, c'est-à-dire qu'elles sont distribuées selon la loi μ_n . Nous pouvons donc oublier complètement les variables X_j et travailler uniquement avec les variables Y_j pour étudier le comportement limite de S_n , qui n'est plus la somme des Y_j mais qui vaut maintenant $\sqrt{n} Y_n$.

La partie 1 du chapitre 3 présente une première approche du modèle avec une interaction limitée aux plus proches voisins, c'est-à-dire avec $d_n = 1$. Nous y étudions le comportement de T_n , H_n et S_n , et nous démontrons un principe de grandes déviations à l'aide du théorème de Gärtner-Ellis, en adaptant la méthode proposée par Bernard Bercu, Fabrice Gamboa et Alain Rouault dans [BGR97].

Pour étudier ensuite la convergence en loi de la somme des spins convenablement renormalisée, nous utilisons la transformée de Fourier qui nous fournit une expression exacte de la distribution du triplet (T_n, H_n, S_n) dans notre modèle $\hat{\mu}_n$ sous une forme intégrale. Nous mettons ensuite en œuvre la méthode du col, qui consiste à déplacer judicieusement le contour d'intégration dans le plan complexe pour obtenir une expression dont la limite peut être évaluée. Pour une présentation générale de la méthode du col, voir par exemple [Cop04]. Cette idée d'utiliser la méthode du col pour étudier un modèle d'Ising à longue portée, après avoir diagonalisé la matrice d'interaction, a déjà été présentée par le physicien Andrew Canning dans une série d'articles [Can92a, Can92b, Can93]. Cependant, Andrew Canning ne fait que proposer la mise en œuvre de la méthode du col pour étudier certains modèles pour lesquels le rang de la matrice d'interaction reste fini, et il ne donne pas de bornes mathématiquement rigoureuses sur la qualité de l'approximation obtenue.

Avec un contrôle précis du comportement asymptotique des valeurs propres dans les différents régimes considérés, nous sommes parvenus à implémenter mathématiquement cette approche pour démontrer nos résultats de convergence en loi. Dans la partie 2, nous étudions ainsi le spectre du Hamiltonien et nous procédons à l'inversion de Fourier pour obtenir la densité du triplet (T_n, H_n, S_n) . Dans la partie 3, nous mettons en œuvre la méthode du col pour obtenir le théorème 5. Dans les parties 4 et 5, nous reproduisons le même schéma de démonstration pour étudier les deux régimes $d_n \sim \lambda n$ et $n^{3/4} \ll d_n \ll n$. Bien que le résultat de convergence en loi soit le même dans ces deux cas, nous les

abordons séparément parce que le comportement des valeurs propres n'est pas tout à fait le même. En effet, dans le régime $d_n \sim \lambda n$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^n = \text{sinc}(j\lambda\pi) = \frac{\sin(j\lambda\pi)}{j\lambda\pi}$$

pour tout $j \geq 1$ fixé, tandis que dans le régime $n^{3/4} \ll d_n \ll n$, nous avons $\alpha_j^n \rightarrow 1$ pour tout $j \geq 1$ fixé, ce qui explique qu'il est alors nécessaire de choisir une échelle différente. Enfin, la partie 6 est consacrée à la preuve du théorème 7. Ces quatre démonstrations sont très semblables, mais un certain nombre de points techniques, de constantes et d'expressions diffèrent d'un régime à l'autre, ce qui explique notre choix de traiter séparément les différents cas plutôt que d'écrire une preuve qui engloberait l'ensemble des cas mais serait peut-être plus confuse.

2 Quelques modèles de criticité auto-organisée en percolation

Nous avons présenté dans les paragraphes précédents plusieurs exemples de modèles mathématiques qui présentent un phénomène de criticité auto-organisée. Notamment, au paragraphe 4.1 de l'introduction, nous avons décrit un modèle construit à partir du modèle d'Ising en champ moyen en introduisant un contrôle automatique de la température. Un des objectifs de cette thèse est de mettre en œuvre une approche similaire, mais dans le cadre de la percolation. Nous allons ainsi obtenir un « modèle-jouet » très simple, qui n'est plus de type champ moyen, mais qui reste analysable mathématiquement. Ce « modèle-jouet » ne prétend pas représenter fidèlement un quelconque phénomène physique, mais il vise plutôt à donner un exemple théorique minimaliste des ingrédients nécessaires pour obtenir un phénomène de criticité auto-organisée. Plusieurs autres modèles ont été construits à partir de la percolation pour trouver automatiquement le point critique [FSS93, BW97, CdML03], mais ces modèles sont de nature plus algorithmique, tandis que la formulation de notre modèle est conceptuellement plus simple. Les résultats présentés ci-après, qui correspondent au contenu de l'article [CF19], seront démontrés au chapitre 5, après des préliminaires au chapitre 4.

2.1 Définition des modèles

Nous prenons comme point de départ le modèle de percolation Bernoulli dans la boîte finie $\Lambda(n)$ en dimension $d \geq 2$, et nous allons introduire un contrôle automatique de la probabilité p d'ouverture des arêtes. L'idée de ce contrôle est d'opérer une rétroaction de la configuration vers le paramètre p , de manière à pénaliser les configurations qui sont « typiques » de la phase surcritique ou de la phase sous-critique. Nous avons donc besoin d'une fonction de la configuration qui présente un comportement très différent selon que le paramètre p se situe au-dessus ou au-dessous du seuil critique p_c .

Nous considérons donc une fonction $F_n : \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n} \rightarrow \mathbb{N}$ définie sur l'espace des configurations de percolation sur les arêtes de la boîte $\Lambda(n)$. Cette fonction F_n pourra être par exemple la taille du plus grand cluster dans la boîte $\Lambda(n)$. Pour $p > p_c$, cette quantité est typiquement d'ordre n^d , tandis que pour $p < p_c$ elle est typiquement d'ordre $\ln(n)$. Nous verrons également deux autres exemples, avec le nombre de sommets reliés aux bords de la boîte ou la distribution des tailles des clusters.

Une fois la fonction F_n choisie, pour construire notre contrôle automatique de la probabilité d'ouverture des arêtes, nous fixons un paramètre $a > 0$ et, pour toute configuration $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$, nous posons

$$p_n(\omega) = \varphi_n(F_n(\omega)) \quad \text{où} \quad \varphi_n(x) = \exp\left(-\frac{x}{n^a}\right).$$

Notre modèle s'obtient alors à partir de la percolation Bernoulli sur les arêtes de la boîte en remplaçant le paramètre p d'ouverture des arêtes par notre fonction $p_n(\omega)$, c'est-à-dire que nous considérons la distribution de probabilité suivante :

$$\mu_n : \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n} \mapsto \frac{1}{Z_n} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega),$$

où $\mathbb{P}_p$ désigne la distribution de percolation de paramètre p , définie en section 2 de l'introduction. Pour obtenir une loi de probabilité, nous avons introduit un facteur de normalisation, appelé fonction de partition, donné par

$$Z_n = \sum_{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega).$$

2.2 Résultat de convergence

Nous démontrons alors le résultat de convergence suivant, valable en toute dimension $d \geq 2$ (avec les notations de la section 2) :

Théorème 8. *Si $(F_n)_n$ est l'une des suites de fonctions suivantes*

- $F_n : \omega \mapsto |C_{\max}(\omega)| = \max_{x \in \Lambda(n)} |C(x, \omega)|$ avec $0 < a < d$;
- $F_n : \omega \mapsto |\mathcal{M}_n(\omega)| = \left| \left\{ x \in \Lambda(n) : x \xleftrightarrow{\omega} \partial \Lambda(n) \right\} \right|$ avec $d - 1 < a < d$;
- $F_n : \omega \mapsto B_n^b(\omega) = \left| \left\{ x \in \Lambda(n) : |C(x, \omega)| \geq n^b \right\} \right|$ avec $\frac{5d}{6} < a < d$ et $0 < b < \frac{2a}{d} - \frac{5}{3}$,

alors la loi de p_n sous μ_n converge vers δ_{p_c} quand $n \rightarrow \infty$, et nous avons le contrôle suivant :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^v} \ln \mu_n \left(|p_n - p_c| \geq \varepsilon \right) < 0, \quad (2.8)$$

où l'exposant v vaut

$$\begin{cases} v = \min(a, d - 1) & \text{si } F_n = |C_{\max}| \\ v = d - 1 & \text{si } F_n = |\mathcal{M}_n| \\ v = \frac{2d}{3} & \text{si } F_n = B_n^b. \end{cases}$$

Ainsi, pour un large intervalle de valeurs du paramètre a , la masse de μ_n se concentre sur les configurations ω pour lesquelles $p_n(\omega)$ est très proche du point critique p_c . Le modèle présente donc un comportement critique sans qu'il y ait besoin d'ajuster précisément un paramètre à une valeur précise, c'est pourquoi nous parlons de criticité auto-organisée.

Étant donné que notre modèle consiste essentiellement à forcer la quantité F_n à être d'ordre n^a , nous aurions pu nous attendre à un comportement différent selon que le paramètre a se situe au-dessus ou au-dessous de la dimension fractale du cluster infini émergeant. Mais étonnamment, la convergence vers p_c a lieu indépendamment de cela, pour une large fenêtre de paramètres a . La dépendance en a se situe probablement plutôt dans la vitesse avec laquelle la variable p_n converge vers p_c , mais cela nécessiterait une étude plus détaillée.

Pour le troisième modèle, une estimation de la vitesse de convergence peut être facilement obtenue, sous réserve de l'existence des exposants critiques β et γ . L'existence de tels exposants β et γ a été prouvée dans le cas de la percolation par sites sur le réseau triangulaire dimension 2 dans [SW01], avec $\beta = 5/36$ et $\gamma = 43/18$.

Théorème 9. *Nous prenons $F_n = B_n^b$. Supposons qu'il existe des réels $\beta, \gamma > 0$ tels que*

$$\limsup_{\substack{p \rightarrow p_c \\ p > p_c}} \frac{\ln \theta(p)}{\ln(p - p_c)} \leq \beta \quad \text{et} \quad \liminf_{\substack{p \rightarrow p_c \\ p < p_c}} \frac{\ln \chi(p)}{\ln(p_c - p)} \geq -\gamma.$$

Alors, pour tous réels a, b et c , nous avons

$$\frac{5d}{6} < a < d, \quad 0 < b < \frac{2a}{d} - \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad c < \min\left(\frac{b}{2\gamma}, \frac{1-b}{\beta}, \frac{d-a}{\beta}\right) \Rightarrow n^c(p_n - p_c) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} 0.$$

La démonstration de ces résultats sera détaillée au chapitre 5. Mais avant cela, expliquons le raisonnement qui nous a conduit à considérer un tel modèle, et présentons l'approche retenue pour démontrer cette convergence.

2.3 Heuristique et stratégie de preuve

De façon heuristique, nous pouvons dire que la fonction p_n introduit une rétroaction qui associe des valeurs $p_n(\omega) < p_c$ aux configurations qui sont en quelque sorte « typiques » du régime surcritique $p > p_c$, et des valeurs $p_n(\omega) > p_c$ aux configurations « typiques » du régime sous-critique $p < p_c$. Par exemple, pour $F_n = |C_{max}|$, une configuration ω dans laquelle le plus grand cluster contient un nombre de sommets d'ordre n^d se verra associer une petite valeur $p_n(\omega) < p_c$. Or, pour une telle valeur du paramètre p dans le modèle de percolation Bernoulli, la présence d'un si grand cluster est hautement improbable, ce qui fait que le poids de ω pour la mesure $\mathbb{P}_{p_n(\omega)}$ sera très faible. Comme nous le verrons au chapitre 5, des arguments classiques de percolation permettent de rendre le raisonnement ci-dessus rigoureux, grâce à des résultats de grandes déviations pour la taille des clusters loin du point critique. Nous obtiendrons alors une convergence de $\mathbb{P}_{p_n(\omega)}$ vers 0, uniformément sur l'ensemble des configurations ω telles que $p_n(\omega) \notin [p_c - \varepsilon, p_c + \varepsilon]$, avec $\varepsilon > 0$ fixé.

À ce stade, il manque encore un ingrédient essentiel pour en déduire que, sous notre loi μ_n , la probabilité de ces configurations tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. En effet, il se pourrait que la masse associée aux configurations ω telles que $p_n(\omega) \in [p_c - \varepsilon, p_c + \varepsilon]$ devienne elle aussi très petite quand n devient grand, et donc que la fonction de partition Z_n soit très petite. Nous avons donc besoin de montrer que cette fonction de partition ne décroît pas trop vite, c'est-à-dire que, dans la loi $Z_n \mu_n$ pas encore normalisée, la masse autour du point critique décroît moins vite que la masse loin de celui-ci.

Ainsi, le point clef de la preuve de notre résultat de convergence est la minoration de la fonction de partition. Pour le troisième modèle, c'est-à-dire le cas où $F_n = B_n^b$, cette étape est facilitée par une propriété d'indépendance spécifique à la fonction B_n^b considérée. En revanche, pour les deux autres cas, notre approche est différente, et repose sur un couplage monotone entre les configurations et sur une étude du comportement de F_n pour des paramètres p proches de p_c . Le problème à résoudre consiste peu ou prou à trouver un régime joint pour lequel, quand la taille de la boîte tend vers l'infini et p se rapproche simultanément de p_c à une certaine vitesse, la taille du plus grand cluster (ou le nombre de sommets reliés au bord, selon le cas) est d'ordre n^a . Ces questions délicates de « limite d'échelle finie » (« finite-size scaling » en anglais) sont très étudiées par les probabilistes, mais peu de résultats rigoureux sont connus à ce jour (voir par exemple [BCKS01] et [GPS18a]).

Cependant, grâce à un argument géométrique que nous présenterons au chapitre 4, nous parvenons à contourner cette difficulté. Cet argument nous permettra de construire des clusters d'une taille prescrite en payant un coût probabiliste raisonnable, ce qui nous fournira la minoration souhaitée de la fonction de partition.

2.4 Deux variantes

Les trois exemples de fonction de rétroaction F_n ne sont pas du tout exhaustifs, et de nombreuses variantes pourraient être construites avec une approche similaire. Par exemple, le cas du plus grand cluster peut être étendu au plus grand cluster sur le tore, c'est-à-dire en imposant des conditions aux bords périodiques aux frontières de la boîte $\Lambda(n)$.

Concernant le troisième exemple, nous pouvons mesurer la taille des clusters par leur diamètre au lieu de leur volume, en remplaçant la fonction B_n^b par

$$\tilde{B}_n^b : \omega \mapsto \left| \left\{ x \in \Lambda(n) : x \xleftrightarrow{\omega} (x + \partial\Lambda(\lceil n^b \rceil)) \cap \Lambda(n) \right\} \right|.$$

3 Un modèle d'Ising de criticité auto-organisée en dimension 2

Après la construction d'un modèle de criticité auto-organisée à partir de la percolation Bernoulli, un objectif naturel est d'étendre ce résultat au modèle d'Ising, en utilisant le couplage avec la FK-

percolation. Mais la technique générale que nous avons mise en œuvre pour le modèle en percolation s'est avérée difficile à appliquer dans le cadre plus général de la FK-percolation. En effet, dans un couplage croissant de configurations en FK-percolation, les arêtes ne s'ouvrent plus de manière indépendante, et des « nuages » d'arêtes ont tendance à s'ouvrir simultanément lorsque le paramètre p s'approche du point critique [DCGP14]. Par conséquent, nous adoptons une approche légèrement différente, que nous présentons dans cette section et qui fera l'objet du chapitre 6, mais qui est limitée au cas de la dimension 2. Ces résultats reprennent le contenu de l'article [For20].

3.1 Définition du modèle et résultat de convergence

Comme notre modèle en percolation, nous allons construire un modèle en volume fini, qui présente un comportement de criticité auto-organisée lorsque la taille de la boîte tend vers l'infini. Nous considérons donc la boîte $\Lambda(n) \subset \mathbb{Z}^2$ de côté n , et nous choisissons un paramètre $a > 0$. Pour toute configuration de spin $\sigma : \Lambda(n) \rightarrow \{-, +\}$, nous définissons la température auto-ajustée suivante :

$$T_n(\sigma) = \left(\frac{m(\sigma)}{n^a} \right)^2 = \frac{1}{n^{2a}} \left(\sum_{x \in \Lambda(n)} \sigma(x) \right)^2.$$

Nous considérons ensuite la distribution de probabilité

$$\mu_n : \sigma \in \{-, +\}^{\Lambda(n)} \mapsto \frac{1}{Z_n} \mu_{n, T_n(\sigma)}^+(\sigma),$$

où Z_n est la constante de normalisation appropriée, et où $\mu_{n, T}^+$ est la mesure d'Ising à température T et avec conditions aux bords $+$ sur la boîte $\Lambda(n)$, sans champ magnétique extérieur, telle que définie en section 3 de l'introduction. Dans notre modèle, la température T qui est fixe dans le modèle d'Ising est remplacée par cette fonction T_n de la configuration elle-même, créant ainsi une rétroaction de la configuration sur le paramètre de contrôle. L'idée est d'obtenir un modèle dont la température se concentre autour de la température critique T_c du modèle d'Ising lorsque la taille de la boîte tend vers l'infini, sans avoir besoin d'ajuster les paramètres du modèle à une valeur précise. C'est pourquoi nous parlons ici encore de criticité auto-organisée. Nous démontrons donc le résultat suivant :

Théorème 10. *En dimension 2, si le paramètre a est choisi tel que $81/41 < a < 2$, alors la loi de T_n sous μ_n converge vers δ_{T_c} quand $n \rightarrow \infty$, et nous avons l'estimation suivante sur la vitesse de convergence :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n \left(|T_n - T_c| > \varepsilon \right) < 0. \quad (2.9)$$

3.2 Stratégie et organisation de la démonstration

Comme expliqué plus haut, la technique qui a permis de traiter le modèle en percolation ne se généralise pas très facilement au cas de la FK-percolation, à cause de la façon non-poissonnienne avec laquelle les arêtes s'ouvrent lorsque le paramètre p s'approche du point critique p_c . Ceci dit, nous conservons tout de même la même organisation générale de la preuve, en commençant par des résultats de grandes déviations pour les régimes sous-critique et surcritique. En effet, pour contrôler les déviations

de la variable aléatoire T_n , nous pouvons écrire, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mu_n(T_n \geq T_c + \varepsilon) &= \frac{1}{Z_n} \sum_{\sigma \in \{-,+\}^{\Lambda(n)}} \mathbb{1}[T_n(\sigma) \geq T_c + \varepsilon] \mu_{n, T_n(\sigma)}^+(\sigma) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{b=0}^{n^2} \mathbb{1}[b^2/n^{2a} \geq T_c + \varepsilon] \sum_{\sigma : |m(\sigma)|=b} \mu_{n, b^2/n^{2a}}^+(\sigma) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{b=0}^{n^2} \mathbb{1}[b \geq n^a \sqrt{T_c + \varepsilon}] \mu_{n, b^2/n^{2a}}^+ (|m| = b) \\
&\leq \frac{n^2 + 1}{Z_n} \sup_{T \geq T_c + \varepsilon} \mu_{n, T}^+ (|m| \geq n^a \sqrt{T_c + \varepsilon}). \tag{2.10}
\end{aligned}$$

De même, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\mu_n(T_n \leq T_c - \varepsilon) \leq \frac{n^2 + 1}{Z_n} \sup_{T \leq T_c - \varepsilon} \mu_{n, T}^+ (|m| \leq n^a \sqrt{T_c - \varepsilon}). \tag{2.11}$$

Par conséquent, notre stratégie consiste à démontrer des résultats de décroissance exponentielle pour

$$\sup_{T \geq T_c + \varepsilon} \mu_{n, T}^+ (|m| \geq An^a) \quad \text{et} \quad \sup_{T \leq T_c - \varepsilon} \mu_{n, T}^+ (|m| \leq An^a) \tag{2.12}$$

pour $A > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés, quand la taille de la boîte tend vers l'infini. Ces estimées exponentielles sont assez standard pour une température fixée $T \neq T_c$. Mais, ne disposant pas d'une propriété de monotonie de la magnétisation par rapport à T , nous ne pouvons pas déduire des estimées uniformes sur $[0, T_c - \varepsilon]$ et sur $[T_c + \varepsilon, +\infty)$ à partir d'estimées à une température ponctuelle fixée. C'est pourquoi nous utilisons le couplage du modèle d'Ising avec la FK-percolation, dont les propriétés de monotonie nous aident à obtenir des majorations exponentielles uniformes des quantités dans (2.12).

Comme pour le modèle en percolation, ces résultats de grandes déviations ne suffisent pas pour démontrer le théorème 10, puisqu'il se pourrait que le dénominateur Z_n dans (2.10) et (2.11) décroisse lui aussi exponentiellement. Par conséquent, le point crucial de la démonstration consiste à montrer que Z_n ne décroît pas aussi vite que les deux termes qui apparaissent dans (2.12).

La stratégie pour obtenir cette minoration de la fonction de partition est proche de celle que nous avons suivie pour le modèle en percolation Bernoulli. Mais ici, au lieu de construire un couplage monotone des configurations et d'utiliser ce couplage pour rechercher un point fixe, nous devinons directement la valeur de ce point fixe, en utilisant les résultats de Raphaël Cerf et Reda Messikh [CM11] sur le régime quasi-critique du modèle FK-Ising en dimension 2. Ces résultats, qui constituent l'ingrédient essentiel de notre démonstration, indiquent quelle vitesse de convergence du paramètre p vers p_c est requise pour obtenir une magnétisation donnée. Les estimées de [CM11] sont très spécifiques au cas de la dimension 2 puisqu'elles reposent en partie sur les calculs exacts d'Onsager [Ons44]. C'est pourquoi notre théorème se limite au modèle dans le plan, tandis qu'une extension en dimension supérieure nécessiterait d'autres ingrédients.

Dans chacun des trois régimes (sous-critique, surcritique et quasi-critique), nous contrôlons la magnétisation dans le modèle d'Ising en utilisant le couplage avec la FK-percolation (voir paragraphe 3.2 pour la présentation de ce couplage). Dans une configuration d'Ising obtenue à partir d'une configuration de FK-percolation via ce couplage, la magnétisation est le résultat de deux facteurs : d'une part le nombre de sommets reliés aux bords de la boîte, et d'autre part les fluctuations qui résultent des spins attribués aux clusters qui ne touchent pas le bord de la boîte. Par conséquent, nous avons besoin de contrôler ces deux facteurs dans la configuration de FK-percolation pour obtenir un contrôle de la magnétisation dans la configuration d'Ising obtenue.

La limitation du paramètre a dans une très petite fenêtre provient également des hypothèses de Cerf et Messikh, qui ne sont *a priori* pas optimales. C'est pourquoi, pour contrôler la dépendance de notre

résultat par rapport à ces hypothèses, nous démontrons notre minoration de la fonction de partition sous une hypothèse plus générale de loi d'échelle en volume fini, qui découle des résultats de [CM11]. Cela nous permet d'expliquer ci-dessous comment l'exposant $81/41$ évoluerait si les résultats de Cerf et Messikh étaient étendus à une fenêtre plus large de paramètres. Une amélioration de leurs hypothèses permettrait d'agrandir notre fenêtre mais, puisque les résultats de [CM11] ne concernent que le régime légèrement surcritique (quand $p - p_c$ converge vers zéro tout en restant positif), une méthode différente serait nécessaire pour étudier les cas de paramètres a au-dessous de $15/8$, qui est la dimension conjecturée pour le cluster infini émergeant.

3.3 Amélioration de notre exposant

Notre preuve de la convergence de T_n vers T_c repose sur les résultats de [CM11] qui portent sur l'ensemble des sommets reliés aux bords de la boîte dans le modèle FK-Ising en dimension 2, dans un régime joint où $p \rightarrow p_c$ et $n \rightarrow \infty$ simultanément, avec

$$p - p_c \gg \frac{1}{n^{8/41}}. \quad (2.13)$$

Cette limite de $8/41$ n'est *a priori* pas optimale, parce qu'il est conjecturé que le modèle de FK-percolation devrait avoir un comportement surcritique dès que n est très grand devant la longueur de corrélation, qui est d'ordre $(p - p_c)^{-1}$ [DCGP14]. Pour obtenir notre minoration de la fonction de partition, nous aurons besoin d'étudier la FK-percolation dans le régime donné par $p - p_c \sim 1/n^{16-8a}$, d'où notre hypothèse $a > 81/41$, pour se retrouver dans le régime joint (2.13). Pour connaître l'influence de cette condition sur le domaine admissible pour l'exposant a , nous citons explicitement ci-dessous lesquels des résultats de Cerf et Messikh sont utiles pour notre démonstration.

Définition 1. Nous disons qu'un exposant $s > 0$ vérifie les hypothèses de loi d'échelle en volume fini, ce que nous noterons $\mathcal{FSS}(s)$ (pour « finite-size scaling ») si, pour tous $K, \delta > 0$ et pour toute suite $p_n \in [0, 1]$ telle que

$$p_n - p_c(2) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{K}{n^s},$$

nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{F}_n) = 1,$$

où l'événement $\mathcal{F}_n$ est donné par

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \begin{array}{l} |\mathcal{M}_n| \leq (1 + \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n)|, \quad |\mathcal{M}_n \cap \Lambda(n_1)| \geq (1 - \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n_1)| \\ \text{et} \quad \max_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C| \leq n^{s+1/2} \end{array} \right\},$$

où $n_1 = \lfloor 5n/6 \rfloor$, $\phi_{n, p, q}^1$ est la mesure de FK-percolation avec conditions aux bords périodiques sur la boîte $\Lambda(n)$ et $\mathcal{M}_n$ désigne l'ensemble des sommets reliés au bord $\partial\Lambda(n)$ de la boîte, comme défini en section 2.

Nous pouvons alors traduire les résultats de [CM11] dans la proposition suivante :

Proposition 11. Nous avons $\mathcal{FSS}(s)$ pour tout $s < 8/41$.

Le théorème qui suit montre comment la constante $81/41$ évoluerait si les résultats de Cerf et Messikh étaient améliorés. Combiné avec la proposition 11, il implique facilement le théorème 10. Nous ne savons pas si la valeur $31/16$ est optimale.

Théorème 11. Si $a \in (31/16, 2)$ est telle que les hypothèses $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$ sont vérifiées, alors la loi de T_n sous μ_n converge vers δ_{T_c} quand n tend vers l'infini, et nous avons l'estimation (2.9) de la vitesse de convergence.

3.4 Un modèle plus naturel ?

La densité de probabilité de notre modèle s'écrit

$$\mu_n : \sigma \mapsto \frac{1}{Z_n} \frac{1}{Z_{n, T_n(\sigma)}^+} \exp \left(-\frac{\mathcal{H}_n^+(\sigma)}{T_n(\sigma)} \right), \quad (2.14)$$

où $\mathcal{H}_n^+$ est le Hamiltonien du modèle d'Ising standard, défini en section 3. Une autre distribution de probabilité qu'il pourrait sembler plus naturelle de considérer est

$$\mu'_n : \sigma \mapsto \frac{1}{Z'_n} \exp \left(-\frac{\mathcal{H}_n^+(\sigma)}{T_n(\sigma)} \right), \quad (2.15)$$

où Z'_n est la constante de normalisation appropriée. Mais étonnamment, les simulations semblent indiquer que cet autre modèle serait trop simple pour présenter le comportement de criticité auto-organisée que nous recherchons. Tentons d'expliquer de façon heuristique la différence entre ces deux modèles. Lorsque nous simulons le modèle d'Ising avec la dynamique de Glauber (voir chapitre 8.2 du livre [Gri06]), la configuration est mise à jour un spin après l'autre, en fonction de l'effet de ce changement de spin sur l'énergie. Dans le modèle d'Ising standard, la fonction d'énergie s'écrit

$$E_{Ising} = \frac{\mathcal{H}_n^+}{T}.$$

Par conséquent, en modifiant un spin, la variation d'énergie est

$$\Delta E_{Ising} = \frac{\Delta \mathcal{H}_n^+}{T},$$

et donc le changement de spin sera plus probable s'il conduit à une diminution du Hamiltonien $\mathcal{H}_n^+$. Par contre, dans le modèle (2.15), du fait que la température n'est plus une constante, un changement de spin mène à une variation d'énergie donnée par

$$\Delta E_{\mu'_n} = \Delta \left(\frac{\mathcal{H}_n^+}{T_n} \right) \approx \frac{\Delta \mathcal{H}_n^+}{T_n} - \frac{\mathcal{H}_n^+ \Delta T_n}{T_n^2} = \frac{\mathcal{H}_n^+}{T_n} \left(\frac{\Delta \mathcal{H}_n^+}{\mathcal{H}_n^+} - \frac{\Delta T_n}{T_n} \right). \quad (2.16)$$

Il y a une compétition entre les deux termes dans (2.16) pour influencer le changement de spin : le premier terme encourage les changements de spins qui font diminuer le Hamiltonien, tandis que le second terme encourage les changements qui conduisent à une hausse de la température (ou une diminution, si le Hamiltonien est négatif). Par conséquent, la dynamique sur le Hamiltonien se retrouve perturbée par la dynamique sur la température.

Ainsi, pour que notre fonction de rétroaction sur la température conduise à un phénomène de criticité auto-organisée, il faut que la dynamique sur le Hamiltonien prenne le dessus pour contrebalancer la dynamique sur la température. Si c'est bien le cas, alors la configuration a le temps d'atteindre une configuration qui est « typique » à température fixe, et une fois seulement que cet équilibre est atteint, sur une échelle de temps plus longue, la température évolue et force lentement le système vers le point critique. Nous retrouvons ici la propriété de séparation des échelles, qui est commune à de nombreux modèles de criticité auto-organisée (voir sections 1.4 et 4.2).

Les simulations confirment cette idée que la dynamique que le Hamiltonien et sur la température ne doivent pas être en compétition mais doivent avoir lieu sur des échelles de temps différentes, afin d'atteindre un état auto-critique. En effet, si nous simulons le modèle (2.15) avec la dynamique de Glauber mais sans prendre en compte l'évolution de la température pour décider du changement de spin, alors nous obtenons un bien meilleur résultat, qui est même amélioré si le paramètre de température n'est mis à jour qu'une fois de temps en temps, laissant ainsi du temps au système pour atteindre l'équilibre à température fixée avant de décider d'une nouvelle température.

Pourquoi n'y a-t-il pas le même phénomène malheureux de compétition avec notre modèle μ_n donné par l'équation (2.14) ? Dans ce modèle, si nous prenons en compte l'influence de la fonction de partition au dénominateur, nous obtenons une « fonction d'énergie » qui s'écrit

$$E_{\mu_n} = \ln Z_{n,T_n}^+ + \frac{\mathcal{H}_n^+}{T_n}.$$

Par conséquent, un petit changement dans la configuration entraîne une variation d'énergie donnée par

$$\Delta E_{\mu_n} = \Delta \left(\ln Z_{n,T_n}^+ + \frac{\mathcal{H}_n^+}{T_n} \right) \approx \frac{\partial \ln Z_{n,T}^+}{\partial T} \Delta T_n + \frac{\Delta \mathcal{H}_n^+}{T_n} - \frac{\mathcal{H}_n^+ \Delta T_n}{T_n^2}.$$

Rappelons maintenant que la fonction de partition du modèle d'Ising vérifie

$$\frac{\partial \ln Z_{n,T}^+}{\partial T} = \frac{1}{Z_{n,T}^+} \sum_{\sigma \in \{-,+\}^{\Lambda(n)}} \frac{\mathcal{H}_n^+}{T^2} \exp \left(-\frac{\mathcal{H}_n^+}{T} \right) = \frac{1}{T^2} \mu_{n,T}^+(\mathcal{H}_n^+),$$

ce qui nous donne

$$\Delta E_{\mu_n} \approx \frac{\Delta \mathcal{H}_n^+}{T_n} + \left(\mu_{n,T_n}^+(\mathcal{H}_n^+) - \mathcal{H}_n^+ \right) \frac{\Delta T_n}{T_n^2}.$$

Ainsi, le facteur devant ΔT_n est ajusté pour être plus petit que dans (2.16), grâce à la compensation qui provient du terme $\mu_{n,T_n}^+(\mathcal{H}_n^+)$. Ceci pourrait expliquer pourquoi, dans notre modèle, l'effet du Hamiltonien parvient à dominer l'effet de la variation de la température, ce qui assure que notre auto-ajustement de la température est assez délicate pour préserver un certain équilibre du modèle.

Chapitre

3

Un modèle d'Ising de criticité auto-organisée avec interactions à longue portée

Ce chapitre est consacré à la démonstration des résultats présentés dans la partie 1 du chapitre 2.

Sommaire

1	Étude des grandes déviations dans le modèle à courte portée	40
1.1	Calcul de la fonction génératrice des cumulants	41
1.2	Transformée de Fenchel-Legendre	45
1.3	Principe de grandes déviations	47
2	Quelques lemmes techniques	50
2.1	Comportement de la température	50
2.2	Étude du spectre	51
2.3	Les valeurs propres dans le régime du théorème 5	52
2.4	Les valeurs propres dans le régime intermédiaire	57
2.5	Inversion de Fourier	62
3	Preuve du théorème 4	65
3.1	La méthode des rectangles	66
3.2	Mise en forme de l'intégrale	66
3.3	Convergence simple de l'intégrande	70
3.4	Déplacement du contour d'intégration	73
3.5	Domination	75
3.6	Convergence dominée	77
4	Preuve du théorème 5	78
4.1	Mise en forme de l'intégrale	79
4.2	Convergence simple de l'intégrande	80
4.3	Déplacement du contour d'intégration	84
4.4	Domination	87
4.5	Convergence dominée	90
5	Preuve du théorème 6	91
5.1	Mise en forme de l'intégrale	91
5.2	Convergence simple de l'intégrande	92
5.3	Déplacement du contour d'intégration	98
5.4	Domination	102
5.5	Convergence dominée	105
6	Preuve du théorème 7	107

6.1	Une borne sur le Hamiltonien	107
6.2	Mise en forme de l'intégrale	108
6.3	Convergence simple de l'intégrande	109
6.4	Déplacement du contour d'intégration	111
6.5	Domination	113
6.6	Convergence dominée	115
6.7	Identification de la loi limite	116

1 Étude des grandes déviations dans le modèle à courte portée

Dans cette première partie, nous étudions le cas $d_n = 1$ du modèle décrit au début du chapitre 2, c'est-à-dire la distribution $\hat{\mu}_n$ définie par (2.2). Rappelons que $\hat{\mu}_n$ est construite par l'introduction d'un biais exponentiel dans la loi μ_n de variables initialement gaussiennes i.i.d. $X_1, \dots, X_n$, en posant

$$d\hat{\mu}_n = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{nH_n}{2T_n}\right) d\mu_n,$$

avec

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j^2 \quad \text{et} \quad H_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j x_{j+1}.$$

Ainsi, une approche de type grandes déviations semble particulièrement adaptée, puisque la fonction de taux sous la loi $\hat{\mu}_n$ de notre modèle se déduira aisément de la fonction de taux sous la loi indépendante μ_n , en ajoutant le terme correspondant à $nH_n/(2T_n)$. Commençons tout d'abord par quelques définitions :

Définition 2. Soit $\mathcal{X}$ un espace topologique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Une fonction de taux est une application $J : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ qui est semi-continue inférieurement, c'est-à-dire telle que $J^{-1}([0, \alpha])$ est fermé pour tout $\alpha \geq 0$. Une fonction de taux est dite bonne si $J^{-1}([0, \alpha])$ est compact pour tout $\alpha \geq 0$. Nous disons qu'une suite de mesures de probabilité $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathcal{X}$ satisfait un principe de grandes déviations de fonction de taux J si pour tout borélien $A \in \mathcal{B}$, nous avons

$$-\inf_{A^\circ} J \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu_n(A)}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu_n(A)}{n} \leq -\inf_A J.$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 12. Sous la loi $\hat{\mu}_n$, le triplet

$$\left(\frac{T_n}{n}, \frac{H_n}{n}, \frac{S_n}{n} \right)$$

satisfait un principe de grandes déviations gouverné par la bonne fonction de taux

$$J(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[C + x - 1 - \ln x - \ln \left(1 - \frac{y}{x} \right) - \ln \left(1 + \frac{y - z^2}{x - z^2} \right) - \frac{y}{x} \right] & \text{si } 2x > x + y > 2z^2, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la constante C est donnée par

$$C = \sqrt{2} - 1 + \ln 2 + \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Nous en déduirons alors le résultat suivant :

Théorème 13. Considérons un tableau triangulaire infini de variables aléatoires $(X_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ tel que pour tout $n \geq 1$, le vecteur $(X_1^n, \dots, X_n^n)$ est distribué suivant la loi $\hat{\mu}_n$ définie par (2.2). Alors, quand $n \rightarrow \infty$, nous avons les convergences en probabilité :

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow 1, \quad \frac{H_n}{n} \rightarrow \sqrt{2} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{S_n}{n} \rightarrow 0.$$

1.1 Calcul de la fonction génératrice des cumulants

Rappelons tout d'abord que, comme remarqué dans (2.4), nous avons toujours $|H_n| \leq T_n$. Nous avons même, μ_n -presque sûrement, $|H_n| < T_n$. De même, nous avons μ_n -presque sûrement

$$\left| H_n - \frac{S_n^2}{n} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^n Y_j^2 \right| < \sum_{j=1}^{n-1} Y_j^2 = T_n - \frac{S_n^2}{n},$$

d'où

$$\left| \frac{H_n}{n} - \left(\frac{S_n}{n} \right)^2 \right| < \frac{T_n}{n} - \left(\frac{S_n}{n} \right)^2.$$

Par conséquent, si nous notons

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| < x \text{ et } |y - z^2| < x - z^2 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x > x + y > 2z^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

alors nous avons

$$\mu_n \left[\left(\frac{T_n}{n}, \frac{H_n}{n}, \frac{S_n}{n} \right) \in \Omega \right] = 1, \quad (3.2)$$

et ce, quelle que soit la portée d'interaction d_n . Nous souhaitons appliquer le théorème de Gärtner-Ellis (voir théorème 14 ci-dessous) pour obtenir un principe de grandes déviations pour $(T_n, H_n, S_n)/n$, dans un premier temps sous la loi μ_n . Nous suivons en cela la démarche présentée dans l'article [BGR97], qui porte sur l'étude des grandes déviations de formes quadratiques définies de façon similaire. Nous considérons donc la fonction génératrice des cumulants sous μ_n convenablement renormalisée, qui est définie par

$$\Lambda_n : (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{n} \ln \mu_n \left[\exp \left(n\lambda \frac{T_n}{n} + n\mu \frac{H_n}{n} + n\nu \frac{S_n}{n} \right) \right].$$

Nous calculons donc, dans $[0, \infty]$,

$$\begin{aligned} \Lambda_n(\lambda, \mu, \nu) &= \frac{1}{n} \ln \mu_n \left[\exp \left(\lambda \sum_{j=1}^n Y_j^2 + \mu \sum_{j=1}^n \alpha_j^n Y_j^2 + \nu \sqrt{n} Y_n \right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \ln \mu_n \left[\exp \left(\sum_{j=1}^n (\lambda + \mu \alpha_j^n) Y_j^2 + \nu \sqrt{n} Y_n \right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \mu_n \left[\exp \left((\lambda + \mu \alpha_j^n) Y_j^2 \right) \right] + \frac{1}{n} \ln \mu_n \left[\exp \left((\lambda + \mu \alpha_n^n) Y_n^2 + \nu \sqrt{n} Y_n \right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \ln F(1 - 2\lambda - 2\mu \alpha_j^n, 0) + \frac{1}{n} \ln F(1 - 2\lambda - 2\mu \alpha_n^n, \nu \sqrt{n}) \end{aligned}$$

où la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$ est donnée par

$$F(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{bx - ax^2/2}.$$

Si $a \leq 0$ alors $F(a, b) = +\infty$, tandis que si $a > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx \exp \left[-\frac{a}{2} \left(x - \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{b^2}{2a} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dy \exp \left(-\frac{ay^2}{2} + \frac{b^2}{2a} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \exp \left(\frac{b^2}{2a} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ainsi, si $\lambda + |\mu| < 1/2$, alors nous avons $\lambda + \mu \alpha_j^n < 1/2$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et donc la formule (3.3) nous donne

$$\begin{aligned} \Lambda_n(\lambda, \mu, \nu) &= -\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - 2\lambda - 2\mu \alpha_j^n) - \frac{1}{2n} \ln(1 - 2\lambda - 2\mu \alpha_n^n) + \frac{\nu^2}{2(1 - 2\lambda - 2\mu \alpha_n^n)} \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \ln \left[1 - 2\lambda - 2\mu \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right] + \frac{\nu^2}{2(1 - 2\lambda - 2\mu)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\lambda - 2\mu \cos t) dt + \frac{\nu^2}{2(1 - 2\lambda - 2\mu)}, \quad (3.5)$$

puisque la fonction

$$t \mapsto \ln(1 - 2\lambda - 2\mu \cos t)$$

est continue sur le segment $[0, 2\pi]$. Nous détaillons maintenant quelques calculs qui nous seront utiles à plusieurs reprises :

Lemme 1. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $|b| < a$, nous avons*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + b \cos t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{a + b \cos t} dt = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - b^2/a^2}} \right) \mathbb{1}_{b \neq 0},$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(a + b \cos t) dt = \ln a + 2 \ln \left[\cos \left(\frac{\arcsin(b/a)}{2} \right) \right].$$

Démonstration. Soit $a > 0$ et soit $b \in (-a, a)$. Nous calculons d'abord la première intégrale en effectuant le changement de variable $\theta = \tan(t/2)$. Nous obtenons alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + b \cos t} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2 d\theta}{a(1 + \theta^2) + b(1 - \theta^2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2 d\theta}{(a + b) + (a - b)\theta^2}.$$

Nous faisons ensuite le changement de variable

$$\theta = u \sqrt{\frac{a+b}{a-b}},$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + b \cos t} = \frac{1}{2\pi \sqrt{a^2 - b^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{2 du}{1 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Nous en déduisons que pour $b \neq 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{a + b \cos t} dt = \frac{1}{2\pi b} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{a}{a + b \cos t} \right) dt = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - b^2/a^2}} \right).$$

Enfin, nous définissons la fonction

$$f_a : b \in (-a, a) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(a + b \cos t) dt.$$

Cette fonction est paire et $\mathcal{C}^1$, et nous avons pour $0 < b < a$,

$$f'_a(b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{a + b \cos t} dt = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - b^2/a^2}} \right).$$

Nous en déduisons que pour $0 < b < a$,

$$f_a(b) = f_a(0) + \int_0^b f'_a(x) dx = \ln a + \int_0^b \frac{dx}{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/a^2}} \right) = \ln a + \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{t} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \right).$$

Avec le changement de variable $\theta = \arcsin t$, il vient

$$\begin{aligned} f_a(b) - \ln a &= \int_0^{\arcsin(b/a)} \frac{(\cos \theta) d\theta}{\sin \theta} \left(1 - \frac{1}{\cos \theta} \right) = \int_0^{\arcsin(b/a)} \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} d\theta \\ &= - \int_0^{\arcsin(b/a)} \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} d\theta = 2 \ln \left[\cos \left(\frac{\arcsin(b/a)}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

Nous en déduisons que pour $\lambda + |\mu| < 1/2$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n(\lambda, \mu, \nu) = \Lambda(\lambda, \mu, \nu),$$

avec

$$\Lambda(\lambda, \mu, \nu) = -\frac{\ln(1-2\lambda)}{2} - \ln \cos \left[\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2\mu}{1-2\lambda} \right) \right] + \frac{\nu^2}{2(1-2\lambda-2\mu)}. \quad (3.6)$$

Si $\lambda + \mu \geq 1/2$ alors nous avons $1 - 2\lambda - 2\mu \leq 0$ et donc pour tout $n \geq 1$,

$$F(1 - 2\lambda - 2\mu\alpha_n^n, \nu\sqrt{n}) = F(1 - 2\lambda - 2\mu, \nu\sqrt{n}) = +\infty,$$

ce qui entraîne que $\Lambda_n(\lambda, \mu, \nu) = +\infty$. Si $\lambda - \mu > 1/2$, alors nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 2\lambda - 2\mu\alpha_{[n/2]}^n = 1 - 2\lambda + 2\mu < 0,$$

d'où $\Lambda_n(\lambda, \mu, \nu) = +\infty$ à partir d'un certain rang. Enfin, le comportement pour $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda + \mu < 1/2$ mais $\lambda - \mu = 1/2$ dépend de la parité de n . Si n est pair alors nous avons $\alpha_{n/2}^n = -1$ et donc $\Lambda_n(\lambda, \mu, \nu) = +\infty$. En revanche, si n est impair, nous avons $\alpha_j^n > -1$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, et donc nous avons la même expression (3.4), c'est-à-dire

$$\Lambda(\lambda, \mu, \nu) = -\frac{\ln(1-2\lambda)}{2} - \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \ln \left[1 + \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right] + \frac{\nu^2}{4(1-2\lambda)}.$$

La somme n'est alors plus la somme de Riemann d'une fonction continue sur un segment, puisque la fonction $f : t \mapsto \ln(1 + \cos t)$ n'est pas définie en $t = \pi$. Cependant, comme n est impair, nous pouvons écrire

$$-\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \ln \left[1 + \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right] = \frac{\ln 2}{2n} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{[n/2]} f_n \left(\frac{2j\pi}{n} \right),$$

où la fonction f_n est donnée par

$$f_n : t \in [0, \pi) \mapsto \ln \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{n} \left\lfloor \frac{nt}{2\pi} \right\rfloor \right) \right].$$

Nous avons alors

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} f_n \left(\frac{2j\pi}{n} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f_n(t) dt + \frac{1}{2n} f_n \left(\frac{2\pi \lfloor n/2 \rfloor}{n} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f_n(t) dt + o(1),$$

puisque

$$f_n \left(\frac{2\pi \lfloor n/2 \rfloor}{n} \right) = \ln \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi \lfloor n/2 \rfloor}{n} \right) \right] = \ln \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right] = O(\ln n).$$

Or, par décroissance de la fonction $t \mapsto \ln(1 + \cos t)$ sur $[0, \pi)$, nous avons

$$\forall t \in [0, \pi) \quad \ln(1 + \cos t) \leq f_n(t) \leq \ln 2.$$

Quand $t \rightarrow \pi$ avec $t < \pi$, nous avons $\ln(1 + \cos t) = O(\ln(\pi - t))$, et donc la fonction

$$t \mapsto (\ln 2) \vee (-\ln(1 + \cos t))$$

est intégrable sur $[0, \pi)$. Nous pouvons donc déduire du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_n(t) dt = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \int_0^\pi \ln(1 + \cos t) dt,$$

et donc finalement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n(\lambda, \mu, \nu) = -\frac{\ln(1 - 2\lambda)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \ln(1 + \cos t) dt + \frac{\nu^2}{4(1 - 2\lambda)}.$$

Nous écrivons ensuite

$$\int_0^\pi \ln(1 + \cos t) dt = \int_0^\pi \lim_{b \nearrow 1} \ln(1 + b \cos t) dt = \lim_{b \nearrow 1} \int_0^\pi \ln(1 + b \cos t) dt,$$

en utilisant par exemple le théorème de convergence monotone séparément sur $[0, \pi/2]$ et $[\pi/2, \pi]$. Nous avons alors, d'après la dernière formule du lemme 1,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \ln(1 + \cos t) dt = \lim_{b \nearrow 1} \ln \left[\cos \left(\frac{\arcsin b}{2} \right) \right] = \ln \cos \left[\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2\mu}{1 - 2\lambda} \right) \right].$$

Ainsi, pour n impair, si $\lambda + \mu < 1/2$ et $\lambda - \mu = 1/2$, nous retrouvons la même fonction limite Λ dont l'expression est donnée par (3.6). Pour récapituler, nous avons

$$\forall (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{2n}(\lambda, \mu, \nu) = \Lambda_p(\lambda, \mu, \nu) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{2n+1}(\lambda, \mu, \nu) = \Lambda_i(\lambda, \mu, \nu),$$

où les fonctions limites Λ_p et Λ_i sont données par

$$\Lambda_p(\lambda, \mu, \nu) = \begin{cases} \Lambda(\lambda, \mu, \nu) & \text{si } \lambda + |\mu| < \frac{1}{2}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\Lambda_i(\lambda, \mu, \nu) = \begin{cases} \Lambda(\lambda, \mu, \nu) & \text{si } \lambda + \mu < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lambda - \mu \leq \frac{1}{2}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce petit hiatus entre les indices pairs et impairs est sans gravité puisque les fonctions Λ_i et Λ_p diffèrent seulement sur l'ensemble $\{\lambda - \mu = 1/2\}$. Or, comme nous allons le voir, pour reprendre le vocabulaire de [DZ10], ces points ne sont pas des « hyperplans exposants », ce qui a pour conséquence que les deux fonctions ont la même transformée de Fenchel-Legendre. Ainsi le théorème de Gärtner-Ellis appliqué séparément aux entiers pairs d'une part et aux entiers impairs d'autre part nous donnera deux principes de grandes déviations avec la même fonction de taux pour les entiers pairs et impairs, ce qui revient donc à un seul principe de grandes déviations avec cette fonction de taux pour tout n .

1.2 Transformée de Fenchel-Legendre

Nous déterminons maintenant la transformée de Fenchel-Legendre de la fonction Λ_p , qui est définie par

$$\Lambda_p^* : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \sup_{(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3} \left(\lambda x + \mu y + \nu z - \Lambda_p(\lambda, \mu, \nu) \right), \quad (3.7)$$

et qui est à valeurs dans $(-\infty, +\infty]$. Pour calculer cette transformée de Fenchel-Legendre, nous utilisons le fait que la fonction Λ_p est différentiable sur tout l'ouvert sur lequel elle est finie. Rappelons l'expression (3.5) de Λ_p , valable pour $\lambda + |\mu| < 1/2$:

$$\Lambda_p(\lambda, \mu, \nu) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\lambda - 2\mu \cos t) dt + \frac{\nu^2}{2(1 - 2\lambda - 2\mu)}.$$

Avec les résultats du lemme 1, nous calculons donc, pour $\lambda + |\mu| < 1/2$,

$$\frac{\partial \Lambda_p}{\partial \lambda}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1 - 2\lambda - 2\mu \cos t} + \frac{2\nu^2}{2(1 - 2\lambda - 2\mu)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\lambda)^2 - 4\mu^2}} + \frac{\nu^2}{(1 - 2\lambda - 2\mu)^2},$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_p}{\partial \mu}(\lambda, \mu, \nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t dt}{1 - 2\lambda - 2\mu \cos t} + \frac{2\nu^2}{2(1 - 2\lambda - 2\mu)^2} \\ &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1 - 2\lambda}{\sqrt{(1 - 2\lambda)^2 - 4\mu^2}} - 1 \right) \mathbb{1}_{\mu \neq 0} + \frac{\nu^2}{(1 - 2\lambda - 2\mu)^2}, \end{aligned}$$

et enfin

$$\frac{\partial \Lambda_p}{\partial \nu}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{\nu}{1 - 2\lambda - 2\mu}.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Nous recherchons le supremum de l'application

$$(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \lambda x + \mu y + \nu z - \Lambda_p(\lambda, \mu, \nu). \quad (3.8)$$

Pour tout n , la fonction génératrice des cumulants Λ_n est convexe, et donc la fonction limite Λ_p est elle aussi convexe. Par conséquent la fonction ci-dessus est concave. Ainsi, si elle admet un point critique alors celui-ci est automatiquement un maximum global. Ainsi, nous recherchons un point critique de la fonction (3.8), c'est-à-dire une solution du système

$$\begin{cases} x = \frac{\partial \Lambda_p}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\lambda)^2 - 4\mu^2}} + \frac{\nu^2}{(1 - 2\lambda - 2\mu)^2} \\ y = \frac{\partial \Lambda_p}{\partial \mu} &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1 - 2\lambda}{\sqrt{(1 - 2\lambda)^2 - 4\mu^2}} - 1 \right) \mathbb{1}_{\mu \neq 0} + \frac{\nu^2}{(1 - 2\lambda - 2\mu)^2} \\ z = \frac{\partial \Lambda_p}{\partial \nu} &= \frac{\nu}{1 - 2\lambda - 2\mu}, \end{cases}$$

qui est équivalent au système simplifié :

$$\begin{cases} x - z^2 &= \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\lambda)^2 - 4\mu^2}} \\ y - z^2 &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1 - 2\lambda}{\sqrt{(1 - 2\lambda)^2 - 4\mu^2}} - 1 \right) \mathbb{1}_{\mu \neq 0} \\ z &= \frac{\nu}{1 - 2\lambda - 2\mu}. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous nous limitons à $(x, y, z) \in \Omega$, où Ω est l'ouvert défini en (3.1). Nous prenons donc $(x, y, z) \in \Omega$, et nous notons $\tilde{x} = x - z^2$ et $\tilde{y} = y - z^2$. Nous avons ainsi $|\tilde{y}| < \tilde{x}$. Le système admet alors une solution qui s'écrit

$$\begin{cases} \lambda^*(x, y, z) = \frac{1}{2} - \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2\tilde{x}(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)} \\ \mu^*(x, y, z) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} \\ \nu^*(x, y, z) = \frac{z(\tilde{x} - \tilde{y})}{\tilde{x}(\tilde{x} + \tilde{y})}. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons trouvé un point critique de la fonction (3.8), qui est donc un maximum global, puisque cette fonction est concave. Nous avons donc

$$\forall (x, y, z) \in \Omega \quad \Lambda_p^*(x, y, z) = x\lambda^* + y\mu^* + z\nu^* - \Lambda_p(\lambda^*, \mu^*, \nu^*).$$

Nous calculons donc, d'une part,

$$\begin{aligned} x\lambda^* + y\mu^* + z\nu^* &= \frac{x}{2} - \frac{x(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}{2\tilde{x}(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)} + \frac{y\tilde{y}}{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} + z^2 \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\tilde{x}(\tilde{x} + \tilde{y})} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} - \frac{z^2}{2\tilde{x}} \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} + z^2 \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} + z^2 \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\tilde{x}(\tilde{x} + \tilde{y})} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{2\tilde{x}(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)} (2(\tilde{x} - \tilde{y})^2 + 2\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2) \\ &= \frac{x-1}{2} + \frac{z^2(\tilde{x} - \tilde{y})}{2\tilde{x}(\tilde{x} + \tilde{y})}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \Lambda_p(\lambda^*, \mu^*, \nu^*) &= -\frac{\ln(1 - 2\lambda^*)}{2} - \ln \cos \left[\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2\mu^*}{1 - 2\lambda^*} \right) \right] + \frac{(\nu^*)^2}{2(1 - 2\lambda^* - 2\mu^*)} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{\tilde{x}(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)} \right) - \frac{1}{2} \ln \cos^2 \left[\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \right) \right] + \frac{z^2(\tilde{x} - \tilde{y})}{2\tilde{x}(\tilde{x} + \tilde{y})}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Nous écrivons alors

$$\begin{aligned} \cos^2 \left[\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \right) \right] &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos \arcsin \left(\frac{2\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\tilde{x}^2\tilde{y}^2}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \right) \\ &= \frac{\tilde{x}^2}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.10), il vient

$$\Lambda_p(\lambda^*, \mu^*, \nu^*) = -\frac{\ln \tilde{x}}{2} + \frac{\ln(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)}{2} + \frac{z^2(\tilde{x} - \tilde{y})}{2\tilde{x}(\tilde{x} + \tilde{y})}. \tag{3.11}$$

Ainsi, en injectant (3.9) et (3.11) dans l'expression (3.7) de Λ_p^* , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\forall (x, y, z) \in \Omega \quad \Lambda_p^*(x, y, z) &= x\lambda^* + y\mu^* + z\nu^* - \Lambda_p(\lambda^*, \mu^*, \nu^*) \\
&= \frac{x-1}{2} + \frac{\ln \tilde{x}}{2} - \frac{\ln(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)}{2} \\
&= \frac{x-1}{2} + \frac{\ln \tilde{x}}{2} - \frac{\ln(\tilde{x} - \tilde{y})}{2} - \frac{\ln(\tilde{x} + \tilde{y})}{2} \\
&= \frac{x-1}{2} + \frac{\ln \tilde{x}}{2} - \frac{\ln(x-y)}{2} - \frac{\ln \tilde{x}}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} \right) \\
&= \frac{x-1-\ln x}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y-z^2}{x-z^2} \right).
\end{aligned}$$

Remarquons que l'expression obtenue tend vers $+\infty$ quand $x-y \rightarrow 0$ ou quand $x+y-2z^2 \rightarrow 0$, c'est-à-dire aux bords du domaine Ω . Or la transformée de Fenchel-Legendre d'une fonction convexe est elle-même convexe, donc la fonction $\Lambda_p^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow (-\infty, +\infty]$ est convexe. Ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, en considérant la fonction convexe

$$f : t \in [0, 1] \mapsto \Lambda_p^*(1-t+tx, ty, tz),$$

qui tend vers $+\infty$ quand t tend vers

$$\tau = \sup \left\{ t \in [0, 1] : (1-t+tx, ty, tz) \in \Omega \right\},$$

nous en déduisons que $\Lambda_p^*(x, y, z) = f(1) = +\infty$. Ce n'est pas étonnant puisque, comme nous l'avons vu, la loi du triplet $(T_n, H_n, S_n)/n$ ne charge pas l'ensemble $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Enfin, le calcul que nous avons mené vaut également pour Λ_i , puisque le point critique $(\lambda^*, \mu^*, \nu^*)$ reste à l'intérieur du domaine $\{\lambda + |\mu| < 1/2\}$, sur lequel les deux fonctions Λ_p et Λ_i coïncident. Nous avons donc, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\Lambda_p^*(x, y, z) = \Lambda_i^*(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[x-1-\ln x - \ln \left(1 - \frac{y}{x} \right) - \ln \left(1 + \frac{y-z^2}{x-z^2} \right) \right] & \text{si } (x, y, z) \in \Omega, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.3 Principe de grandes déviations

Nous souhaitons maintenant utiliser le théorème de Gärtner-Ellis, dont nous rappelons ici l'énoncé, en reprenant essentiellement la formulation du théorème 2.3.6 de [DZ10].

Théorème 14 (Gärtner-Ellis). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi ν_n . Supposons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, la limite*

$$\Lambda(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \nu_n \left(e^{n\langle \lambda, X_n \rangle} \right)$$

existe dans $(-\infty, +\infty]$. Supposons également que l'origine appartient à l'intérieur du domaine

$$\mathcal{D}_\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R}^d : \Lambda(\lambda) < +\infty \}.$$

Notons Λ^ la transformée de Fenchel-Legendre de Λ , définie par*

$$\Lambda^* : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left(\langle \lambda, x \rangle - \Lambda(\lambda) \right).$$

Alors nous avons, pour tout fermé F ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu_n(F)}{n} \leq -\inf_F \Lambda^*,$$

et pour tout ouvert O ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu_n(O)}{n} \geq - \inf_{O \cap \mathcal{G}} \Lambda^*,$$

où

$$\mathcal{G} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \exists \lambda \in \mathcal{D}_\Lambda^\circ \quad \forall y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\} \quad \langle \lambda, x \rangle - \Lambda^*(x) > \langle \lambda, y \rangle - \Lambda^*(y) \right\}.$$

Si, de plus, Λ est semi-continue inférieurement, différentiable sur $\mathcal{D}_\Lambda^\circ$ et si $|\nabla \Lambda(\lambda_n)| \rightarrow \infty$ pour toute suite (λ_n) de $\mathcal{D}_\Lambda^\circ$ qui converge vers un point du bord de $\mathcal{D}_\Lambda^\circ$, alors la suite (ν_n) satisfait un principe de grandes déviations de bonne fonction de taux Λ^* .

Pour les entiers impairs, nous pouvons appliquer le dernier point du théorème, puisque la fonction Λ_i est bien semi-continue inférieurement, différentiable sur $\{\lambda + |\mu| < 1/2\}$ et le gradient de Λ_i diverge bien au bord du domaine. En revanche, pour les entiers pairs, il y a une petite difficulté due au fait que la fonction Λ_p n'est pas semi-continue inférieurement. Mais, la fonction Λ_p^* étant strictement convexe, l'ensemble noté $\mathcal{G}$ dans l'énoncé du théorème vaut $\mathcal{G} = \Omega$. Pour tout ouvert O , nous avons donc

$$\inf_{O \cap \mathcal{G}} \Lambda_p^* = \inf_O \Lambda_p^*.$$

Ainsi, nous obtenons bien un principe de grandes déviations de bonne fonction de taux $\Lambda_p^* = \Lambda_i^*$ à la fois pour les entiers pairs et les entiers impairs, ce qui équivaut à un principe de grandes déviations pour tous les entiers. Pour en déduire un principe de grandes déviations dans notre modèle modifié $\hat{\mu}_n$, nous utilisons une version simplifiée du corollaire B.8 de [Gor15], qui découle du lemme de Varadhan. Un espace topologique $\mathcal{X}$ est dit séparé si, pour tous $x, y \in \mathcal{X}$ distincts, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $y \in V$. Un espace topologique $\mathcal{X}$ est dit régulier s'il est séparé et si, pour tout fermé F de $\mathcal{X}$ et pour tout $x \in \mathcal{X} \setminus F$, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $F \subset U$ et $x \in V$.

Lemme 2 (Cas particulier du corollaire B.8 dans [Gor15]). *Soit $\mathcal{X}$ un espace topologique régulier muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Soit $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathcal{X}$ qui satisfait le principe de grandes déviations de bonne fonction de taux I . Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\hat{\nu}_n$ la mesure de probabilité sur $\mathcal{X}$ de densité*

$$x \mapsto e^{nf(x)} \left(\int_{\mathcal{X}} e^{nf(y)} d\nu_n(y) \right)^{-1}$$

par rapport à ν_n . Alors $(\hat{\nu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit un principe de grandes déviations de bonne fonction de taux

$$J = I - f - \inf_{\mathcal{X}} (I - f).$$

Rappelons que notre modèle $\hat{\mu}_n$ est défini par

$$d\hat{\mu}_n = \frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{nH_n}{2T_n} \right) d\mu_n.$$

Notons ν_n la loi du triplet

$$\left(\frac{T_n}{n}, \frac{H_n}{n}, \frac{S_n}{n} \right)$$

sous μ_n , et notons $\hat{\nu}_n$ la loi du même triplet sous $\hat{\mu}_n$. Rappelons que nous avons $\nu_n(\Omega) = 1$. Définissant la fonction

$$f : (x, y, z) \in \Omega \mapsto \frac{y}{2x},$$

qui est bien continue et bornée sur Ω , la loi $\hat{\nu}_n$ a une densité

$$x \in \Omega \mapsto e^{nf(x)} \left(\int_{\Omega} e^{nf(y)} d\nu_n(y) \right)^{-1}$$

par rapport à la mesure ν_n . Nous pouvons donc appliquer le lemme 2 et en déduire que, sous $\hat{\mu}_n$, le triplet

$$\left(\frac{T_n}{n}, \frac{H_n}{n}, \frac{S_n}{n} \right)$$

satisfait un principe de grandes déviations de fonction de taux

$$J : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{cases} I(x, y, z) - \inf_{\Omega} I & \text{si } (x, y, z) \in \Omega, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.12)$$

où

$$I(x, y, z) = \Lambda_p^*(x, y, z) - \frac{y}{2x} = \frac{1}{2} \left[x - 1 - \ln x - \ln \left(1 - \frac{y}{x} \right) - \ln \left(1 + \frac{y - z^2}{x - z^2} \right) - \frac{y}{x} \right].$$

Nous recherchons donc l'infimum de I sur Ω . Pour tout $(x, y, z) \in \Omega$, nous avons

$$\frac{\partial I}{\partial z}(x, y, z) = \frac{4z}{x + y - 2z^2} - \frac{2z}{x - z^2} = \frac{2(x - y)z}{(x - z^2)(x + y - 2z^2)},$$

qui est du signe de z puisque, par définition du domaine Ω , nous avons $x > y$, $x > z^2$ et $x + y > 2z^2$. Ainsi, pour x et y fixés, la fonction $z \mapsto I(x, y, z)$ est minimale en $z = 0$. Nous en déduisons que

$$\inf_{\Omega} I = \inf_{|y| < x} I(x, y, 0).$$

Or, pour $x > 0$ et $y \in (-x, x)$, nous avons

$$\frac{\partial I}{\partial y}(x, y, 0) = \frac{1}{x - y} - \frac{1}{x + y} - \frac{1}{x} = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{x(x + y)(x - y)} = \frac{[y - (\sqrt{2} - 1)x][y + (\sqrt{2} + 1)x]}{x(x + y)(x - y)}.$$

qui est du signe de $y - (\sqrt{2} - 1)x$ puisque $y + (\sqrt{2} + 1)x > x\sqrt{2} > 0$. Ainsi, pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $(y, z) \mapsto I(x, y, z)$ est minimale en $y = (\sqrt{2} - 1)x$ et $z = 0$. Nous avons alors, pour tout $x > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, (\sqrt{2} - 1)x, 0) = 1 - \frac{1}{x},$$

ce qui montre finalement que

$$\inf_{\Omega} I = I(1, \sqrt{2} - 1, 0) = -\ln(2 - \sqrt{2}) - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\sqrt{2} + 1}{2} = -\ln 2 - \ln(\sqrt{2} - 1) - \frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

En remplaçant dans (3.12), nous obtenons donc bien le résultat annoncé par le théorème 12. De plus, comme ce point est le seul point critique de J , et étant donné que $J(x, y, z) \rightarrow +\infty$ aux bords du domaine Ω , nous en déduisons que pour tout voisinage ouvert V de $(1, \sqrt{2} - 1, 0)$, nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \hat{\nu}_n(\mathbb{R}^3 \setminus V)}{n} \leq - \inf_{\mathbb{R}^3 \setminus V} J < 0,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\nu}_n(\mathbb{R}^3 \setminus V) = 0,$$

ce qui démontre la convergence en probabilité annoncée dans le théorème 13. Pour aller un peu plus loin, nous pouvons calculer la Hessienne de J en son minimum, qui vaut

$$\text{Hess } J(1, \sqrt{2} - 1, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Le dernier coefficient de cette matrice nous permet donc de deviner le résultat du théorème 4, à savoir que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2} - 1}\right) = \mathcal{N}(0, \sqrt{2} + 1).$$

La preuve de cette convergence en loi est l'objet de la partie 3 qui suit.

2 Quelques lemmes techniques

Nous rassemblons ici plusieurs résultats préliminaires qui nous seront utiles dans les parties suivantes.

2.1 Comportement de la température

Comme nous l'avons vu dans le théorème 13, dans le cas $d_n = 1$ nous avons la convergence en probabilité

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n]{n \rightarrow \infty} 1.$$

Mais nous pouvons être bien plus précis : en effet, comme le montre le lemme ci-dessous, la température a le même comportement dans notre modèle $\hat{\mu}_n$ que dans le cas de variables indépendantes, et ce quelle que soit la portée d'interaction d_n .

Lemme 3. *Sous $\hat{\mu}_n$, nous avons la convergence en loi*

$$\frac{T_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2).$$

Démonstration. Si $Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes (c'est-à-dire distribuées suivant μ_n), alors nous allons montrer que les variables

$$T_n = Y_1^2 + \dots + Y_n^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{Y_1^2}{T_n}, \dots, \frac{Y_n^2}{T_n} \right)$$

sont indépendantes. Soient donc $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et bornées. Posons

$$I_n = \mu_n \left[g(T_n) h \left(\frac{Y_1^2}{T_n}, \dots, \frac{Y_n^2}{T_n} \right) \right].$$

Nous écrivons, en notant $T_n = y_1^2 + \dots + y_n^2$,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} dy_1 \dots dy_n g(T_n) h \left(\frac{y_1^2}{T_n}, \dots, \frac{y_n^2}{T_n} \right) e^{-T_n/2} \\ &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{n/2} \int_{(0, \infty)^n} dy_1 \dots dy_n g(T_n) h \left(\frac{y_1^2}{T_n}, \dots, \frac{y_n^2}{T_n} \right) e^{-T_n/2}. \end{aligned}$$

Nous effectuons pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ le changement de variable $z_i = y_i^2$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{(0, \infty)^n} \frac{dz_1 \dots dz_n}{\sqrt{z_1} \dots \sqrt{z_n}} g(z_1 + \dots + z_n) h \left(\frac{z_1}{z_1 + \dots + z_n}, \dots, \frac{z_n}{z_1 + \dots + z_n} \right) \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{z_1 + \dots + z_n}{2} \right). \end{aligned}$$

Nous posons ensuite $z_n = t - z_1 - \dots - z_{n-1}$, pour obtenir

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{(0, \infty)^{n-1}} \frac{dz_1 \dots dz_{n-1}}{\sqrt{z_1} \dots \sqrt{z_{n-1}}} \int_0^{+\infty} dt \frac{\mathbb{1}_{z_1 + \dots + z_{n-1} < t}}{\sqrt{t - z_1 - \dots - z_{n-1}}} g(t) \\ &\quad \times h \left(\frac{z_1}{t}, \dots, \frac{z_{n-1}}{t}, 1 - \frac{z_1 + \dots + z_{n-1}}{t} \right) e^{-t/2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors permuter les deux intégrales en vertu du théorème de Fubini, puisque la fonction

$$(z_1, \dots, z_{n-1}, t) \in (0, \infty)^n \mapsto \frac{\mathbb{1}_{z_1 + \dots + z_{n-1} < t} e^{-t/2}}{\sqrt{z_1} \dots \sqrt{z_{n-1}} \sqrt{t - z_1 - \dots - z_{n-1}}}$$

est intégrable. Nous obtenons alors

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^{+\infty} dt g(t) e^{-t/2} \int_{(0, \infty)^{n-1}} \frac{\mathbb{1}_{z_1 + \dots + z_{n-1} < t} dz_1 \dots dz_{n-1}}{\sqrt{z_1} \dots \sqrt{z_{n-1}} \sqrt{t - z_1 - \dots - z_{n-1}}} \\ \times h\left(\frac{z_1}{t}, \dots, \frac{z_{n-1}}{t}, 1 - \frac{z_1 + \dots + z_{n-1}}{t}\right).$$

Enfin, avec le changement de variable $z_i = tu_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$, il vient

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^{+\infty} dt g(t) e^{-t/2} t^{(n-2)/2} \\ \times \int_{(0, \infty)^{n-1}} \frac{\mathbb{1}_{u_1 + \dots + u_{n-1} < 1} du_1 \dots du_{n-1}}{\sqrt{u_1} \dots \sqrt{u_{n-1}} \sqrt{1 - u_1 - \dots - u_{n-1}}} h(u_1, \dots, u_{n-1}, 1 - u_1 - \dots - u_{n-1}).$$

En appliquant le calcul précédent d'une part à la fonction constante $g \equiv 1$ et d'autre part à la fonction constante $h \equiv 1$, nous en déduisons que

$$I_n = \mu_n[g(T_n)] \mu_n\left[h\left(\frac{Y_1^2}{T_n}, \dots, \frac{Y_n^2}{T_n}\right)\right],$$

ce qui démontre bien que les variables T_n et

$$\left(\frac{Y_1^2}{T_n}, \dots, \frac{Y_n^2}{T_n}\right)$$

sont indépendantes. Nous en déduisons que sous la loi μ_n , la variable T_n est indépendante de la variable

$$\exp\left(\frac{nH_n}{2T_n}\right) = \exp\left(\frac{n}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j^n \frac{Y_j^2}{T_n}\right).$$

Nous avons donc, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n[g(T_n)] &= \frac{1}{Z_n} \mu_n\left[\exp\left(\frac{nH_n}{2T_n}\right) g(T_n)\right] \\ &= \frac{1}{Z_n} \mu_n\left[\exp\left(\frac{nH_n}{2T_n}\right)\right] \mu_n[g(T_n)] = \mu_n[g(T_n)], \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la variable T_n a même loi sous $\hat{\mu}_n$ que sous μ_n . Or, sous la loi μ_n , les variables Y_j sont par définition des gaussiennes centrées réduites indépendantes, et donc le théorème central limite nous assure que

$$\frac{T_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{T_n - n\mu_n(Y_1^2)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

avec

$$\sigma^2 = \mu_n(Y_1^4) - \mu_n(Y_1^2)^2 = 3 - 1 = 2,$$

d'où la convergence en loi annoncée. □

2.2 Étude du spectre

Rappelons que les valeurs propres du Hamiltonien son données par la formule (2.7), qui nous donne

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \alpha_j^n = \frac{1}{d_n} \sum_{m=1}^{d_n} \cos\left(\frac{2jm\pi}{n}\right).$$

La valeur propre α_n^n vaut toujours 1 quelle que soit la portée d'interaction et, comme $S_n = \sqrt{n}Y_n$, nous pouvons donc écrire

$$H_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j^n Y_j^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^n Y_j^2 + Y_n^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^n Y_j^2 + \frac{S_n^2}{n}.$$

Le terme S_n^2/n correspond précisément au Hamiltonien dans le cas $2d_n = n - 1$, c'est-à-dire au modèle en champ moyen. Le comportement de notre modèle résulte donc de la compétition entre ces deux termes, et nous allons montrer que, dans le régime $d_n \gg n^{3/4}$, le second terme l'emporte pour donner un comportement identique au modèle en champ moyen, tandis que dans le régime $d_n \sim \lambda n^{3/4}$, les deux termes deviennent du même ordre de grandeur, ce qui aboutit à une loi limite différente. Ainsi, toute la question réside dans le contrôle de ces $n - 1$ premières valeurs propres. Nous nous intéressons donc notamment aux extrema du spectre (en excluant cette valeur propre particulière $\alpha_n^n = 1$), et nous notons

$$M_n = \max \left\{ \alpha_j^n : 1 \leq j \leq n-1 \right\} \quad \text{et} \quad m_n = \max \left\{ -\alpha_j^n : 1 \leq j \leq n-1 \right\}. \quad (3.14)$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \alpha_j^n &= \frac{1}{d_n} \Re \sum_{m=1}^{d_n} e^{2ijm\pi/n} \\ &= \frac{1}{d_n} \Re \left(e^{2ij\pi/n} \frac{e^{2ijd_n\pi/n} - 1}{e^{2ij\pi/n} - 1} \right) \\ &= \frac{\cos(j(d_n+1)\pi/n) \sin(jd_n\pi/n)}{d_n \sin(j\pi/n)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$= \frac{1}{2d_n} \left(\frac{\sin((2d_n+1)j\pi/n)}{\sin(j\pi/n)} - 1 \right). \quad (3.16)$$

Remarquons que les valeurs propres sont symétriques, c'est-à-dire que pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$, nous avons $\alpha_{n-j}^n = \alpha_j^n$. Par ailleurs, il découle de la formule (3.15) que

$$\forall j \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} \quad |\alpha_j^n| \leq \frac{1}{d_n \sin(j\pi/n)} \leq \frac{n}{2d_n j}. \quad (3.17)$$

Nous pouvons en déduire que

$$\sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| \leq 2 \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{2d_n j} = O\left(\frac{n \ln n}{d_n}\right), \quad (3.18)$$

et aussi, de la même façon,

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j^n)^2 = O\left(\frac{n^2}{d_n^2}\right). \quad (3.19)$$

Cette dernière inégalité ne donne pas le bon ordre de grandeur, comme nous pouvons le voir en faisant le calcul exact avec la trace du carré de la forme quadratique H_n , mais cette majoration nous suffira (d'ailleurs, nous ne l'utilisons que dans la preuve du lemme 19).

2.3 Les valeurs propres dans le régime du théorème 5

Nous démontrons maintenant quelques propriétés de ces valeurs propres dans le régime où

$$2d_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda n \quad \text{avec} \quad \lambda \in (0, 1). \quad (3.20)$$

Lemme 4. Dans le régime donné par (3.20), pour tout $j \geq 1$ fixé, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^n = \text{sinc}(j\lambda\pi),$$

où sinc désigne la fonction $x \mapsto \sin x/x$. De plus, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall n \geq 3 \quad \forall j \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\} \quad |\alpha_j^n - \text{sinc}(j\lambda\pi)| \leq \frac{Kj}{n} + K \left| \frac{2d_n}{n} - \lambda \right|.$$

Démonstration. Nous écrivons, avec un O valable de manière uniforme pour tous les $j \leq \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{j\pi}{n} \left[1 + O\left(\frac{j^2}{n^2}\right) \right].$$

Or la fonction $x \mapsto \sin x/x$ est minorée par une constante strictement positive sur $[0, \pi/2]$, donc nous pouvons prendre l'inverse de ce développement limité, ce qui nous donne

$$\frac{1}{\sin(j\pi/n)} = \frac{n}{j\pi} \left[1 + O\left(\frac{j^2}{n^2}\right) \right].$$

Nous avons aussi, toujours avec un O uniforme pour tous les $j \leq \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\sin\left(\frac{(2d_n+1)j\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{2d_n j\pi}{n}\right) + O\left(\frac{j}{n}\right).$$

En utilisant la formule (3.16) pour α_j^n , nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \alpha_j^n &= \frac{\sin((2d_n+1)j\pi/n)}{2d_n \sin(j\pi/n)} - \frac{1}{2d_n} \\ &= \frac{\sin(2d_n j\pi/n) + O(j/n)}{2d_n j\pi/n} \left[1 + O\left(\frac{j^2}{n^2}\right) \right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \text{sinc}\left(\frac{2d_n j\pi}{n}\right) + O\left(\frac{j}{n}\right). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Nous poursuivons le développement en écrivant, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\text{sinc}\left(\frac{2d_n j\pi}{n}\right) - \text{sinc}(j\lambda\pi) = \left(\frac{2d_n}{n} - \lambda\right) j\pi \text{sinc}'(\tau_{n,j}),$$

avec

$$\tau_{n,j} \in \left[\frac{2d_n j\pi}{n}, j\lambda\pi \right] \cup \left[j\lambda\pi, \frac{2d_n j\pi}{n} \right].$$

Or nous avons, pour tout $x > 0$,

$$|x \text{sinc}'(x)| = \left| x \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) \right| = |\cos x - \text{sinc } x| \leq 2.$$

Nous avons donc, uniformément par rapport à j et n ,

$$|j\pi \text{sinc}'(\tau_{n,j})| \leq \frac{2j\pi}{\tau_{n,j}} = O(1),$$

et donc

$$\text{sinc}\left(\frac{2d_n j\pi}{n}\right) - \text{sinc}(j\lambda\pi) = O\left(\frac{2d_n}{n} - \lambda\right). \tag{3.22}$$

En combinant (3.21) et (3.22), nous obtenons donc

$$\alpha_j^n - \text{sinc}(j\lambda\pi) = O\left(\frac{j}{n}\right) + O\left(\frac{2d_n}{n} - \lambda\right),$$

et ce uniformément pour tous les $j \leq \lfloor n/2 \rfloor$, ce qui démontre le lemme. $\square$

Concernant les extrema du spectre définis par (3.14), nous démontrons :

Lemme 5. *Dans le régime (3.20), la plus grande et la plus petite valeur propre vérifient :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \text{sinc}(\lambda\pi) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = C_\lambda,$$

où la constante C_λ est donnée par

$$C_\lambda = -\min_{j \geq 1} \text{sinc}(j\lambda\pi). \quad (3.23)$$

Démonstration. Tout d'abord, la symétrie des valeurs propres entraîne que

$$M_n = \max \{ \alpha_1^n, \dots, \alpha_{\lfloor n/2 \rfloor}^n \} \quad \text{et} \quad m_n = -\min \{ \alpha_1^n, \dots, \alpha_{\lfloor n/2 \rfloor}^n \}.$$

Comme $\lambda \in (0, 1)$, nous avons $\sin(\lambda\pi) > 0$ et $C_\lambda > 0$, ce qui nous permet de définir

$$j_0 = \left\lceil \frac{2\pi}{\sin(\lambda\pi)} \right\rceil \vee \left\lceil \frac{2}{\lambda C_\lambda} \right\rceil.$$

Soit $n \geq 2j_0$. Pour tout $j \in \{j_0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, la majoration (3.17) nous apprend que

$$|\alpha_j^n| \leq \frac{n}{2d_n j} \leq \frac{n}{2d_n j_0}.$$

Or, quand n tend vers l'infini, nous avons

$$\frac{n}{2d_n j_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda j_0}.$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang,

$$\frac{n}{2d_n j_0} \leq \frac{2}{\lambda j_0},$$

ce qui implique que

$$\max_{j_0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor} |\alpha_j^n| \leq \frac{2}{\lambda j_0}.$$

Nous avons donc, d'après la limite donnée par le lemme 4,

$$\begin{aligned} M_n &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq j_0} \alpha_j^n \right) \vee \frac{2}{\lambda j_0} \leq \left(\max_{1 \leq j \leq j_0} \alpha_j^n \right) \vee \text{sinc}(\lambda\pi) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\max_{1 \leq j \leq j_0} \text{sinc}(j\lambda\pi) \right) \vee \text{sinc}(\lambda\pi) = \text{sinc}(\lambda\pi). \end{aligned}$$

Or nous avons aussi

$$M_n \geq \alpha_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{sinc}(\lambda\pi),$$

et donc par encadrement, nous avons bien $M_n \rightarrow \text{sinc}(\lambda\pi)$. De même, nous avons

$$m_n \leq \left(-\min_{1 \leq j \leq j_0} \alpha_j^n \right) \vee \frac{2}{\lambda j_0} \leq \left(-\min_{1 \leq j \leq j_0} \alpha_j^n \right) \vee C_\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(-\min_{1 \leq j \leq j_0} \text{sinc}(j\lambda\pi) \right) \vee C_\lambda \leq C_\lambda.$$

Comme $\text{sinc}(j\lambda\pi) \rightarrow 0$ quand j tend vers l'infini, il existe $j_1 \geq 1$ tel que $C_\lambda = -\text{sinc}(j_1\lambda\pi)$, ce qui nous permet d'écrire, pour $n > j_1$,

$$m_n \geq -\alpha_{j_1}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\text{sinc}(j_1\lambda\pi) = C_\lambda,$$

et donc nous avons bien $m_n \rightarrow C_\lambda$. $\square$

Nous démontrons ensuite une inégalité qui nous sera utile pour des questions d'intégrabilité :

Lemme 6. *Dans le régime (3.20), il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\forall n \geq 3 \quad \forall a \in (0, n] \quad \forall \varepsilon \in \{-1, 1\} \quad \left| \left\{ j \in \{1, \dots, n-1\} : \varepsilon \alpha_j^n \geq \frac{1}{a} \right\} \right| \geq Ka - 2.$$

Démonstration. Soient $n \geq 3$, $a \in (0, n]$ et $\varepsilon = (-1)^\eta$, avec $\eta \in \{0, 1\}$. Notons, pour $k \geq 1$,

$$j_{n,k} = \left\lceil \frac{4nk + 2n\eta + n - (2d_n + 1)}{2(2d_n + 1)} \right\rceil.$$

Comme $4n > 2(2d_n + 1)$, la suite $(j_{n,k})_{k \geq 1}$ est strictement croissante. Pour tout $k \geq 1$, nous avons

$$(2k + \eta)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{(2d_n + 1)\pi}{2n} \leq \frac{(2d_n + 1)j_{n,k}\pi}{n} \leq (2k + \eta)\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{(2d_n + 1)\pi}{2n},$$

ce qui entraîne que

$$\varepsilon \sin\left(\frac{(2d_n + 1)j_k\pi}{n}\right) \geq \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(2d_n + 1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{(2d_n + 1)\pi}{2n}\right). \quad (3.24)$$

Posons

$$K_n = \left\lfloor \frac{2d_n a}{2(n + 2d_n)\pi} \cos\left(\frac{(2d_n + 1)\pi}{2n}\right) - \frac{1}{4} - \frac{2d_n + 1}{4n} - \frac{\eta}{2} \right\rfloor.$$

Soit $k \in \{1, \dots, K_n\}$. Nous avons

$$\frac{n(2k + \eta)}{2d_n + 1} \leq \frac{an}{(n + 2d_n)\pi} \cos\left(\frac{(2d_n + 1)\pi}{2n}\right) - \frac{n}{2(2d_n + 1)} - \frac{1}{2},$$

et donc

$$\begin{aligned} j_{n,k} &\leq \frac{an}{(n + 2d_n)\pi} \cos\left(\frac{(2d_n + 1)\pi}{2n}\right) - \frac{n}{2(2d_n + 1)} - \frac{1}{2} + \frac{n}{2(2d_n + 1)} - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{an}{(n + 2d_n)\pi} \cos\left(\frac{(2d_n + 1)\pi}{2n}\right). \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$2d_n \sin\left(\frac{j_{n,k}\pi}{n}\right) \leq 2d_n \frac{j_{n,k}\pi}{n} \leq \frac{2d_n a}{n + 2d_n} \cos\left(\frac{(2d_n + 1)\pi}{2n}\right).$$

En combinant cela avec (3.24), et en remarquant que $j_{n,k} < n$, il vient

$$\forall k \in \{1, \dots, K_n\} \quad \left| \alpha_{j_{n,k}}^n \right| \geq \frac{n + 2d_n}{2d_n a} - \frac{1}{2d_n} = \frac{1}{2d_n} \left(\frac{n}{a} - 1 \right) + \frac{1}{a} \geq \frac{1}{a}.$$

Nous avons donc

$$\left| \left\{ j \in \{1, \dots, n-1\} : |\alpha_j^n| \geq \frac{1}{a} \right\} \right| \geq K_n \geq \frac{d_n a}{(n + 2d_n)\pi} \cos\left(\frac{(2d_n + 1)\pi}{2n}\right) - 2.$$

Remarquons maintenant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{(n + 2d_n)\pi} \cos\left(\frac{(2d_n + 1)\pi}{2n}\right) = \frac{\lambda}{2(1 + \lambda)\pi} \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right),$$

et donc nous avons, à partir d'un certain rang n_0 ,

$$\frac{d_n}{(n + 2d_n)\pi} \cos\left(\frac{(2d_n + 1)\pi}{2n}\right) \geq \frac{\lambda}{4(1 + \lambda)\pi} \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right).$$

Nous avons donc, pour tout $n \geq n_0$, pour tout $a \in (0, n]$ et pour tout signe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,

$$\left| \left\{ j \in \{1, \dots, n-1\} : \varepsilon \alpha_j^n \geq \frac{1}{a} \right\} \right| \geq \frac{\lambda a}{4(1+\lambda)\pi} \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) - 2.$$

Le résultat du lemme est donc vérifié pour

$$K = \frac{\lambda}{4(1+\lambda)\pi} \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \wedge \frac{2}{n_0},$$

car nous avons alors, pour $0 < a \leq n \leq n_0$,

$$Ka - 2 \leq Kn_0 - 2 \leq 0.$$

Nous obtenons donc bien l'inégalité voulue, avec une constante K qui ne dépend pas de a . $\square$

Nous énonçons maintenant un autre petit résultat qui nous sera utile en section 4.2 :

Lemme 7. *La série*

$$\sum_{j \geq 1} \text{sinc}(j\lambda\pi)$$

converge et nous avons, quand $j_0 \rightarrow \infty$,

$$\sum_{j=j_0}^{+\infty} \text{sinc}(j\lambda\pi) = O\left(\frac{1}{j_0}\right).$$

Démonstration. Prenons $1 \leq j_0 \leq j_1$. Notant, pour tout $n \geq 0$,

$$S_n = \sum_{j=0}^n \text{sinc}(j\lambda\pi) = \Im \left(\frac{e^{i(n+1)\lambda\pi} - 1}{e^{i\lambda\pi} - 1} \right) = \frac{\sin((n+1)\lambda\pi/2) \sin(n\lambda\pi/2)}{\sin(\lambda\pi/2)},$$

nous remarquons que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Nous pouvons donc faire la transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0}^{j_1} \text{sinc}(j\lambda\pi) &= \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{S_j - S_{j-1}}{j\lambda\pi} = \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{S_j}{j\lambda\pi} - \sum_{j=j_0-1}^{j_1-1} \frac{S_j}{(j+1)\lambda\pi} \\ &= \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{S_j}{j(j+1)\lambda\pi} - \frac{S_{j_0-1}}{j_0\lambda\pi} + \frac{S_{j_1}}{(j_1+1)\lambda\pi}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, nous avons, quand $j \rightarrow \infty$,

$$\frac{S_j}{j(j+1)\lambda\pi} = O\left(\frac{1}{j^2}\right)$$

donc la série

$$\sum_{j \geq j_0} \frac{S_j}{j(j+1)\lambda\pi}$$

converge. Ainsi, en faisant tendre j_1 vers l'infini dans (3.25), il vient

$$\sum_{j=j_0}^{+\infty} \text{sinc}(j\lambda\pi) = \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{S_j}{j(j+1)\lambda\pi} - \frac{S_{j_0-1}}{j_0\lambda\pi} = O\left(\sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)}\right) + O\left(\frac{1}{j_0}\right) = O\left(\frac{1}{j_0}\right),$$

ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

2.4 Les valeurs propres dans le régime intermédiaire

Nous étudions à présent le comportement des valeurs propres dans le régime où $1 \ll d_n \ll n$. Nous démontrons alors :

Lemme 8. *Supposons que la portée d'interaction vérifie $1 \ll d_n \ll n$. Alors pour tout $j \geq 1$ fixé, nous avons, quand $n \rightarrow \infty$,*

$$1 - \alpha_j^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2d_n^2 j^2 \pi^2}{3n^2}. \quad (3.26)$$

Si de plus $d_n \gg n^{2/3}$, alors il existe une constante $K > 0$ telle que, pour $n \geq 3$ et $1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\left| \frac{1}{1 - \alpha_j^n} - \frac{3n^2}{2d_n^2 j^2 \pi^2} \right| \leq K \quad (3.27)$$

et

$$\left| \frac{\alpha_j^n}{1 - \alpha_j^n} - \frac{3n^2}{2d_n^2 j^2 \pi^2} \right| \leq K. \quad (3.28)$$

Démonstration. Supposons que $1 \ll d_n \ll n$. Soit $j \geq 1$ et soit $n \geq 2j$. Nous pouvons écrire, avec un O uniforme par rapport à j et n ,

$$\sin\left(\frac{(2d_n + 1)j\pi}{n}\right) = \frac{(2d_n + 1)j\pi}{n} \left[1 - \frac{(2d_n + 1)^2 j^2 \pi^2}{6n^2} + O\left(\frac{d_n^4 j^4}{n^4}\right) \right].$$

Nous avons par ailleurs, comme $j\pi/n \leq \pi/2$,

$$\frac{1}{\sin(j\pi/n)} = \frac{n}{j\pi} \left[1 + O\left(\frac{j^2}{n^2}\right) \right].$$

En reprenant la formule (3.16) pour α_j^n , nous obtenons donc, pour $1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\begin{aligned} \alpha_j^n &= \frac{\sin((2d_n + 1)j\pi/n)}{2d_n \sin(j\pi/n)} - \frac{1}{2d_n} \\ &= \frac{(2d_n + 1)j\pi/n}{2d_n j\pi/n} \left[1 - \frac{(2d_n + 1)^2 j^2 \pi^2}{6n^2} + O\left(\frac{d_n^4 j^4}{n^4}\right) \right] \times \left[1 + O\left(\frac{j^2}{n^2}\right) \right] - \frac{1}{2d_n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2d_n}\right) \left[1 - \frac{(2d_n + 1)^2 j^2 \pi^2}{6n^2} + O\left(\frac{j^2}{n^2}\right) + O\left(\frac{d_n^4 j^4}{n^4}\right) \right] - \frac{1}{2d_n} \\ &= 1 - \frac{(2d_n + 1)^2 j^2 \pi^2}{6n^2} + O\left(\frac{d_n j^2}{n^2}\right) + O\left(\frac{d_n^4 j^4}{n^4}\right) \\ &= 1 - \frac{2d_n^2 j^2 \pi^2}{3n^2} + O\left(\frac{d_n j^2}{n^2}\right) + O\left(\frac{d_n^4 j^4}{n^4}\right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nous en déduisons que

$$1 - \alpha_j^n = \frac{2d_n^2 j^2 \pi^2}{3n^2} \left[1 + O\left(\frac{1}{d_n}\right) + O\left(\frac{d_n^2 j^2}{n^2}\right) \right],$$

avec des O uniformes pour tous les $j \leq \lfloor n/2 \rfloor$. À j fixé, nous obtenons bien l'équivalent (3.26), puisque la portée d'interaction vérifie $1 \ll d_n \ll n$. Supposons maintenant que $n^{2/3} \ll d_n \ll n$. Nous avons alors

$$1 - \alpha_j^n = \frac{2d_n^2 j^2 \pi^2}{3n^2} \left[1 + O\left(\frac{d_n^2 j^2}{n^2}\right) \right]. \quad (3.30)$$

Afin de montrer (3.27), nous souhaitons prendre l'inverse de ce développement. Pour cela, nous prenons $j \leq n/(2d_n + 1)$, et nous allons vérifier que la quantité entre crochets dans (3.30) est minorée par une constante strictement positive. Nous repartons donc de la formule (3.16) selon laquelle

$$\alpha_j^n = \frac{\sin((2d_n + 1)j\pi/n)}{2d_n \sin(j\pi/n)} - \frac{1}{2d_n}. \quad (3.31)$$

Une étude classique de fonctions nous permet de voir que pour tout $x \geq 0$,

$$x \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \leq \sin x \leq x \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right). \quad (3.32)$$

Nous en déduisons que

$$\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) \geq \frac{j\pi}{n} \left(1 - \frac{j^2\pi^2}{6n^2}\right).$$

Or nous avons, pour tout $j \leq n/(2d_n + 1)$,

$$\frac{j^2\pi^2}{6n^2} \leq \frac{\pi^2}{6(2d_n + 1)^2} \leq \frac{1}{2}$$

à partir d'un certain rang, puisque $d_n \rightarrow \infty$. Nous en déduisons que

$$\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)^{-1} \leq \frac{n}{j\pi} \left(1 - \frac{j^2\pi^2}{6n^2}\right)^{-1} \leq \frac{n}{j\pi} \left(1 + \frac{j^2\pi^2}{3n^2}\right), \quad (3.33)$$

par convexité de la fonction $u \mapsto (1 - u)^{-1}$ sur $[0, 1/2]$. Nous utilisons maintenant l'autre côté de l'encadrement (3.32) pour écrire, pour $j \leq n/(2d_n + 1)$,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{(2d_n + 1)j\pi}{n}\right) &\leq \frac{(2d_n + 1)j\pi}{n} \left(1 - \frac{(2d_n + 1)^2 j^2 \pi^2}{6n^2} + \frac{(2d_n + 1)^4 j^4 \pi^4}{120n^4}\right) \\ &\leq \frac{(2d_n + 1)j\pi}{n} \left[1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{120}\right) \frac{(2d_n + 1)^2 j^2}{n^2}\right] \\ &\leq \frac{(2d_n + 1)j\pi}{n} \left(1 - \frac{(2d_n + 1)^2 j^2}{2n^2}\right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

En utilisant (3.33) et (3.34) dans notre formule (3.31), il vient

$$\begin{aligned} \alpha_j^n &\leq \frac{2d_n + 1}{2d_n} \left(1 + \frac{j^2\pi^2}{3n^2}\right) \left(1 - \frac{(2d_n + 1)^2 j^2}{2n^2}\right) - \frac{1}{d_n} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2d_n}\right) \left(1 + \frac{j^2\pi^2}{3n^2} - \frac{(2d_n + 1)^2 j^2}{2n^2}\right) - \frac{1}{d_n} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{2d_n}\right) \left(1 - \frac{2\pi^2}{3(2d_n + 1)^2}\right) \frac{(2d_n + 1)^2 j^2}{2n^2} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{2d_n}\right)^3 \left(1 - \frac{2\pi^2}{3(2d_n + 1)^2}\right) \frac{2d_n^2 j^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Comme $d_n \rightarrow \infty$, nous en déduisons qu'à partir d'un certain rang, pour tout $j \leq n/(2d_n + 1)$,

$$1 - \alpha_j^n \geq \frac{d_n^2 j^2}{n^2}.$$

Nous pouvons donc prendre l'inverse du développement (3.30), ce qui nous donne, avec un grand O uniforme pour les $j \leq n/(2d_n + 1)$,

$$\frac{1}{1 - \alpha_j^n} = \frac{3n^2}{2d_n^2 j^2 \pi^2} \left[1 + O\left(\frac{d_n^2 j^2}{n^2}\right)\right]. \quad (3.35)$$

En reprenant (3.29), nous avons également, pour $j \leq n/(2d_n + 1)$,

$$\alpha_j^n = 1 + O\left(\frac{d_n^2 j^2}{n^2}\right) + O\left(\frac{d_n^4 j^4}{n^4}\right) = 1 + O\left(\frac{d_n^2 j^2}{n^2}\right).$$

En combinant cela avec (3.35), nous obtenons

$$\frac{\alpha_j^n}{1 - \alpha_j^n} = \frac{3n^2}{2d_n^2 j^2 \pi^2} \left[1 + O\left(\frac{d_n^2 j^2}{n^2}\right) \right] = \frac{3n^2}{2d_n^2 j^2 \pi^2} + O(1), \quad (3.36)$$

avec un O uniforme pour tous les $n \geq 3$ et $1 \leq j \leq n/(2d_n + 1)$. Si en revanche j est tel que

$$\frac{n}{2d_n + 1} < j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad (3.37)$$

alors la formule (3.15) implique que

$$|\alpha_j^n| \leq \frac{1}{d_n \sin(j\pi/n)} \leq \frac{1}{d_n \sin(\pi/(2d_n + 1))} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\pi} < 1.$$

Nous avons donc, uniformément pour tous les indices j vérifiant (3.37),

$$\frac{1}{1 - \alpha_j^n} = O(1) = \frac{3n^2}{2d_n^2 j^2 \pi^2} + O(1). \quad (3.38)$$

Comme $|\alpha_j^n| \leq 1$ pour tout j , nous en déduisons que, uniformément pour tous les indices j vérifiant (3.37),

$$\frac{\alpha_j^n}{1 - \alpha_j^n} = O(1) = \frac{3n^2}{2d_n^2 j^2 \pi^2} + O(1). \quad (3.39)$$

Ainsi, en combinant (3.35) et (3.38), nous obtenons l'existence de $K > 0$ vérifiant (3.27). De même, la majoration (3.28) découle de (3.36) et (3.39). $\square$

Concernant les extrema du spectre, nous démontrons cette fois-ci :

Lemme 9. *Si $1 \ll d_n \ll n$, alors les valeurs propres extrémales vérifient :*

$$1 - M_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\pi^2 d_n^2}{3n^2} \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} m_n > 0.$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$u_n : t \in (0, \pi) \mapsto \frac{\sin t}{\sin(t/(2d_n + 1))}.$$

Cette fonction est dérivable et nous avons, pour tout $t \in (0, \pi)$,

$$u_n'(t) = \sin\left(\frac{t}{2d_n + 1}\right)^{-2} \left[\cos t \sin\left(\frac{t}{2d_n + 1}\right) - \frac{\sin t}{2d_n + 1} \cos\left(\frac{t}{2d_n + 1}\right) \right].$$

Nous en déduisons que pour tout $t \in (0, \pi)$,

$$u_n'(t) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cot t \leq \frac{1}{2d_n + 1} \cot\left(\frac{t}{2d_n + 1}\right).$$

Si $t \in [\pi/2, \pi)$, alors nous avons $\cot t \leq 0$ donc $u_n'(t) \leq 0$. Si $t \in (0, \pi/2)$, alors nous avons

$$u_n'(t) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tan t \geq (2d_n + 1) \tan\left(\frac{t}{2d_n + 1}\right),$$

ce qui est bien vérifié, par convexité de la fonction tangente sur $(0, \pi/2)$. Ainsi, la fonction u_n est décroissante sur $(0, \pi)$. Or, d'après la formule (3.16), nous avons, pour $1 \leq j < n/(2d_n + 1)$,

$$\alpha_j^n = \frac{1}{2d_n} \left[u_n \left(\frac{(2d_n + 1)j\pi}{n} \right) - 1 \right].$$

Par décroissance de la fonction u_n , nous en déduisons que $\alpha_j^n \leq \alpha_1^n$ pour tout $j < n/(2d_n + 1)$. De plus, il découle de la formule (3.15) que pour tout entier j ,

$$\frac{n}{2d_n + 1} \leq j \leq n - \frac{n}{2d_n + 1} \quad \Rightarrow \quad |\alpha_j^n| \leq \left[d_n \sin \left(\frac{\pi}{2d_n + 1} \right) \right]^{-1} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\pi} < 1.$$

Nous en déduisons qu'à partir d'un certain rang, $M_n = \alpha_1^n$, et donc l'équivalent de $1 - M_n$ découle du lemme 8. Intéressons-nous maintenant à la valeur propre minimale, et notons

$$j(n) = \left\lfloor \frac{3n}{2(2d_n + 1)} \right\rfloor.$$

Nous avons, selon la formule (3.16),

$$\alpha_{j(n)}^n = \frac{\sin((2d_n + 1)j(n)\pi/n)}{2d_n \sin(j(n)\pi/n)} - \frac{1}{2d_n} = \frac{\sin(3\pi/2) + o(1)}{2d_n(3\pi/(4d_n))(1 + o(1))} + o(1) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2} = -\frac{2}{3\pi},$$

d'où

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} m_n \geq \frac{2}{3\pi} > 0,$$

ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

Nous démontrons ensuite qu'il y a une proportion positive de valeurs propres positives ou négatives, c'est-à-dire :

Lemme 10. *Si $1 \ll d_n \ll n$, alors il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\forall n \geq 3 \quad \forall \varepsilon \in \{-1, 1\} \quad \left| \left\{ j \in \{1, \dots, n-1\} : \varepsilon \alpha_j^n \geq 0 \right\} \right| \geq Kn.$$

Démonstration. Soient $n \geq 3$ et $\varepsilon = (-1)^\eta$, avec $\eta \in \{0, 1\}$. Considérons

$$E = \bigcup_{1 \leq k \leq d_n - 1} E_k \quad \text{où} \quad E_k = \mathbb{N} \cap \left[\frac{(2k + \eta)n}{2d_n}, \frac{(2k + \eta + 1)n}{2(d_n + 1)} \right].$$

Nous avons $E \subset \{1, \dots, n-1\}$ et, si $j \in E_k$, alors nous avons

$$k\pi \leq \frac{j d_n \pi}{n} \leq k\pi + \pi,$$

d'où

$$(-1)^k \sin \left(\frac{j d_n \pi}{n} \right) \geq 0.$$

De même, nous avons pour tout $j \in E_k$,

$$k\pi + \frac{\eta\pi}{2} \leq \frac{j(d_n + 1)\pi}{n} \leq k\pi + \frac{\eta\pi}{2} + \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$(-1)^{k+\eta} \cos \left(\frac{j(d_n + 1)\pi}{n} \right) \geq 0.$$

D'après la formule (3.15), nous en déduisons que

$$\forall j \in E \quad \varepsilon \alpha_j^n = \frac{(-1)^{k+\eta} \cos(j(d_n+1)\pi/n) (-1)^k \sin(jd_n\pi/n)}{d_n \sin(j\pi/n)} \geq 0.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \{1, \dots, \lfloor d_n/4 \rfloor\}$ nous avons

$$\begin{aligned} |E_k| &\geq \frac{(2k+\eta+1)n}{2(d_n+1)} - \frac{(2k+\eta)n}{2d_n} - 2 \\ &= \frac{n}{2(d_n+1)} - \frac{\eta n}{2d_n(d_n+1)} - \frac{kn}{d_n(d_n+1)} - 2 \\ &\geq \frac{n}{4(d_n+1)} - \frac{n}{2d_n(d_n+1)} - 2. \end{aligned}$$

et donc

$$|E| \geq \left\lfloor \frac{d_n}{4} \right\rfloor \left(\frac{n}{4(d_n+1)} - \frac{n}{2d_n(d_n+1)} - 2 \right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{16},$$

ce qui démontre bien le résultat, avec par exemple $K = 1/32$. $\square$

Nous abordons maintenant une estimation qui nous sera utile en section 6.6 :

Lemme 11. *Si le paramètre d_n est tel que $d_n \gg n^{2/3}$, alors nous avons*

$$\sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - \alpha_j^n) = O\left(\frac{n \ln n}{d_n}\right).$$

Démonstration. Tout d'abord, par symétrie des valeurs propres, il suffit de montrer que

$$S_1 = O\left(\frac{n \ln n}{d_n}\right) \quad \text{et} \quad S_2 = O\left(\frac{n \ln n}{d_n}\right),$$

où

$$S_1 = \sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} \ln(1 - \alpha_j^n) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \ln(1 - \alpha_j^n).$$

Pour le premier terme, nous écrivons

$$|S_1| \leq \left\lfloor \frac{n}{d_n} \right\rfloor \left(|\ln(1 - M_n)| \vee (\ln 2) \right).$$

Or, d'après le lemme 9, nous avons

$$1 - M_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\pi^2 d_n^2}{3n^2},$$

d'où

$$S_1 = O\left(\frac{n \ln n}{d_n}\right). \tag{3.40}$$

Pour le second terme, nous utilisons l'inégalité (3.17) d'après laquelle

$$\forall j \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{d_n} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} \quad |\alpha_j^n| \leq \frac{n}{2d_n j} \leq \frac{1}{2}.$$

La fonction logarithme étant lipschitzienne sur $[1/2, 3/2]$, nous en déduisons que

$$S_2 = O\left(\sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n|\right) = O\left(\frac{n \ln n}{d_n}\right), \tag{3.41}$$

où nous avons utilisé la majoration (3.18). Nous obtenons donc bien le résultat annoncé en additionnant (3.40) et (3.41). $\square$

2.5 Inversion de Fourier

L'objectif de cette section est d'obtenir une formule intégrale exacte pour la densité de (T_n, H_n, S_n) dans notre modèle $\hat{\mu}_n$.

Lemme 12. *Supposons que le paramètre d_n est tel que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2d_n}{n} = \lambda \in [0, 1),$$

ce qui englobe tous les régimes que nous considérons ici. Alors à partir d'un certain rang n_I , sous la loi $\hat{\mu}_n$ de notre modèle, le triplet (T_n, H_n, S_n) admet pour densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$\begin{aligned} \hat{f}_n : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto & \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n \sqrt{n}} \exp\left(\frac{ny}{2x}\right) \mathbb{1}_{2x > x+y > 2z^2/n} \\ & \times \int_{\mathbb{R}^2} du dv \exp \left[-iu \left(x - \frac{z^2}{n}\right) - iv \left(y - \frac{z^2}{n}\right) - \frac{z^2}{2n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n) \right], \end{aligned}$$

Démonstration. Nous commençons par calculer la fonction caractéristique de (T_n, H_n, S_n) sous μ_n (c'est-à-dire sans le terme d'interaction). Celle-ci s'écrit

$$\begin{aligned} \phi_n : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto & \mu_n \left(e^{iuT_n + ivH_n + iwS_n} \right) \\ = & \mu_n \left(e^{iuY_n^2 + ivY_n^2 + iw\sqrt{n}Y_n} \right) \prod_{j=1}^{n-1} \mu_n \left(e^{iuY_j^2 + iv\alpha_j^n Y_j^2} \right) \\ = & F(1 - 2iu - 2iv, iw\sqrt{n}) \prod_{j=1}^{n-1} F(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n, 0), \end{aligned}$$

où la fonction F est donnée par

$$F : (a, b) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{bx - ax^2/2}.$$

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $\Re a > 0$, cette intégrale est bien définie et il découle du lemme 4 dans [Gor14] que

$$F(a, b) = \exp \left(\frac{b^2}{2a} - \frac{\ln(a)}{2} \right), \quad (3.42)$$

en utilisant la détermination suivante du logarithme :

$$\ln : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{cases}$$

Ainsi, cette formule généralise l'égalité (3.3) que nous avons montrée pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nous en déduisons que tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$,

$$\phi_n(u, v, w) = \exp \left[-\frac{nw^2}{2(1 - 2iu - 2iv)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \ln(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n) \right], \quad (3.43)$$

où nous avons utilisé le fait que $\alpha_n^n = 1$. Pour pouvoir utiliser le théorème d'inversion de Fourier, il nous faut vérifier que cette fonction caractéristique est intégrable sur $\mathbb{R}^3$. Nous écrivons donc, pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$,

$$|\phi_n(u, v, w)| = \exp \left[-\frac{nw^2}{2(1 + 4(u + v)^2)} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \ln \left(1 + 4(u + v \alpha_j^n)^2 \right) \right].$$

Si $\lambda > 0$, alors nous utilisons le résultat du lemme 6 selon lequel

$$\forall n \geq 3 \quad \left| \left\{ j \in \{1, \dots, n-1\} : uv \alpha_j^n \geq 0 \text{ et } |\alpha_j^n| \geq \frac{1}{n} \right\} \right| \geq Kn - 2,$$

avec $K > 0$ une constante fixée. Nous en déduisons que pour tout $n \geq n_I = 3 \vee 9/K$ et pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} |\phi_n(u, v, w)| &\leq \exp \left[-\frac{nw^2}{2(1+4(u+v)^2)} - \frac{Kn-2}{4} \ln \left(1 + 4u^2 + \frac{4v^2}{n^2} \right) \right] \\ &\leq \exp \left[-\frac{nw^2}{2(1+8u^2+8v^2)} - \frac{7}{4} \ln \left(1 + \frac{u^2+v^2}{n^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Supposons maintenant que $\lambda = 0$, c'est-à-dire que $d_n \ll n$. Si u et v sont de même signe, alors nous ne conservons dans la somme que les termes d'indice $j \leq 7$. D'après la formule (3.15), pour $j \leq 7$ fixé, nous avons

$$\alpha_j^n = \frac{\cos(j(d_n+1)\pi/n) \sin(jd_n\pi/n)}{d_n \sin(j\pi/n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

puisque nous avons pris $d_n = o(n)$. Ainsi, à partir d'un certain rang, nous avons $\alpha_j^n \geq 1/2$ pour tout $j \leq 7$, et donc, u et v étant de même signe,

$$\sum_{j=1}^n \ln \left(1 + 4(u + v \alpha_j^n)^2 \right) \geq 7 \ln \left(1 + 4u^2 + v^2 \right).$$

Si u et v sont de signes opposés, nous remarquons que si j est tel que

$$\left\lceil \frac{n}{2d_n+1} \right\rceil \leq j \leq \left\lceil \frac{n}{2d_n+1} \right\rceil + 6.$$

alors nous avons

$$\pi \leq \frac{(2d_n+1)j\pi}{n} \leq \pi + \frac{7(2d_n+1)\pi}{n} \leq 2\pi$$

à partir d'un certain rang, puisque $d_n = o(n)$. Nous avons alors, pour ces indices j , d'après la formule (3.16),

$$\alpha_j^n = \frac{1}{2d_n} \left(\frac{\sin((2d_n+1)j\pi/n)}{\sin(j\pi/n)} - 1 \right) \leq -\frac{1}{2d_n}.$$

Nous en déduisons que pour u et v de signes opposés, à partir d'un certain rang, nous avons

$$\sum_{j=1}^n \ln \left(1 + 4(u + v \alpha_j^n)^2 \right) \geq 7 \ln \left(1 + 4u^2 + \frac{v^2}{d_n^2} \right).$$

Ainsi, nous avons à partir d'un certain rang $n_I \in \mathbb{N}$, pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} |\phi_n(u, v, w)| &\leq \exp \left[-\frac{nw^2}{2(1+4(u+v)^2)} - \frac{7}{4} \ln \left(1 + 4u^2 + \frac{v^2}{d_n^2} \right) \right] \\ &\leq \exp \left[-\frac{nw^2}{2(1+8u^2+8v^2)} - \frac{7}{4} \ln \left(1 + \frac{u^2+v^2}{n^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Cette majoration, identique à (3.44), est donc valable quel que soit $\lambda \in [0, 1]$. Nous pouvons donc écrire, dans $[0, +\infty]$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} du dv dw |\phi_n(u, v, w)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} du dv \left(1 + \frac{u^2 + v^2}{n^2}\right)^{-7/4} \int_{\mathbb{R}} dw \exp\left(-\frac{nw^2}{2(1 + 8u^2 + 8v^2)}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{\mathbb{R}^2} du dv \left(1 + \frac{u^2 + v^2}{n^2}\right)^{-7/4} \sqrt{1 + 8u^2 + 8v^2} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_0^{+\infty} \frac{2\pi r \sqrt{1 + 8r^2}}{(1 + r^2/n^2)^{7/4}} dr \\ &= \sqrt{\frac{2\pi^3}{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + 8\rho}}{(1 + \rho/n^2)^{7/4}} d\rho, \end{aligned}$$

qui est une intégrale convergente puisque

$$\frac{\sqrt{1 + 8\rho}}{(1 + \rho/n^2)^{7/4}} = O\left(\frac{1}{\rho^{5/4}}\right) \quad \text{quand } \rho \rightarrow +\infty.$$

La fonction caractéristique de (T_n, H_n, S_n) est donc intégrable pour tout $n \geq n_I$. En vertu du théorème d'inversion de Fourier, pour tout $n \geq n_I$, sous la loi μ_n , le triplet (T_n, H_n, S_n) admet donc une densité f_n donnée par

$$f_n(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} du dv dw \phi_n(u, v, w) e^{-iux - ivy - iwz}.$$

Étant donné la définition (2.5) de notre modèle $\hat{\mu}_n$, nous en déduisons que sous $\hat{\mu}_n$, le triplet (T_n, H_n, S_n) admet pour densité

$$\hat{f}_n : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{(2\pi)^3 Z_n} \exp\left(\frac{ny}{2x}\right) \int_{\mathbb{R}^3} du dv dw \phi_n(u, v, w) e^{-iux - ivy - iwz}.$$

En remplaçant la fonction caractéristique ϕ_n par son expression (3.43), il vient, pour tout $n \geq n_I$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^3 Z_n} \exp\left(\frac{ny}{2x}\right) \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} du dv dw \exp\left[-iux - ivy - iwz - \frac{nw^2}{2(1 - 2iu - 2iv)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \ln(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n)\right]. \end{aligned}$$

L'intégrale sur la variable w se calcule aisément en utilisant la formule (3.42), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dw \exp\left(-iwz - \frac{nw^2}{2(1 - 2iu - 2iv)}\right) &= F\left(\frac{n}{1 - 2iu - 2iv}, -iz\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{\ln(1 - 2iu - 2iv)}{2} - \frac{z^2}{2n} + \frac{iu z^2 + iv z^2}{n}\right). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n \sqrt{n}} \exp\left(\frac{ny}{2x}\right) \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} du dv \exp\left[-iu\left(x - \frac{z^2}{n}\right) - iv\left(y - \frac{z^2}{n}\right) - \frac{z^2}{2n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n)\right]. \end{aligned}$$

Or, comme nous l'avions remarqué en (3.2), nous avons

$$\mu_n\left(T_n \leq |H_n|\right) = 0 \quad \text{et} \quad \mu_n\left(T_n - \frac{S_n^2}{n} \leq \left|H_n - \frac{S_n^2}{n}\right|\right) = 0,$$

ce qui implique que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$x \leq |y| \quad \text{ou} \quad x - \frac{z^2}{n} \leq \left|y - \frac{z^2}{n}\right| \quad \Rightarrow \quad \widehat{f}_n(x, y, z) = 0.$$

Or, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, nous avons

$$\begin{aligned} x > |y| \quad \text{et} \quad x - \frac{z^2}{n} > \left|y - \frac{z^2}{n}\right| &\Leftrightarrow x > y \quad \text{et} \quad x + y > 0 \quad \text{et} \quad x - \frac{z^2}{n} > -y + \frac{z^2}{n} \\ &\Leftrightarrow x > y \quad \text{et} \quad x + y > \frac{2z^2}{n} \\ &\Leftrightarrow 2x > x + y > \frac{2z^2}{n}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire, pour $n \geq n_I$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n \sqrt{n}} \exp\left(\frac{ny}{2x}\right) \mathbb{1}_{2x > x+y > 2z^2/n} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} du dv \exp\left[-iu\left(x - \frac{z^2}{n}\right) - iv\left(y - \frac{z^2}{n}\right) - \frac{z^2}{2n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n)\right], \end{aligned}$$

ce qui est bien l'expression recherchée. $\square$

3 Preuve du théorème 4

Dans cette partie, nous démontrons le théorème 4, c'est-à-dire que nous étudions la convergence en loi de $S_n/\sqrt{n}$ dans le cas $d_n = 1$. La méthode que nous mettons ici en œuvre n'est peut-être pas optimale pour ce cas très particulier mais, comme nous allons le voir dans les parties suivantes, elle se généralise assez bien pour traiter d'autres régimes de la portée d'interaction. Cette partie est donc l'occasion de présenter la démarche dans un cadre dans lequel il ne se passe finalement pas grand chose d'inattendu. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. D'après la convergence en probabilité donnée par le théorème 13, nous avons

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mu}_n\left(\left|\frac{T_n}{n} - 1\right| > \varepsilon \quad \text{ou} \quad \left|\frac{H_n}{n} - (\sqrt{2} - 1)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Cela va nous permettre de nous restreindre à un domaine assez petit pour que les choses se passent bien. Nous fixons donc $\varepsilon = 2^{-22}$, qui sera suffisant pour obtenir les majorations dont nous aurons besoin, et nous nous intéressons à la limite quand $n \rightarrow \infty$ de

$$E_n = \widehat{\mu}_n\left[g\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \mathbb{1}\left\{\left|\frac{T_n}{n} - 1\right| \leq \varepsilon\right\} \mathbb{1}\left\{\left|\frac{H_n}{n} - (\sqrt{2} - 1)\right| \leq \varepsilon\right\}\right] = \widehat{\mu}_n\left[g\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] + o(1). \quad (3.45)$$

3.1 La méthode des rectangles

Nous aurons besoin du résultat élémentaire suivant, qui donne une borne sur l'erreur de la méthode des rectangles pour approcher une intégrale :

Lemme 13. *Soit $K > 0$, et soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction K -lipschitzienne. Nous avons alors, pour tout $n \geq 1$,*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right) - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \frac{K}{2n}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right) - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(t) \right| dt \leq \sum_{j=1}^n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} K \left| \frac{j}{n} - t \right| dt = \frac{K}{2n},$$

ce qui est bien l'inégalité annoncée. $\square$

3.2 Mise en forme de l'intégrale

D'après le lemme 12, pour tout $n \geq n_I$, sous la loi $\hat{\mu}_n$, le triplet (T_n, H_n, S_n) admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$\begin{aligned} \hat{f}_n : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto & \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n \sqrt{n}} \exp\left(\frac{ny}{2x}\right) \mathbb{1}_{2x > x+y > 2z^2/n} \\ & \times \int_{\mathbb{R}^2} du dv \exp \left[-iu \left(x - \frac{z^2}{n}\right) - iv \left(y - \frac{z^2}{n}\right) - \frac{z^2}{2n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n) \right]. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} E_n = & \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n \sqrt{n}} \int_{(1-\varepsilon)n}^{(1+\varepsilon)n} dx \int_{(\sqrt{2}-1-\varepsilon)n}^{(\sqrt{2}-1+\varepsilon)n} dy \int_{-\sqrt{n(x+y)/2}}^{\sqrt{n(x+y)/2}} dz g\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(\frac{ny}{2x}\right) \\ & \times \int_{\mathbb{R}^2} du dv \exp \left[-iu \left(x - \frac{z^2}{n}\right) - iv \left(y - \frac{z^2}{n}\right) - \frac{z^2}{2n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n) \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Grâce au calcul de grandes déviations que nous avons mené dans la partie 1, nous nous attendons à ce que $(T_n, H_n, S_n) - n(1, \sqrt{2} - 1, 0)$ soit d'ordre $\sqrt{n}$, ce qui nous conduit à procéder au changement de variables

$$x = n + x' \sqrt{n}, \quad y = (\sqrt{2} - 1)n + y' \sqrt{n}, \quad z = z' \sqrt{n}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{n}}, \quad v = \frac{v'}{\sqrt{n}}.$$

Nous obtenons alors

$$\forall n \geq n_I \quad E_n = \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}^2} du dv e^{A_n(x, y, z, u, v)}, \quad (3.47)$$

où le domaine $\mathcal{D}_n$ est défini par

$$\mathcal{D}_n = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq \varepsilon \sqrt{n}, \quad |y| \leq \varepsilon \sqrt{n} \quad \text{et} \quad 2z^2 \leq n\sqrt{2} + x\sqrt{n} + y\sqrt{n} \right\}, \quad (3.48)$$

et où nous avons posé

$$A_n(x, y, z, u, v) = \frac{(\sqrt{2}-1)n + y\sqrt{n}}{2(1+x/\sqrt{n})} - iu\sqrt{n} - iux + \frac{iz^2}{\sqrt{n}} - iv(\sqrt{2}-1)\sqrt{n} - ivy + \frac{ivz^2}{\sqrt{n}} - \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}} \right).$$

Pour nous débarrasser du terme $y\sqrt{n}$, nous souhaitons déplacer le contour d'intégration de la variable v de $\mathbb{R}$ à

$$v \in v_0 + \mathbb{R} \quad \text{où} \quad v_0 = -\frac{i\sqrt{n}}{2}. \quad (3.49)$$

Remarquons que, si nous avons fait ce déplacement du contour d'intégration avant le changement de variables, cela reviendrait à ajouter un terme $-y/2$ dans l'exponentielle. Nous aurions pu deviner dès le début que le quotient $ny/(2x)$ dans l'exponentielle allait nous donner un terme $y/2$ à compenser, puisque x se concentre autour de n . Cette étape de déplacement du contour dans le plan complexe aurait donc pu être évitée si, dans le lemme 12, nous avions exprimé la fonction caractéristique de (T_n, H_n, S_n) sous la loi

$$\frac{e^{H_n/2}}{\mu_n(e^{H_n/2})} d\mu_n,$$

au lieu de la loi μ_n . En effet, nous aurions alors obtenu

$$\phi_n(u, v, w) = \frac{1}{\mu_n(e^{H_n/2})} \mu_n \left[\exp \left(iuT_n + i \left(v - \frac{i}{2} \right) H_n + iwS_n \right) \right].$$

ce qui revient à déplacer le contour d'intégration de $v \in \mathbb{R}$ à $v \in \mathbb{R} - i/2$ dans l'équation (3.46). Après notre changement de variable $v = v'/\sqrt{n}$, cela revient donc au déplacement indiqué dans (3.49). Mais vérifions tout de même que nous avons bien le droit de faire ce changement de contour d'intégration. Nous fixons donc $n \geq n_I$ et $(x, y, z, u) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}$. La fonction $v \mapsto A_n(x, y, z, u, v)$ est bien définie et holomorphe sur l'ouvert

$$\left\{ v \in \mathbb{C} : -\frac{\sqrt{n}}{2M_n} < \Im v < -\frac{\sqrt{n}}{2m_n} \right\}, \quad (3.50)$$

où m_n et M_n sont les extrema du spectre, définis par (3.14). Comme $M_n < 1$, le contour fermé représenté sur la figure 3.1 est bien inclus dans l'ouvert (3.50), et donc le théorème de Cauchy nous assure que pour tout $M > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{-M}^M dv e^{A_n(x, y, z, u, v)} \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} dv e^{A_n(x, y, z, u, v)} + \int_{\mathcal{C}_2} dv e^{A_n(x, y, z, u, v)} + \int_{\mathcal{C}_3} dv e^{A_n(x, y, z, u, v)} \\ &= \int_0^1 v_0 dt e^{A_n(x, y, z, u, -M+tv_0)} + \int_{-M}^M dv e^{A_n(x, y, z, u, v+v_0)} + \int_1^0 v_0 dt e^{A_n(x, y, z, u, M+tv_0)}. \end{aligned}$$

Nous écrivons alors, pour $M > 0$ et $t \in [0, 1]$,

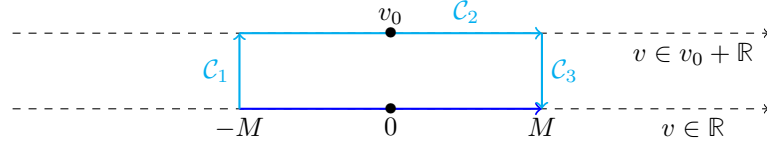


FIGURE 3.1 – Le théorème de Cauchy nous permet de remplacer l'intégrale sur $[-M, M]$ par celle sur les contours C_1 , C_2 et C_3 .

$\Re A_n(x, y, z, u, \pm M + tv_0)$

$$\begin{aligned}
&= A_n(x, y, z, 0, 0) + t(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} \Im v_0 + ty \Im v_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left| 1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} \mp \frac{2iM\alpha_j^n}{\sqrt{n}} - \frac{2itv_0\alpha_j^n}{\sqrt{n}} \right| \\
&= A_n(x, y, z, 0, 0) + t(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} \Im v_0 + ty \Im v_0 - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left[(1 - t\alpha_j^n)^2 + \left(\frac{2u \pm 2M\alpha_j^n}{\sqrt{n}} \right)^2 \right] \\
&\leq A_n(x, y, z, 0, 0) + (\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} |\Im v_0| + |y| |\Im v_0| - \frac{n \ln(1 - M_n)}{2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2u \pm 2M_n M}{\sqrt{n}} \right| \\
&\xrightarrow{M \rightarrow \infty} -\infty,
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à $t \in [0, 1]$. Nous avons donc

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^1 v_0 dt e^{A_n(x, y, z, u, -M + tv_0)} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^0 v_0 dt e^{A_n(x, y, z, u, M + tv_0)} = 0,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} dv e^{A_n(x, y, z, u, v)} = \int_{\mathbb{R}} dv e^{A_n(x, y, z, u, v + v_0)}.$$

Notre calcul (3.47) devient alors

$$\forall n \geq n_I \quad E_n = \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv e^{B_n(x, y, z, u, v)}, \quad (3.51)$$

où

$$\begin{aligned}
B_n(x, y, z, u, v) &= -\frac{(\sqrt{2} - 1)x\sqrt{n} + xy}{2(1 + x/\sqrt{n})} - iu\sqrt{n} - iux + \frac{iu z^2}{\sqrt{n}} - iv(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} - ivy + \frac{iv z^2}{\sqrt{n}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \alpha_j^n - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}} \right).
\end{aligned}$$

Nous souhaitons ensuite intervertir l'intégration sur u et l'intégration sur v , pour pouvoir déplacer le contour d'intégration en u . Pour $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\Re B_n(x, y, z, u, v) &= B_n(x, y, z, 0, 0) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{4(u + v\alpha_j^n)^2}{n(1 - \alpha_j^n)^2} \right) \\
&\leq B_n(x, y, z, 0, 0) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{(u + v\alpha_j^n)^2}{n} \right),
\end{aligned}$$

puisque $|1 - \alpha_j^n| \leq 2$ pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Si u et v sont de même signe, nous ne conservons dans la somme que les termes d'indice $j \leq \lfloor n/6 \rfloor$, pour lesquels

$$\alpha_j^n = \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

et nous obtenons

$$\Re B_n(x, y, z, u, v) \leq B_n(x, y, z, 0, 0) - \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \ln \left(1 + \frac{u^2 + v^2/4}{n} \right).$$

Si u et v sont de signes contraires, nous obtenons la même minoration en ne conservant que les termes d'indice

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor.$$

Nous en déduisons que, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$,

$$\left| e^{B_n(x, y, z, u, v)} \right| \leq e^{B_n(x, y, z, 0, 0)} \left(1 + \frac{u^2 + v^2/4}{n} \right)^{-\lfloor n/6 \rfloor / 4},$$

qui est bien intégrable sur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $n \geq 30$. Le théorème de Fubini nous autorise donc à permuter les intégrales sur u et sur v dans (3.51) pour obtenir

$$\forall n \geq 30 \vee n_I \quad E_n = \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}} du e^{B_n(x, y, z, u, v)},$$

Pour compenser le terme $-(\sqrt{2}-1)x\sqrt{n}/2$ dans l'expression de B_n , nous souhaitons maintenant déplacer le contour d'intégration de la variable u de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R} + i(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}/2$. Pour $(x, y, z, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}$ fixé, la fonction $u \mapsto B_n(x, y, z, u, v)$ est bien définie et holomorphe sur l'ouvert

$$\left\{ u \in \mathbb{C} : \Im u > -\frac{(1-M_n)\sqrt{n}}{2} \right\}.$$

Nous pouvons donc déplacer le contour en restant à l'intérieur de cet ouvert, et la même méthode nous permet de vérifier que nous avons bien

$$\int_{\mathbb{R}} du \exp \left[B_n(x, y, z, u, v) \right] = \int_{\mathbb{R}} du \exp \left[B_n \left(x, y, z, u + \frac{i(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}}{2}, v \right) \right],$$

ce qui nous donne, à partir d'un certain rang,

$$E_n = C_n \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}} du e^{F_n(x, y, z, u, v) + G_n(u, v)}, \quad (3.52)$$

où la constante C_n est définie par

$$C_n = \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \exp \left(\frac{(\sqrt{2}-1)n}{2} \right) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-\alpha_j^n}}$$

et les fonctions F_n et G_n sont données par

$$F_n(x, y, z, u, v) = \frac{(\sqrt{2}-1)x^2}{2(1+x/\sqrt{n})} - \frac{xy}{2(1+x/\sqrt{n})} - iux - ivy + \frac{iu z^2}{\sqrt{n}} + \frac{iv z^2}{\sqrt{n}} - \frac{(\sqrt{2}-1)z^2}{2}$$

et

$$G_n(u, v) = -iu\sqrt{n} - iv(\sqrt{2}-1)\sqrt{n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2iu + 2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(\sqrt{2}-\alpha_j^n)} \right).$$

3.3 Convergence simple de l'intégrande

Nous souhaitons étudier la convergence de $F_n + G_n$. Pour pouvoir appliquer la méthode du col, nous étudions cette fonction sur un domaine étendu à des paramètres u et v à valeurs complexes. Pour $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2$, $F_n(x, y, z, u, v)$ est bien défini pour tout $n > x^2$ et nous avons, par un simple développement limité,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y, z, u, v) = F_\infty(x, y, z, u, v),$$

où

$$F_\infty(x, y, z, u, v) = \frac{(\sqrt{2}-1)x^2}{2} - \frac{xy}{2} - iux - ivy - \frac{(\sqrt{2}-1)z^2}{2}.$$

En ce qui concerne la fonction G_n , nous démontrons :

Lemme 14. *Nous avons la convergence simple :*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(u, v) = G_\infty(u, v),$$

où la fonction limite G_∞ est donnée par

$$G_\infty(u, v) = -\sqrt{2}u^2 - 2uv - v^2.$$

Démonstration. Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ fixé. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{2|u| + 2|v|}{\sqrt{n_0}(\sqrt{2}-1)} \leq \frac{1}{2}.$$

Nous avons alors, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\left| \frac{2iu + 2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(\sqrt{2}-\alpha_j^n)} \right| \leq \frac{1}{2}. \quad (3.53)$$

Ainsi, $G_n(u, v)$ est bien défini pour tout $n \geq n_0$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction

$$f_n : t \in [0, 1] \mapsto G_n(tu, tv),$$

nous obtenons

$$\left| f_n(1) - f_n(0) - f'_n(0) - \frac{f''_n(0)}{2} \right| \leq \frac{1}{6} \sup_{t \in [0, 1]} |f_n^{(3)}(t)|. \quad (3.54)$$

Tout d'abord, nous avons $f_n(1) = G_n(u, v)$ et $f_n(0) = G_n(0, 0) = 0$. Nous nous intéressons ensuite à

$$f'_n(0) = u \frac{\partial G_n}{\partial u}(0, 0) + v \frac{\partial G_n}{\partial v}(0, 0). \quad (3.55)$$

Nous avons

$$\frac{\partial G_n}{\partial u}(0, 0) = -i\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2}-\alpha_j^n} = i\sqrt{n} \left[-1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sqrt{2} - \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \right)^{-1} \right].$$

En utilisant le lemme 13 sur l'erreur de la méthode des rectangles puis notre calcul d'intégrale du lemme 1, nous avons donc, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{\partial G_n}{\partial u}(0, 0) = i\sqrt{n} \left(\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2} - \cos(2\pi t)} - 1 \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (3.56)$$

Nous écrivons, de même,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_n}{\partial v}(0,0) &= -i(\sqrt{2}-1)\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j^n}{\sqrt{2}-\alpha_j^n} = i\sqrt{n} \left(-(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos(2j\pi/n)}{\sqrt{2}-\cos(2j\pi/n)} \right) \\ &= i\sqrt{n} \left(\int_0^1 \frac{\cos(2\pi t) dt}{\sqrt{2}-\cos(2\pi t)} - (\sqrt{2}-1) \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned} \quad (3.57)$$

où nous avons encore utilisé le lemme 13 ainsi qu'une autre formule du lemme 1. En remplaçant (3.56) et (3.57) dans l'expression (3.55) de $f'_n(0)$, nous obtenons

$$f'_n(0) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (3.58)$$

Nous passons ensuite à

$$f''_n(0) = u^2 \frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0,0) + 2uv \frac{\partial^2 G_n}{\partial u \partial v}(0,0) - v^2 \frac{\partial^2 G_n}{\partial v^2}(0,0). \quad (3.59)$$

Nous calculons donc

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0,0) = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(\sqrt{2}-\alpha_j^n)^2} = -2 \int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{2}-\cos(2\pi t))^2} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.60)$$

Avec un changement de variable $\tau = \tan(\pi t)$ puis

$$\tau = s \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{s}{\sqrt{2}+1},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{2}-\cos(2\pi t))^2} &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+\tau^2) d\tau}{\left[(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1)\tau^2\right]^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2(1+s^2)^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}s^2\right) \frac{ds}{\sqrt{2}+1} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}-1)s^2}{(1+s^2)^2} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2} ds}{1+s^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-s^2) ds}{(1+s^2)^2} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-s^2}{1+s^2} \frac{2 ds}{1+s^2}. \end{aligned}$$

En effectuant maintenant le changement de variable $s = \tan(\theta/2)$, nous obtenons alors

$$\int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{2}-\cos(2\pi t))^2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta) d\theta = \sqrt{2}. \quad (3.61)$$

Ainsi, l'équation (3.60) devient

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0,0) = -2\sqrt{2} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.62)$$

Nous poursuivons en écrivant

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G_n}{\partial u \partial v}(0,0) &= -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j^n}{(\sqrt{2} - \alpha_j^n)^2} \\
&= -2 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi t) dt}{(\sqrt{2} - \cos(2\pi t))^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= -2 \int_0^1 \frac{\sqrt{2} dt}{(\sqrt{2} - \cos(2\pi t))^2} + 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2} - \cos(2\pi t)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= -2 + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.63}
\end{aligned}$$

d'après le lemme 1 et notre calcul (3.61), puis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G_n}{\partial v^2}(0,0) &= -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\alpha_j^n)^2}{(\sqrt{2} - \alpha_j^n)^2} \\
&= -2 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi t)^2 dt}{(\sqrt{2} - \cos(2\pi t))^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= -2 \int_0^1 \frac{\sqrt{2} \cos(2\pi t) dt}{(\sqrt{2} - \cos(2\pi t))^2} + 2 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi t) dt}{\sqrt{2} - \cos(2\pi t)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= -2\sqrt{2} + 2(\sqrt{2} - 1) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= -2 + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.64}
\end{aligned}$$

En remplaçant (3.62), (3.63) et (3.64) dans (3.59), nous obtenons donc

$$f_n''(0) = -2\sqrt{2}u^2 - 4uv - 2v^2 + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.65}$$

Enfin, pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons

$$f_n^{(3)}(t) = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} u^{3-k} v^k \frac{\partial^3 G_n}{\partial u^{3-k} \partial v^k}(tu, tv). \tag{3.66}$$

Soit $k \in \{0, \dots, 3\}$, et soit $t \in [0, 1]$. Nous avons

$$\frac{\partial^3 G_n}{\partial u^{3-k} \partial v^k}(tu, tv) = -\frac{8i}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\alpha_j^n)^k}{(\sqrt{2} - \alpha_j^n)^3} \left(1 - \frac{2itu + 2itv \alpha_j^n}{\sqrt{n}(\sqrt{2} - \alpha_j^n)}\right)^{-3}. \tag{3.67}$$

En utilisant notre majoration (3.53) et le fait que $|\alpha_j^n| \leq 1$, nous avons alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{\partial^3 G_n}{\partial u^{3-k} \partial v^k}(tu, tv) \right| \leq \frac{8}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^3} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-3} \leq \frac{64}{\sqrt{n}(\sqrt{2} - 1)^3}.$$

En remplaçant dans (3.66), il vient

$$\sup_{t \in [0,1]} |f_n^{(3)}(t)| \leq \frac{64(|u| + |v|)^3}{\sqrt{n}(\sqrt{2} - 1)^3}. \tag{3.68}$$

Ainsi, en utilisant (3.58), (3.65) et (3.68) dans notre inégalité de Taylor (3.54), nous obtenons, pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ fixé,

$$|G_n(u, v) - G_\infty(u, v)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

ce qui démontre bien la convergence simple de G_n vers G_∞ quand $n \rightarrow \infty$. $\square$

3.4 Déplacement du contour d'intégration

Nous souhaitons maintenant utiliser la méthode du col pour obtenir une approximation de l'intégrale dans l'équation (3.52). Cette méthode consiste à déplacer le contour d'intégration dans le plan complexe pour faire passer celui-ci par un point-col, c'est-à-dire un point critique de la fonction

$$(u, v) \mapsto F_\infty(x, y, z, u, v) + G_\infty(u, v),$$

qui est ici holomorphe sur $\mathbb{C}^2$. Nous obtiendrons alors une intégrale qui se présentera sous une forme bien adaptée à l'application du théorème de convergence dominée. En effet, dans la formule (3.52), l'intégrande n'est manifestement pas une fonction intégrable de $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5$, donc nous n'avons aucune chance de pouvoir utiliser le théorème de convergence dominée si nous ne déplaçons pas le contour d'intégration. Ainsi, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et nous recherchons un couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ qui annule

$$\frac{\partial F_\infty}{\partial u}(x, y, z, u, v) + \frac{\partial G_\infty}{\partial u}(u, v) = -ix - 2\sqrt{2}u - 2v,$$

ainsi que

$$\frac{\partial F_\infty}{\partial v}(x, y, z, u, v) + \frac{\partial G_\infty}{\partial v}(u, v) = -iy - 2u - 2v.$$

Le point-col qui nous intéresse est donc la solution du système

$$\begin{cases} u\sqrt{2} + v &= -\frac{ix}{2} \\ u + v &= -\frac{iy}{2} \end{cases}$$

qui est donnée par

$$u^* = u^*(x, y) = \frac{i(\sqrt{2}+1)(y-x)}{2} \quad \text{et} \quad v^* = v^*(x, y) = \frac{i(\sqrt{2}+1)(x-y\sqrt{2})}{2}.$$

Nous commençons par déplacer le contour d'intégration de la variable u , pour passer de $u \in \mathbb{R}$ à $u \in u^* + \mathbb{R}$. Nous fixons pour cela $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$ et $v \in \mathbb{C}$. La fonction $u \mapsto F_n(x, y, z, u, v) + G_n(u, v)$ est définie et holomorphe sur l'ouvert

$$\left\{ u \in \mathbb{C} : \Im u > -\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}}{2} \right\}.$$

D'après la définition (3.48) du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons

$$|u^*| = \frac{(\sqrt{2}+1)|y-x|}{2} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{n}}{2^{22}} + \frac{\sqrt{n}}{2^{22}} \right) = \frac{3\sqrt{n}}{2^{22}} < \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}}{2}. \quad (3.69)$$

Ainsi, nous pouvons déplacer le contour de $u \in \mathbb{R}$ à $u \in \mathbb{R} + u^*$ de la même façon qu'en section 3.2 pour obtenir, à partir d'un certain rang,

$$E_n = C_n \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}} du \exp \left(F_n(x, y, z, u^* + u, v) + G_n(u^* + u, v) \right).$$

Il est alors possible de vérifier, comme nous l'avons fait en section 3.2, que nous avons une fonction intégrable de $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, ce qui nous permet de permuter les deux dernières intégrales par le théorème de Fubini. Nous avons donc, à partir d'un certain rang,

$$E_n = C_n \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \exp \left(F_n(x, y, z, u^* + u, v) + G_n(u^* + u, v) \right).$$

Pour $(x, y, z, u) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}$ fixé, la fonction $v \mapsto G_n(u^* + u, v)$ est holomorphe sur l'ouvert

$$\left\{ v \in \mathbb{C} : -\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}}{2} - \Im u^* < \Im v < \frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{n}}{2} + \Im u^* \right\}. \quad (3.70)$$

Or, en utilisant à nouveau la définition du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$,

$$|v^*| = \frac{(\sqrt{2}+1)|x-y\sqrt{2}|}{2} \leq \frac{(\sqrt{2}+1)^2\sqrt{n}}{2^{23}} \leq \frac{3\sqrt{n}}{2^{22}}. \quad (3.71)$$

En combinant cela avec (3.69), nous en déduisons que

$$|\Im u^*| + |\Im v^*| \leq \frac{3\sqrt{n}}{2^{21}} < \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}}{2},$$

et donc le point-col v^* appartient bien à l'ouvert (3.70). Nous déplaçons donc l'intégrale sur la variable v de $v \in \mathbb{R}$ à $v \in \mathbb{R} + v^*$, ce qui nous donne à partir d'un certain rang,

$$E_n = C_n \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \exp \left(F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v) \right). \quad (3.72)$$

Regardons maintenant de plus près la fonction limite que nous obtenons après ce déplacement du contour d'intégration. D'après les résultats de la section 3.3, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5$, nous avons la convergence simple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v) = F_\infty(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_\infty(u^* + u, v^* + v).$$

Nous calculons donc, d'une part,

$$\begin{aligned} F_\infty(x, y, z, u^* + u, v^* + v) &= \frac{(\sqrt{2}-1)x^2}{2} - \frac{xy}{2} - i(u^* + u)x - i(v^* + v)y - \frac{(\sqrt{2}-1)z^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)x^2}{2} - \frac{xy}{2} + \frac{(\sqrt{2}+1)(y-x)x}{2} - iux + \frac{(\sqrt{2}+1)(x-y\sqrt{2})y}{2} - ivy - \frac{(\sqrt{2}-1)z^2}{2} \\ &= -x^2 + \frac{2\sqrt{2}+1}{2}xy - \frac{\sqrt{2}+2}{2}y^2 - \frac{\sqrt{2}-1}{2}z^2 - iux - ivy, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} G_\infty(u^* + u, v^* + v) &= -\sqrt{2}(u^* + u)^2 - 2(u^* + u)(v^* + v) - (v^* + v)^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2(y-x)^2}{4} - iu\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(y-x) - \sqrt{2}u^2 + \frac{(\sqrt{2}+1)^2(y-x)(x-y\sqrt{2})}{2} \\ &\quad - iv(\sqrt{2}+1)(y-x) - iu(\sqrt{2}+1)(x-y\sqrt{2}) - 2uv + \frac{(\sqrt{2}+1)^2(x-y\sqrt{2})^2}{4} \\ &\quad - iv(\sqrt{2}+1)(x-y\sqrt{2}) - v^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}+1}{2}xy + \frac{\sqrt{2}+2}{4}y^2 + iux + ivy - \sqrt{2}u^2 - 2uv - v^2. \end{aligned}$$

En additionnant, nous obtenons donc

$$F_\infty(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_\infty(u^* + u, v^* + v) = Q(x, y, z, u, v),$$

où la forme quadratique Q est donnée par

$$Q(x, y, z, u, v) = -\frac{3 - \sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}xy - \frac{\sqrt{2} + 2}{4}y^2 - \frac{\sqrt{2} - 1}{2}z^2 - \sqrt{2}u^2 - 2uv - v^2. \quad (3.73)$$

Il n'y a ici pas de surprise, puisque nous retrouvons la forme quadratique donnée par la Hessienne de la fonction de taux que nous avons calculée en (3.13).

3.5 Domination

Nous souhaitons appliquer le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite de l'intégrale dans (3.72). Pour cela, nous démontrons la majoration suivante :

Lemme 15. *Il existe $K > 0$ tel que, à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$,*

$$\Re \left(F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v) \right) \leq M(x, y, z, u, v),$$

où la fonction M est donnée par

$$M(x, y, z, u, v) = Q(x, y, z, 0, 0) + \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} + \frac{3z^2}{2^{21}} - \frac{9}{8} \ln \left(1 + \frac{u^2 + v^2}{120} \right) + K. \quad (3.74)$$

Démonstration. Soit $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$. Nous écrivons tout d'abord

$$\begin{aligned} \Re F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) - F_\infty(x, y, z, u^*, v^*) &= F_n(x, y, z, u^*, v^*) - F_\infty(x, y, z, u^*, v^*) \\ &= -\frac{(\sqrt{2} - 1)x^3}{2(x + \sqrt{n})} + \frac{x^2y}{2(x + \sqrt{n})} + \frac{iu^*z^2}{\sqrt{n}} + \frac{iv^*z^2}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Or d'après la définition (3.48) du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons $|x| \leq \sqrt{n}/2^{22}$ et $|y| \leq \sqrt{n}/2^{22}$, d'où

$$-\frac{(\sqrt{2} - 1)x^3}{2(x + \sqrt{n})} + \frac{x^2y}{2(x + \sqrt{n})} \leq \frac{|x|^3}{\sqrt{n}} + \frac{x^2|y|}{\sqrt{n}} \leq \frac{x^2}{2^{21}}.$$

Nous utilisons ensuite les majorations (3.69) et (3.71) de $|u^*|$ et $|v^*|$ pour écrire

$$\frac{iu^*z^2}{\sqrt{n}} + \frac{iv^*z^2}{\sqrt{n}} \leq \frac{3z^2}{2^{21}}.$$

Nous obtenons donc

$$\Re F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) \leq F_\infty(x, y, z, u^*, v^*) + \frac{x^2}{2^{21}} + \frac{3z^2}{2^{21}}. \quad (3.75)$$

En utilisant à nouveau (3.69) et (3.71), nous avons, pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\left| \frac{2iu^* + 2iv^* \alpha_j^n}{\sqrt{n}(\sqrt{2} - \alpha_j^n)} \right| \leq \frac{2|u^*| + 2|v^*|}{\sqrt{n}(\sqrt{2} - 1)} \leq \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2^{20}} < \frac{1}{2}. \quad (3.76)$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
\Re G_n(u^* + u, v^* + v) - G_n(u^*, v^*) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left| 1 - \frac{2i(u^* + u) + 2i(v^* + v)\alpha_j^n}{\sqrt{n}(\sqrt{2} - \alpha_j^n)} \right| \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2iu^* + 2iv^* \alpha_j^n}{\sqrt{n}(\sqrt{2} - \alpha_j^n)} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left| 1 - \left(1 - \frac{2iu^* + 2iv^* \alpha_j^n}{\sqrt{n}(\sqrt{2} - \alpha_j^n)} \right)^{-1} \frac{2iu + 2iv \alpha_j^n}{\sqrt{n}(\sqrt{2} - \alpha_j^n)} \right| \\
&\leq -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left[1 + \frac{16(u + v \alpha_j^n)^2}{n(\sqrt{2} + 1)^2} \right] \\
&\leq -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{(u + v \alpha_j^n)^2}{n} \right).
\end{aligned}$$

En procédant comme nous l'avions fait en section 3.2, c'est-à-dire en ne conservant que les termes avec α_j^n du signe de uv et avec $|\alpha_j^n| \geq 1/2$, nous obtenons

$$\Re G_n(u^* + u, v^* + v) - G_n(u^*, v^*) \leq -\frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \ln \left(1 + \frac{u^2 + v^2/4}{n} \right) \leq -\frac{30}{4n} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \ln \left(1 + \frac{u^2 + v^2/4}{30} \right),$$

pour tout $n \geq 30$, par concavité du logarithme. Pour $n \geq 60$, nous avons

$$\frac{30}{4n} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \geq \frac{30}{4n} \left(\frac{n}{6} - 1 \right) \geq \frac{30}{4n} \left(\frac{n}{6} - \frac{n}{60} \right) = \frac{9}{8},$$

et donc

$$\Re G_n(u^* + u, v^* + v) - G_n(u^*, v^*) \leq -\frac{9}{8} \ln \left(1 + \frac{u^2 + v^2}{120} \right), \quad (3.77)$$

Enfin, nous nous intéressons au terme $G_n(u^*, v^*)$. Nous reprenons alors le fil de la preuve du lemme 14. Ainsi, nous définissons la fonction

$$f_n : t \in [0, 1] \mapsto G_n(tu^*, tv^*).$$

D'après (3.69) et (3.71), nous avons

$$u^* = O(\sqrt{n}) \quad \text{et} \quad v^* = O(\sqrt{n}),$$

avec un O uniforme sur tout le domaine $\mathcal{D}_n$. En combinant cela avec (3.56) et (3.57), nous en déduisons que $f'_n(0) = O(1)$, uniformément sur $\mathcal{D}_n$. De même, grâce à nos estimées (3.62), (3.63) et (3.64), nous avons

$$f''_n(0) = G_\infty(u^*, v^*) + O(1),$$

avec un O uniforme pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$. Enfin, en utilisant la borne uniforme (3.76) dans le calcul (3.67), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0, 1]} |f_n^{(3)}(t)| &\leq \frac{64(|u^*| + |v^*|)^3}{\sqrt{n}(\sqrt{2} - 1)^3} \leq \frac{3(|u^*| + |v^*|)^2}{2^{15}(\sqrt{2} - 1)^3} \leq \frac{3(\sqrt{2} + 1)(2|x| + 3|y|)^2}{2^{17}(\sqrt{2} - 1)^3} \\
&\leq \frac{9(\sqrt{2} + 1)^4(x^2 + y^2)}{2^{16}} \leq \frac{x^2 + y^2}{16}.
\end{aligned}$$

En combinant tout cela dans la formule de Taylor (3.54), nous en déduisons qu'il existe $K > 0$ tel que, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$,

$$G_n(u^*, v^*) \leq G_\infty(u^*, v^*) + \frac{x^2 + y^2}{16} + K. \quad (3.78)$$

Finalement, en additionnant (3.75), (3.77) et (3.78), nous obtenons bien le résultat annoncé. $\square$

Nous vérifions maintenant :

Lemme 16. *La fonction e^M , où M est la fonction définie par (3.74), est intégrable sur $\mathbb{R}^5$.*

Démonstration. Nous écrivons, dans $[0, +\infty]$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^5} dx dy dz du dv e^{M(x,y,z,u,v)} &= e^K \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \exp \left(-\frac{7-2\sqrt{2}}{8}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}xy - \frac{2\sqrt{2}+3}{8}y^2 \right) \\ &\times \int_{\mathbb{R}} dz \exp \left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2}z^2 + \frac{3}{2^{21}}z^2 \right) \times \int_{\mathbb{R}^2} du dv \left(1 + \frac{u^2+v^2}{120} \right)^{-9/8}. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$-\frac{7-2\sqrt{2}}{8}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}xy - \frac{2\sqrt{2}+3}{8}y^2 = -\frac{7-4\sqrt{2}}{8}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-y)^2 \leq -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}y^2,$$

ce qui montre que

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dy \exp \left(-\frac{7-2\sqrt{2}}{8}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}xy - \frac{2\sqrt{2}+3}{8}y^2 \right) < +\infty.$$

Ensuite, nous avons

$$-\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{3}{2^{21}} < 0,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} dz \exp \left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2}z^2 + \frac{3}{2^{21}}z^2 \right) < +\infty.$$

Enfin, nous écrivons

$$\int_{\mathbb{R}^2} du dv \left(1 + \frac{u^2+v^2}{120} \right)^{-9/8} = \int_0^{+\infty} 2\pi r dr \left(1 + \frac{r^2}{120} \right)^{-9/8} = 120\pi \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{(1+\rho)^{9/8}} < +\infty,$$

puisque $9/8 > 1$. Nous avons donc bien démontré que la fonction e^M est intégrable sur $\mathbb{R}^5$. $\square$

3.6 Convergence dominée

Nous appliquons maintenant le théorème de convergence dominée à l'intégrale dans la formule (3.72), que nous rappelons ici :

$$E_n = C_n \int_{\mathbb{R}^5} dx dy dz du dv g(z) \exp \left(F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v) \right) \mathbb{1}_{(x,y,z) \in \mathcal{D}_n}.$$

Il découle de la définition (3.106) du domaine $\mathcal{D}_n$ que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_n = \bigcup_{n \geq 3} \bigcap_{k \geq n} \mathcal{D}_k = \mathbb{R}^3,$$

c'est-à-dire que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, nous avons $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$ à partir d'un certain rang. Ainsi, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5$, nous avons la convergence simple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(z) \exp \left(F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v) \right) \mathbb{1}_{(x, y, z) \in \mathcal{D}_n} = g(z) e^{Q(x, y, z, u, v)},$$

où Q est la forme quadratique donnée par (3.73). D'après les lemmes 15 et 16, l'hypothèse de domination est bien vérifiée à partir d'un certain rang. Nous en déduisons en vertu du théorème de convergence dominée que

$$E_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_n \int_{\mathbb{R}^5} dx dy dz du dv g(z) \exp \left(Q(x, y, z, u, v) \right) = C_n D \int_{\mathbb{R}} dz g(x) \exp \left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2} z^2 \right),$$

où

$$D = \int_{\mathbb{R}^4} dx dy du dv \exp \left(Q(x, y, 0, u, v) \right).$$

Or, comme nous l'avons écrit en (3.45), nous avons

$$\hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = E_n + o(1).$$

En appliquant cela à la fonction constante $g \equiv 1$, il vient

$$1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_n D \int_{\mathbb{R}} dz \exp \left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2} z^2 \right) = C_n D \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{2}-1}}.$$

Nous avons donc finalement, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dz g(x) \exp \left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2} z^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sqrt{2}-1)}} \int_{\mathbb{R}} dz g(x) \exp \left(-\frac{z^2}{2(\sqrt{2}+1)} \right), \end{aligned}$$

ce qui démontre bien la convergence en loi

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sqrt{2}+1),$$

achevant ainsi notre preuve du théorème 4. □

4 Preuve du théorème 5

Nous passons maintenant à la preuve du théorème 5. Nous supposons donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2d_n}{n} = \lambda \in (0, 1),$$

nous considérons une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, et nous recherchons la limite quand n tend vers l'infini de

$$\hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right].$$

4.1 Mise en forme de l'intégrale

D'après le lemme 3, nous avons

$$\frac{T_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2). \quad (3.79)$$

Nous en déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \left(|T_n - n| > n^{5/8} \right) = 0.$$

Nous étudions donc la limite quand $n \rightarrow \infty$ de

$$E_n = \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \mathbb{1}_{|T_n - n| \leq n^{5/8}} \right].$$

Le résultat du lemme 12 nous permet d'écrire, pour tout $n \geq n_I$,

$$\begin{aligned} E_n &= \int_{n-n^{5/8}}^{n+n^{5/8}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dz g \left(\frac{z}{n^{3/4}} \right) \hat{f}_n(x, y, z) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n \sqrt{n}} \int_{n-n^{5/8}}^{n+n^{5/8}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dz g \left(\frac{z}{n^{3/4}} \right) \exp \left(\frac{ny}{2x} \right) \mathbb{1}_{2x > x+y > 2z^2/n} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^2} du dv \exp \left[-iu \left(x - \frac{z^2}{n} \right) - iv \left(y - \frac{z^2}{n} \right) - \frac{z^2}{2n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n) \right]. \end{aligned}$$

La convergence en loi (3.79) et l'ordre de grandeur espéré de S_n nous poussent à faire le changement de variable

$$x = n + x' \sqrt{n}, \quad z = z' n^{3/4}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{n}},$$

Pour savoir quel changement de variable choisir pour y et v , souvenons-nous que

$$H_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^n Y_j^2 + \frac{S_n^2}{n}, \quad (3.80)$$

avec $\alpha_j^n \rightarrow \text{sinc}(j\lambda\pi)$ pour tout j fixé, quand $n \rightarrow \infty$. Nous procédons donc au changement de variable

$$y = y' + z'^2 \sqrt{n}, \quad v = v',$$

ce qui revient à parier que le premier terme dans (3.80) sera d'ordre $O(1)$, tandis que le terme S_n^2/n sera d'ordre $\sqrt{n}$. Or le terme S_n^2/n correspond précisément au Hamiltonien du modèle décrit au paragraphe 4.1, ce qui explique donc que, sous réserve d'obtention d'une limite non dégénérée à la fin de notre calcul, nous allons bien retrouver le comportement du modèle en champ moyen. Avec ces changements de variables, nous obtenons

$$E_n = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}^2} du dv e^{F_n(x,y,z,u,v) + G_n(u,v)}, \quad (3.81)$$

avec l'ensemble $\mathcal{D}_n$ défini par

$$\mathcal{D}_n = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq n^{1/8} \text{ et } 2\sqrt{n} + 2x > \sqrt{n} + x + \frac{y}{\sqrt{n}} + z^2 > 2z^2 \right\}, \quad (3.82)$$

et les fonctions F_n et G_n données par

$$F_n(x, y, z, u, v) = -iu(x - z^2) - ivy - \frac{xz^2}{2(1 + x/\sqrt{n})} + \frac{y}{2(1 + x/\sqrt{n})}$$

et

$$G_n(u, v) = -iu\sqrt{n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - 2iv \alpha_j^n \right). \quad (3.83)$$

4.2 Convergence simple de l'intégrande

Tout d'abord, nous avons la convergence :

$$\forall (x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y, z, u, v) = F_\infty(x, y, z, u, v), \quad (3.84)$$

où

$$F_\infty(x, y, z, u, v) = -iu(x - z^2) - ivy - \frac{xz^2}{2} + \frac{y}{2}.$$

Nous étudions ensuite la limite simple de la fonction G_n . Pour que $G_n(u, v)$ soit bien défini, nous imposons sur la variable v la condition

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad \Re \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - 2iv\alpha_j^n \right) > 0.$$

D'après le résultat du lemme 5 sur les extrema du spectre, pour avoir cela à partir d'un certain rang, il suffit d'exiger

$$\Re(1 - 2iv \operatorname{sinc}(\lambda\pi)) > 0 \quad \text{et} \quad \Re(1 + 2ivC_\lambda) > 0,$$

où C_λ est la constante définie par (3.23). Nous sommes donc amenés à considérer le domaine

$$\begin{aligned} V &= \left\{ v \in \mathbb{C} : \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \Re(1 - 2iv \operatorname{sinc}(j\lambda\pi)) > 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2\operatorname{sinc}(\lambda\pi)} < \Im v < \frac{1}{2C_\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(u, v) \in \mathbb{C} \times V$, la fonction $G_n(u, v)$ est bien définie à partir d'un certain rang, donc nous pouvons en étudier la limite simple. Nous démontrons alors le résultat suivant :

Lemme 17. *Nous avons la convergence simple :*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C} \times V \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(u, v) = G_\infty(u, v),$$

où G_∞ est la fonction donnée par

$$G_\infty : (u, v) \in \mathbb{C} \times V \mapsto -u^2 - \frac{iv}{\lambda} - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln(1 - 2iv \operatorname{sinc}(j\lambda\pi)).$$

Démonstration. Soit $(u, v) \in \mathbb{C} \times V$ fixé. Quand $j \rightarrow \infty$, nous avons

$$\ln(1 - 2iv \operatorname{sinc}(j\lambda\pi)) = -2iv \operatorname{sinc}(j\lambda\pi) + O\left(\frac{1}{j^2}\right).$$

Or, d'après le lemme 7, la série $\sum \operatorname{sinc}(j\lambda\pi)$ converge, et donc nous en déduisons que la série définissant la fonction G_∞ converge aussi. Nous nous intéressons tout d'abord à la limite de $G_n(0, v)$. Notons

$$h = 2 \inf_{j \geq 1} \Re(1 - 2iv \operatorname{sinc}(j\lambda\pi)) = \left(2\Im v + \frac{1}{\operatorname{sinc}(\lambda\pi)} \right) \wedge \left(\frac{1}{C_\lambda} - 2\Im v \right),$$

qui est strictement positif puisque $v \in V$. Il découle du lemme 5 sur les extrema du spectre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq n-1} \Re(1 - 2iv\alpha_j^n) = 2h,$$

donc, à partir d'un certain rang n_0 , nous avons

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad \Re(1 - 2iv\alpha_j^n) \geq h.$$

Soit $n \geq n_0$. Nous définissons maintenant

$$u_n = \left\lfloor \frac{n^{1/4}}{2} \wedge \left(\frac{2d_n}{n} - \lambda \right)^{-1/2} \right\rfloor.$$

Cette suite (u_n) tend vers l'infini, puisque $2d_n \sim \lambda n$. En utilisant la relation de parité $\alpha_{n-j}^n = \alpha_j^n$, nous écrivons

$$G_n(0, v) - G_\infty(0, v) = \delta_n^1(v) + \delta_n^2(v) - \delta_n^3(v),$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_n^1(v) &= \sum_{j=1}^{u_n} \left[-\ln(1 - 2iv \alpha_j^n) + \ln(1 - 2iv \operatorname{sinc}(j\lambda\pi)) \right], \\ \delta_n^2(v) &= \frac{iv}{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} \ln(1 - 2iv \alpha_j^n), \\ \delta_n^3(v) &= - \sum_{j=u_n+1}^{+\infty} \ln(1 - 2iv \operatorname{sinc}(j\lambda\pi)). \end{aligned}$$

Contrôle du premier terme : Nous commençons avec δ_n^1 . Pour tous complexes $z, z' \in \mathbb{C}$, selon l'inégalité des accroissements finis, nous avons

$$\Re z \geq h \quad \text{et} \quad \Re z' \geq h \quad \Rightarrow \quad |\ln z' - \ln z| \leq |z' - z| \sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{|(1-t)z + tz'|} \leq \frac{|z' - z|}{h}. \quad (3.85)$$

Nous avons donc, pour tout $j \in \{1, \dots, u_n\}$,

$$\left| \ln(1 - 2iv \alpha_j^n) - \ln(1 - 2iv \operatorname{sinc}(j\lambda\pi)) \right| \leq \frac{2|v|}{h} |\alpha_j^n - \operatorname{sinc}(j\lambda\pi)|.$$

Nous en déduisons que

$$|\delta_n^1(v)| \leq \frac{2|v|}{h} \sum_{j=1}^{u_n} |\alpha_j^n - \operatorname{sinc}(j\lambda\pi)|.$$

D'après le lemme 4, nous avons donc

$$\begin{aligned} |\delta_n^1(v)| &\leq \frac{2K|v|}{h} \sum_{j=1}^{u_n} \left(\frac{j}{n} + \left| \frac{2d_n}{n} - \lambda \right| \right) = O\left(\frac{u_n^2}{n}\right) + O\left(u_n \left| \frac{2d_n}{n} - \lambda \right| \right) \\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\left| \frac{2d_n}{n} - \lambda \right|^{1/2}\right) = o(1). \end{aligned}$$

Contrôle du deuxième terme : Nous nous intéressons maintenant à δ_n^2 . Nous réécrivons ce terme sous la forme

$$\delta_n^2(v) = - \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} \left(\ln(1 - 2iv \alpha_j^n) + 2iv \alpha_j^n \right) + 2iv \left(\frac{1}{\lambda} + \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} \alpha_j^n \right).$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange nous assure que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\Re z \geq h \quad \text{et} \quad 1 \geq h \quad \Rightarrow \quad |\ln z - (z-1)| \leq \frac{|z-1|^2}{2} \sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{|1 + t(z-1)|^2} \leq \frac{|z-1|^2}{2h^2}. \quad (3.86)$$

Nous en déduisons que

$$\left| \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} \left(\ln(1 - 2iv \alpha_j^n) + 2iv \alpha_j^n \right) \right| \leq \frac{2|v|^2}{h^2} \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} |\alpha_j^n|^2,$$

ce qui entraîne que

$$|\delta_n^2(v)| \leq \frac{2|v|^2}{h^2} \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} |\alpha_j^n|^2 + 2|v| \left| \frac{1}{\lambda} + \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} \alpha_j^n \right|. \quad (3.87)$$

En utilisant la formule (3.16) pour α_j^n , nous obtenons

$$\frac{1}{\lambda} + \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} \alpha_j^n = \frac{1}{\lambda} - \frac{n-2u_n}{2d_n} + \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} \frac{\sin((2d_n+1)j\pi/n)}{2d_n \sin(j\pi/n)} = o(1) + \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} \frac{\sin((2d_n+1)j\pi/n)}{2d_n \sin(j\pi/n)}.$$

En utilisant la symétrie des valeurs propres, nous avons

$$\frac{1}{\lambda} + \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} \alpha_j^n = o(1) + \frac{1}{d_n} \sum_{j=u_n+1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\sin((2d_n+1)j\pi/n)}{\sin(j\pi/n)}, \quad (3.88)$$

avec le terme $j = \lfloor n/2 \rfloor$ qui a été compté deux fois si n est pair, mais qui tend de toute façon vers 0. Nous effectuons alors une transformation d'Abel en posant, pour $j \geq 0$,

$$\sigma_{n,j} = \sum_{k=0}^j \sin((2d_n+1)k\pi/n).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} |\sigma_{n,j}| &= \left| \frac{\sin((2d_n+1)j\pi/(2n)) \sin((2d_n+1)(j+1)\pi/(2n))}{\sin((2d_n+1)\pi/(2n))} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin((2d_n+1)\pi/(2n))} \leq \frac{n}{2d_n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

donc il existe une constante $M > 0$ telle que $|\sigma_{n,j}| \leq M$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $j \geq 0$. Nous écrivons alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=u_n+1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\sin((2d_n+1)j\pi/n)}{\sin(j\pi/n)} &= \sum_{j=u_n+1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\sigma_{n,j} - \sigma_{n,j-1}}{\sin(j\pi/n)} \\ &= \sum_{j=u_n}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \sigma_{n,j} \left(\frac{1}{\sin(j\pi/n)} - \frac{1}{\sin((j+1)\pi/n)} \right) - \frac{\sigma_{n,u_n}}{\sin(u_n\pi/n)} + \frac{\sigma_{n,\lfloor n/2 \rfloor}}{\sin(\lfloor n/2 \rfloor \pi/n)}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\left| \sum_{j=u_n+1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\sin((2d_n+1)j\pi/n)}{\sin(j\pi/n)} \right| \leq \frac{2M}{\sin(u_n\pi/n)} + \frac{2M}{\sin(\lfloor n/2 \rfloor \pi/n)} \leq \frac{2Mn}{u_n}$$

Finalement, en reprenant (3.88), nous obtenons

$$\frac{1}{\lambda} + \sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} \alpha_j^n = o(1) + O\left(\frac{1}{u_n}\right) = o(1). \quad (3.89)$$

Enfin, en utilisant la majoration (3.17), nous avons

$$\sum_{j=u_n+1}^{n-u_n-1} |\alpha_j^n|^2 \leq \frac{n^2}{2d_n^2} \sum_{j=u_n+1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{j^2} = O\left(\frac{1}{u_n}\right) = o(1). \quad (3.90)$$

En injectant (3.89) et (3.90) dans (3.87), il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^2(v) = 0.$$

Contrôle du troisième terme : Enfin, la convergence de la série

$$\sum_{j \geq 0} \ln(1 - 2iv \operatorname{sinc}(j\lambda\pi))$$

implique que $\delta_n^3(v)$ tend vers 0, puisque $u_n \rightarrow \infty$ quand n tend vers l'infini. Nous avons donc bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0, v) = G_\infty(0, v).$$

Dépendance en u : Soit $n'_0 = n_0 \vee 16|u|/h^2$, et soit $n \geq n'_0$. Nous avons alors

$$\left| \frac{2iu}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{h}{2},$$

ce qui nous assure que

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad \Re \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - 2iv \alpha_j^n \right) \wedge \Re \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - 2iv \operatorname{sinc}(j\lambda\pi) \right) \geq \frac{h}{2}. \quad (3.91)$$

Selon l'inégalité de Taylor-Lagrange, nous avons

$$\left| G_n(u, v) - G_n(0, v) - u \frac{\partial G_n}{\partial u}(0, v) - \frac{u^2}{2} \frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0, v) \right| \leq \frac{|u|^3}{6} \sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{\partial^3 G_n}{\partial u^3}(tu) \right|. \quad (3.92)$$

Nous nous intéressons donc aux dérivées successives de G_n par rapport à u . Tout d'abord, nous écrivons

$$\frac{\partial G_n}{\partial u}(0, v) = -i\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1 - 2iv \alpha_j^n} = -\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1 - 2iv \alpha_j^n} - 1 \right).$$

Nous avons donc

$$\left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(0, v) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{2iv \alpha_j^n}{1 - 2iv \alpha_j^n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4|v|}{h\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n|.$$

En utilisant la majoration (3.18), nous obtenons alors

$$\frac{\partial G_n}{\partial u}(0, v) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) = o(1).$$

Nous avons, de même,

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0, v) = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(1 - 2iv \alpha_j^n)^2} = -2 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(1 - 2iv \alpha_j^n)^2} - 1 \right).$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0, v) + 2 \right| &\leq \frac{2}{n} + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|4iv \alpha_j^n + 4v^2 (\alpha_j^n)^2|}{|1 - 2iv \alpha_j^n|^2} \leq \frac{2}{n} + \frac{32|v|}{nh} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| + \frac{32|v|^2}{nh^2} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n|^2 \\ &= O\left(\frac{\ln n}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = o(1). \end{aligned}$$

Enfin, nous avons, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\left| \frac{\partial^3 G_n}{\partial u^3}(tu) \right| = \left| \frac{16}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(1 - 2iu/\sqrt{n} - 2iv \alpha_j^n)^3} \right| \leq \frac{1024}{h^3 \sqrt{n}}.$$

Ainsi, l'égalité (3.92) devient

$$G_n(u, v) = G_\infty(0, v) + o(1) - u^2 + o(1) = G_\infty(u, v) + o(1),$$

ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

4.3 Déplacement du contour d'intégration

Nous souhaitons appliquer la méthode du col pour approcher l'intégrale dans (3.81). Nous prenons donc $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C} \times V$. Nous avons, d'une part,

$$\frac{\partial F_\infty}{\partial u}(x, y, z, u, v) + \frac{\partial G_\infty}{\partial u}(u, v) = -i(x - z^2) - 2u.$$

Nous posons donc

$$u^\star = u^\star(x, z) = -\frac{i(x - z^2)}{2}.$$

Pour ce qui est de la seconde variable complexe, nous choisissons de poser

$$v^\star = v^\star(y) = -\frac{i \operatorname{sg}(y)}{4} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sinc}(\gamma\pi)} \right),$$

qui n'est pas le point-col, mais qui suffira pour notre calcul. Nous déplaçons alors le contour d'intégration des variables u et v pour passer par $u^\star$ et $v^\star$, comme nous l'avons fait en section 3.4. Commençons par la variable v : fixons $n \geq n_I$, $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$ et $u \in \mathbb{R}$. La fonction $v \mapsto F_n(x, y, z, u, v) + G_n(u, v)$ est définie et holomorphe sur l'ouvert

$$\left\{ v \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2M_n} < \Im v < \frac{1}{2m_n} \right\}. \quad (3.93)$$

Or, d'après le lemme 5, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2M_n} = \frac{1}{2 \operatorname{sinc}(\lambda\pi)} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2m_n} = \frac{1}{2C_\lambda} \geq \frac{1}{2 \operatorname{sinc}(\lambda\pi)}.$$

Comme $\lambda > 0$, nous avons $\operatorname{sinc}(\lambda\pi) < 1$ et donc à partir d'un certain rang,

$$\frac{1}{2M_n} \vee \frac{1}{2m_n} \geq \frac{1}{2 \operatorname{sinc}(\lambda\pi)} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\operatorname{sinc}(\lambda\pi)} - 1 \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sinc}(\gamma\pi)} \right) = |\Im v^\star|,$$

ce qui signifie que le point v^* se situe bien dans l'ouvert donné par (3.93). Nous pouvons donc déplacer le contour d'intégration en vertu du théorème de Cauchy, pour obtenir, pour tout $M > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M dv e^{F_n(x,y,z,u,v)+G_n(u,v)} &= \int_0^1 v^* dt e^{F_n(x,y,z,u,-M+tv^*)+G_n(u,-M+tv^*)} \\ &\quad + \int_{-M}^M dv e^{F_n(x,y,z,u,v^*+v)+G_n(u,v^*+v)} \\ &\quad + \int_1^0 v^* dt e^{F_n(x,y,z,u,M+tv^*)+G_n(u,M+tv^*)}. \end{aligned}$$

De même qu'en section 3.4, nous avons

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 v^* dt e^{F_n(x,y,z,u,\pm M+tv^*)+G_n(u,\pm M+tv^*)} = 0,$$

et donc en faisant tendre M vers l'infini, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} dv e^{F_n(x,y,z,u,v)+G_n(u,v)} = \int_{\mathbb{R}} dv e^{F_n(x,y,z,u,v^*+v)+G_n(u,v^*+v)}.$$

Ainsi, notre calcul (3.81) devient

$$\forall n \geq n_I \quad E_n = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv e^{F_n(x,y,z,u,v^*+v)+G_n(u,v^*+v)}. \quad (3.94)$$

Nous voulons ensuite permuter les intégrales sur les deux variables u et v , pour pouvoir déplacer le contour d'intégration en u . Pour cela, nous démontrons le lemme suivant, qui nous sera également utile plus tard pour vérifier l'hypothèse de domination du théorème de convergence dominée :

Lemme 18. *Il existe $K > 0$ tel que, à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$ et pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$\left| e^{G_n(tu^*+u, v^*+v)} \right| \leq \frac{e^{G_n(tu^*, v^*)}}{(1 + Ku^2)(1 + Kv^2)}.$$

Démonstration. Soit $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$, et soit $t \in [0, 1]$. Nous écrivons tout d'abord

$$\Re G_n(tu^* + u, v^* + v) - G_n(tu^*, v^*) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{4(u/\sqrt{n} + v\alpha_j^n)^2}{(1 - 2itu^*/\sqrt{n} - 2iv^*\alpha_j^n)^2} \right).$$

D'après la définition (3.82) du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons $z^2 - x \leq \sqrt{n}$. Nous en déduisons que pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$1 - \frac{2itu^*}{\sqrt{n}} - 2iv^*\alpha_j^n = 1 + \frac{t(z^2 - x)}{\sqrt{n}} - \frac{\text{sg}(y)}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{sinc}(\lambda\pi)} \right) \alpha_j^n \leq B_\lambda,$$

avec

$$B_\lambda = \frac{5}{2} + \frac{1}{2 \text{sinc}(\lambda\pi)}.$$

Nous avons donc

$$\Re G_n(tu^* + u, v^* + v) - G_n(tu^*, v^*) \leq -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left[1 + \frac{4}{B_\lambda^2} \left(\frac{u}{\sqrt{n}} + v\alpha_j^n \right)^2 \right]. \quad (3.95)$$

D'après le lemme 6, il existe une constante $K_0 > 0$ telle que, à partir d'un certain rang,

$$|I_{n,u,v}| \geq K_0 \frac{6}{K_0} - 2 = 4,$$

où

$$I_{n,u,v} = \left\{ j \in \{1, \dots, n-1\} : uv \alpha_j^n \geq 0 \text{ et } |\alpha_j^n| \geq \frac{K_0}{6} \right\}.$$

En appliquant à nouveau le lemme 6 avec cette fois-ci $a = n$, nous avons aussi, pour $n \geq 12/K_0$,

$$|J_{n,u,v}| \geq K_0 n - 6 \geq \frac{K_0 n}{2},$$

avec

$$J_{n,u,v} = \{j \in \{1, \dots, n-1\} \setminus I_{n,u,v} : uv \alpha_j^n \geq 0\}.$$

En utilisant cela, notre majoration (3.95) devient

$$\begin{aligned} \Re G_n(tu^* + u, v^* + v) - G_n(tu^*, v^*) &\leq -\frac{1}{4} \sum_{j \in I_{n,u,v}} \ln \left(1 + \frac{4K_0^2 v^2}{6B_\lambda^2} \right) - \frac{1}{4} \sum_{j \in J_{n,u,v}} \ln \left(1 + \frac{4u^2}{B_\lambda^2 n} \right) \\ &\leq -\ln \left(1 + \frac{4K_0^2 v^2}{6B_\lambda^2} \right) - \frac{K_0 n}{8} \ln \left(1 + \frac{4u^2}{B_\lambda^2 n} \right). \end{aligned}$$

Si de plus $n \geq 8/K_0$, alors la concavité du logarithme implique que

$$\ln \left(1 + \frac{4u^2}{B_\lambda^2 n} \right) \geq \frac{8}{K_0 n} \ln \left(1 + \frac{4K_0 u^2}{8B_\lambda^2} \right),$$

et donc

$$\Re G_n(tu^* + u, v^* + v) - G_n(tu^*, v^*) \leq -\ln \left(1 + \frac{4K_0^2 v^2}{6B_\lambda^2} \right) - \ln \left(1 + \frac{K_0 u^2}{2B_\lambda^2} \right).$$

En posant

$$K = \frac{4K_0^2}{6B_\lambda^2} \wedge \frac{K_0}{2B_\lambda^2},$$

nous obtenons alors la minoration annoncée par le lemme. $\square$

La fonction

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{(1 + Ku^2)(1 + Kv^2)}$$

étant intégrable, le théorème de Fubini nous autorise donc à intervertir l'intégrale sur u et l'intégrale sur v dans l'égalité (3.94), pour obtenir qu'à partir d'un certain rang,

$$E_n = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}} du e^{F_n(x,y,z,u,v^*+v) + G_n(u,v^*+v)}.$$

Nous fixons maintenant $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$ et $v \in \mathbb{R}$ et nous voulons déplacer l'intégrale sur la variable u . La fonction $u \mapsto F_n(x, y, z, u, v^* + v) + G_n(u, v^* + v)$ est définie et holomorphe sur l'ouvert

$$\left\{ u \in \mathbb{C} : \forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad \Re \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - 2iv^* \alpha_j^n \right) > 0 \right\}.$$

Or, pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$, nous avons

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2iu^*}{\sqrt{n}} - 2iv^* \alpha_j^n &= 1 + \frac{z^2 - x}{\sqrt{n}} - \frac{\text{sg}(y) \alpha_j^n}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{sinc}(\lambda\pi)} \right) \\ &\geq 1 - \frac{x^2}{\sqrt{n}} - \frac{M_n}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{sinc}(\lambda\pi)} \right) \\ &\geq 1 - \frac{1}{n^{1/4}} - \frac{M_n}{2} - \frac{M_n}{2 \text{sinc}(\lambda\pi)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \text{sinc}(\lambda\pi)}{2} > 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$,

$$1 - \frac{2iu^*}{\sqrt{n}} - 2iv^* \alpha_j^n \geq \frac{1 - \text{sinc}(\lambda\pi)}{4} > 0, \quad (3.96)$$

et donc nous pouvons déplacer le contour d'intégration de $u \in \mathbb{R}$ à $u \in u^* + \mathbb{R}$. Ce déplacement se justifie de la même manière que les précédents déplacements du contour d'intégration, et nous obtenons alors, à partir d'un certain rang,

$$E_n = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}} du e^{F_n(x, y, z, u^*+u, v^*+v) + G_n(u^*+u, v^*+v)}. \quad (3.97)$$

4.4 Domination

Nous cherchons maintenant à majorer l'intégrande dans (3.97). Nous démontrons donc le résultat suivant :

Lemme 19. *Il existe des constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que, à partir d'un certain rang,*

$$\forall (x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2 \quad \Re(F_n(x, y, z, u^*+u, v^*+v) + G_n(u^*+u, v^*+v)) \leq M(x, y, z, u, v),$$

où $M : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$M(x, y, z, u, v) = K_1 - \frac{3x^2}{16} - \frac{xz^2}{8} - \frac{3z^4}{16} - \frac{|y|}{8} \left(\frac{1}{\text{sinc}(\lambda\pi)} - 1 \right) + 2z^2 - \ln(1 + K_2 u^2) - \ln(1 + K_2 v^2). \quad (3.98)$$

Démonstration. Majoration du premier terme : Nous commençons par majorer $\Re F_n$. Nous avons, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \Re F_n(x, y, z, u^*+u, v^*+v) &= -i(x - z^2)u^* - iyv^* - \frac{xz^2}{2(1 + x/\sqrt{n})} + \frac{y}{2(1 + x/\sqrt{n})} \\ &= -\frac{(x - z^2)^2}{2} - \frac{|y|}{4} \left(1 + \frac{1}{\text{sinc}(\lambda\pi)} \right) - \frac{xz^2}{2} + \frac{x^2 z^2}{2(x + \sqrt{n})} + \frac{y}{2} - \frac{xy}{2(\sqrt{n} + x)} \\ &\leq -\frac{x^2}{2} + \frac{xz^2}{2} - \frac{z^4}{2} - \frac{|y|}{4} \left(\frac{1}{\text{sinc}(\lambda\pi)} - 1 \right) + \frac{x^2 z^2}{2(x + \sqrt{n})} + \frac{|xy|}{2(\sqrt{n} + x)} \end{aligned}$$

Or, d'après la définition (3.82) de l'ensemble $\mathcal{D}_n$, nous avons $|x| \leq n^{1/4}$, d'où

$$\sqrt{n} + x \geq \sqrt{n} - n^{1/4} \geq \frac{\sqrt{n}}{2},$$

dès lors que $n \geq 16$. Nous avons alors d'une part

$$\frac{x^2 z^2}{2(x + \sqrt{n})} \leq \frac{z^2}{n^{1/4}} \leq z^2,$$

et d'autre part

$$\frac{|xy|}{2(x + \sqrt{n})} \leq \frac{|y|}{n^{3/8}} \leq \frac{|y|}{8} \left(\frac{1}{\text{sinc}(\lambda\pi)} - 1 \right),$$

à partir d'un certain rang. En combinant tout cela, nous obtenons donc qu'à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$,

$$\Re F_n(x, y, z, u^*+u, v^*+v) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{xz^2}{2} - \frac{z^4}{2} - \frac{|y|}{8} \left(\frac{1}{\text{sinc}(\lambda\pi)} - 1 \right) + z^2. \quad (3.99)$$

Majoration du second terme : Nous nous occupons maintenant du terme $G_n(u^*, v^*)$. D'après l'inégalité des accroissements finis, nous avons

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{D}_n \quad |G_n(u^*, v^*) - G_n(0, v^*)| \leq |u^*| \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) \right|.$$

Du fait que v^* ne peut prendre que deux valeurs, le terme $G_n(0, v^*)$ est majoré par une constante $K_1 > 0$, uniformément pour tous les $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$. Nous en déduisons que

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{D}_n \quad G_n(u^*, v^*) \leq K_1 + |u^*| \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) \right|. \quad (3.100)$$

D'après notre minoration (3.96), nous avons à partir d'un certain rang,

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{D}_n \quad \forall t \in [0, 1] \quad , 1 - \frac{2itu^*}{\sqrt{n}} - 2iv^* \alpha_j^n \geq \frac{1 - \text{sinc}(\lambda\pi)}{4}, \quad (3.101)$$

ce qui correspond à la majoration (3.91) que nous avons utilisée pour établir la convergence simple, mais qui vaut maintenant de manière uniforme sur tout le domaine $\mathcal{D}_n$. En reprenant l'expression (3.83) de la fonction G_n , nous avons, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) &= -i\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1 - 2itu^*/\sqrt{n} - 2iv^* \alpha_j^n} \\ &= -i\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1 - 2itu^*/\sqrt{n} - 2iv^* \alpha_j^n} - 1 \right) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2itu^*/\sqrt{n} + 2iv^* \alpha_j^n}{1 - 2itu^*/\sqrt{n} - 2iv^* \alpha_j^n} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2itu^*/\sqrt{n} + 2iv^* \alpha_j^n}{1 - 2itu^*/\sqrt{n}} \\ &\quad - \frac{2v^*}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2itu^* \alpha_j^n / \sqrt{n} + 2iv^* (\alpha_j^n)^2}{(1 - 2itu^*/\sqrt{n})(1 - 2iv^* \alpha_j^n)}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.101) et le fait que

$$1 - \frac{2itu^*}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{t(z^2 - x)}{\sqrt{n}} \geq 1 - \frac{1}{n^{3/8}} \geq \frac{1}{2},$$

nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2t|u^*|}{1 - n^{-3/8}} + \frac{2|v^*|}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| \\ &\quad + \frac{32t|u^*||v^*|}{(1 - \text{sinc}(\lambda\pi))n} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| + \frac{32|v^*|^2}{(1 - \text{sinc}(\lambda\pi))n} \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j^n)^2. \end{aligned}$$

D'après les majorations (3.18) et (3.19), nous avons, dans notre régime $2d_n \sim \lambda n$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| = O(\ln n) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j^n)^2 = O(1).$$

De plus, nous avons $v^\star = O(1)$ uniformément sur tout le domaine $\mathcal{D}_n$. Nous pouvons donc écrire, uniformément pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$,

$$\frac{2|v^\star|}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) = o(1),$$

puis

$$\frac{32|v^\star|}{(1 - \text{sinc}(\lambda\pi))n} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1),$$

ainsi que

$$\frac{32|v^\star|^2}{(1 - \text{sinc}(\lambda\pi))n} \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j^n)^2 = O\left(\frac{1}{n}\right) = o(1).$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\frac{2}{1 - n^{-3/8}} + \frac{32|v^\star|}{(1 - \text{sinc}(\lambda\pi))n} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| \leq \frac{5}{2},$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2|v^\star|}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| + \frac{32|v^\star|^2}{(1 - \text{sinc}(\lambda\pi))n} \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j^n)^2 \leq 2,$$

ce qui entraîne que

$$\left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^\star, v^\star) \right| \leq 2 + \frac{5t|u^\star|}{2}.$$

En intégrant cela comme indiqué dans (3.100), nous obtenons alors qu'à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$,

$$\begin{aligned} |G_n(u^\star, v^\star)| &\leq K_1 + 2|u^\star| + \frac{5|u^\star|^2}{4} = K_1 + |x - z^2| + \frac{5(x - z^2)^2}{16} \\ &\leq K_1 + 1 + z^2 + \frac{5(x - z^2)^2}{16}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

En combinant nos majorations (3.99) et (3.102) avec le résultat du lemme 18, nous obtenons bien la domination annoncée, à partir d'un certain rang qui est le même pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$. $\square$

Il nous faut maintenant vérifier :

Lemme 20. *La fonction e^M , où M est donnée par l'équation (3.98), est intégrable sur $\mathbb{R}^5$.*

Démonstration. Nous avons, dans $[0, +\infty]$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^5} e^M &= e^{K_1} \int_{\mathbb{R}^2} dx dz \exp\left(-\frac{3x^2}{16} - \frac{xz^2}{8} - \frac{3z^4}{16} + 2z^2\right) \times \int_{\mathbb{R}} dy \exp\left[-\frac{|y|}{8} \left(\frac{1}{\text{sinc}(\lambda\pi)} - 1\right)\right] \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1 + K_2 u^2}\right)^2 \\ &= e^{K_1} \int_{\mathbb{R}^2} dx dz \exp\left[-\frac{1}{16} \left(3x + \frac{z^2}{3}\right)^2 - \frac{z^4}{18} + 2z^2\right] \times \frac{16 \text{sinc}(\lambda\pi)}{1 - \text{sinc}(\lambda\pi)} \times \frac{\pi^2}{K_2}. \end{aligned}$$

Nous écrivons alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dz \exp\left[-\frac{1}{16} \left(3x + \frac{z^2}{3}\right)^2 - \frac{z^4}{18} + 2z^2\right] = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} dt e^{-t^2/16} \times \int_{\mathbb{R}} dz \exp\left(-\frac{z^4}{18} + 2z^2\right),$$

ce qui montre bien que l'intégrale est finie. $\square$

4.5 Convergence dominée

Nous sommes désormais en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée. Rappelons que

$$E_n = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathbb{R}^5} g(z) e^{F_n(x,y,z, u^*+u, v^*+v) + G_n(u^*+u, v^*+v)} \mathbb{1}_{(x,y,z) \in \mathcal{D}_n}.$$

D'après l'équation (3.84) et le lemme 17, nous avons la convergence simple, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y, z, u^*+u, v^*+v) + G_n(u^*+u, v^*+v) = F_\infty(x, y, z, u^*+u, v^*+v) + G_\infty(u^*+u, v^*+v),$$

où

$$F_\infty(x, y, z, u^*+u, v^*+v) = -\frac{(x-z^2)^2}{2} - iu(x-z^2) - iv^*y - ivy - ivy - \frac{xz^2}{2} + \frac{y}{2}$$

et

$$G_\infty(u^*+u, v^*+v) = \frac{(x-z^2)^2}{4} + iu(x-z^2) - u^2 - \frac{iv^*}{\lambda} - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln(1 - 2i(v^*+v)\text{sinc}(j\lambda\pi)).$$

En additionnant, nous obtenons donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y, z, u^*+u, v^*+v) + G_n(u^*+u, v^*+v) = J(x, y, z, u, v),$$

avec

$$J(x, y, z, u, v) = -\frac{x^2}{4} - \frac{z^4}{4} - u^2 + \frac{y}{2} - i\left(y + \frac{1}{\lambda}\right)(v^*+v) - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln(1 - 2i(v^*+v)\text{sinc}(j\lambda\pi)).$$

D'après les lemmes 19 et 20, l'hypothèse de domination est bien vérifiée à partir d'un certain rang. Nous avons donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$E_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathbb{R}^5} dx dy dz du dv g(z) e^{J(x,y,z,u,v)} = C_n \int_{\mathbb{R}} dz g(z) e^{-z^4/4},$$

où nous avons posé

$$C_n = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathbb{R}^4} dx dy du dv e^{J(x,y,0,u,v)}.$$

Or, d'après nos calculs du début de la section 4.1, nous avons

$$\hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right] = E_n + o(1).$$

Dans le cas de la fonction constante $g = 1$, nous avons donc

$$1 = \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_n \int_{\mathbb{R}} dz g(z) e^{-z^4/4} = \frac{C_n \Gamma(1/4)}{\sqrt{2}}.$$

Revenant au cas général d'une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, nous avons donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/4)} \int_{\mathbb{R}} dz g(z) e^{-z^4/4},$$

ce qui démontre bien la convergence en loi annoncée. $\square$

5 Preuve du théorème 6

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 6. Nous supposons donc que le paramètre d_n est tel que $n^{3/4} \ll d_n \ll n$, nous prenons une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, et nous voulons déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right].$$

5.1 Mise en forme de l'intégrale

D'après le lemme 3, nous avons, sous la loi $\hat{\mu}_n$,

$$\frac{T_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2).$$

Comme $d_n \gg n^{3/4}$, nous en déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \left(|T_n - n| > \frac{d_n}{\sqrt[4]{n}} \right) = 0. \quad (3.103)$$

Nous recherchons donc la limite de

$$E_n = \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \mathbb{1}_{|T_n - n| \leq d_n / \sqrt[4]{n}} \right]. \quad (3.104)$$

Avec la densité donnée par le lemme 12, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} E_n &= \int_{n-d_n/\sqrt[4]{n}}^{n+d_n/\sqrt[4]{n}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dz g \left(\frac{z}{n^{3/4}} \right) \hat{f}_n(x, y, z) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n \sqrt{n}} \int_{n-d_n/\sqrt[4]{n}}^{n+d_n/\sqrt[4]{n}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dz g \left(\frac{z}{n^{3/4}} \right) \exp \left(\frac{ny}{2x} \right) \mathbb{1}_{2x > x+y > 2z^2/n} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^2} du dv \exp \left[-iu \left(x - \frac{z^2}{n} \right) - iv \left(y - \frac{z^2}{n} \right) - \frac{z^2}{2n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n) \right]. \end{aligned}$$

Nous effectuons maintenant le changement de variables

$$x = n + x' \sqrt{n}, \quad y = \frac{n^2 y'}{d_n^2} + z'^2 \sqrt{n}, \quad z = z' n^{3/4}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{n}}, \quad v = \frac{d_n^2 v'}{n^2},$$

ce qui nous donne, pour tout $n \geq n_I$,

$$E_n = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}^2} du dv e^{A_n(x, y, z, u, v)}, \quad (3.105)$$

où le domaine $\mathcal{D}_n$ est donné par

$$\mathcal{D}_n = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq \frac{d_n}{n^{3/4}} \text{ et } 2\sqrt{n} + 2x > \sqrt{n} + x + \frac{n^{3/2}}{d_n^2} y + z^2 > 2z^2 \right\}, \quad (3.106)$$

et où nous avons posé, pour $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$A_n = \frac{z^2 \sqrt{n} + y n^2 / d_n^2}{2(1 + x/\sqrt{n})} - iu \sqrt{n} - iu(x - z^2) - ivy - \frac{z^2 \sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - \frac{2iv d_n^2 \alpha_j^n}{n^2} \right). \quad (3.107)$$

Cette fois-ci, notre changement de variable sur y revient à supposer que, dans l'écriture du Hamiltonien sous la forme

$$H_n = \frac{S_n^2}{n} + R_n,$$

le terme S_n^2/n sera d'ordre $\sqrt{n}$ et le terme R_n d'ordre $n^2/d_n^2 \ll \sqrt{n}$, puisque $d_n \gg n^{3/4}$. Cela explique que le comportement est encore celui du modèle en champ moyen, car le terme S_n^2/n l'emporte par rapport au terme R_n . Poursuivons notre calcul (3.107) en écrivant

$$A_n = -\frac{xz^2}{2(1+x/\sqrt{n})} + \frac{yn^2/d_n^2}{2(1+x/\sqrt{n})} - iu\sqrt{n} - iu(x-z^2) - ivy - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - \frac{2ivd_n^2\alpha_j^n}{n^2} \right).$$

Pour obtenir une limite non dégénérée, nous devons donc nous débarrasser du terme yn^2/d_n^2 . Pour cela, nous souhaitons déplacer le contour d'intégration de la variable v de $\mathbb{R}$ à

$$v \in v_0 + \mathbb{R} \quad \text{où} \quad v_0 = -\frac{in^2}{2d_n^2}. \quad (3.108)$$

Ce déplacement du contour d'intégration en v se justifie de la même manière qu'en section 3.2, la fonction $v \mapsto A_n(x, y, z, u, v)$ étant définie et holomorphe sur l'ouvert

$$\left\{ v \in \mathbb{C} : -\frac{n^2}{2d_n^2 M_n} < \Im v < -\frac{n^2}{2d_n^2 m_n} \right\} \supset \left\{ v \in \mathbb{C} : -\frac{n^2}{2d_n^2} \leq \Im v \leq 0 \right\}.$$

Le calcul (3.105) devient alors, pour tout $n \geq n_I$,

$$E_n = C_n \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv e^{F_n(x, y, z, u, v) + G_n(u, v)}, \quad (3.109)$$

avec la constante C_n donnée par

$$C_n = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - \alpha_j^n) \right) = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_j^n}}, \quad (3.110)$$

et les fonctions F_n et G_n définies par

$$F_n(x, y, z, u, v) = -iu(x-z^2) - ivy - \frac{xz^2 + xyn^{3/2}/d_n^2}{2(1+x/\sqrt{n})}$$

et

$$G_n(u, v) = -iu\sqrt{n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} - \frac{2ivd_n^2\alpha_j^n}{n^2(1-\alpha_j^n)} \right). \quad (3.111)$$

5.2 Convergence simple de l'intégrande

Nous étudions maintenant la convergence simple de la somme $F_n + G_n$. Le fait que $d_n \gg n^{3/4}$ implique que

$$\forall (x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y, z, u, v) = F_\infty(x, y, z, u, v), \quad (3.112)$$

avec

$$F_\infty(x, y, z, u, v) = -iu(x-z^2) - ivy - \frac{xz^2}{2}.$$

Nous étudions ensuite la limite simple de G_n . Pour que $G_n(u, v)$ soit bien défini, il suffit que

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad \Re \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} - \frac{2ivd_n^2\alpha_j^n}{n^2(1-\alpha_j^n)} \right) > 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad \frac{n^2}{2d_n^2} + \frac{n^{3/2}}{d_n^2} \Im u + \left(\Im v - \frac{n^2}{2d_n^2} \right) \alpha_j^n > 0.$$

En fonction des valeurs propres extrémales M_n et $-m_n$ définies par (3.14), cela se réécrit

$$\frac{n^2}{2d_n^2} + \frac{n^{3/2}}{d_n^2} \Im u - \left(\Im v - \frac{n^2}{2d_n^2} \right) m_n > 0 \quad \text{et} \quad \frac{n^2}{2d_n^2} + \frac{n^{3/2}}{d_n^2} \Im u + \left(\Im v - \frac{n^2}{2d_n^2} \right) M_n > 0,$$

ce qui revient à

$$-\frac{n^2(1-M_n)}{2d_n^2 M_n} + \frac{n^{3/2}}{d_n^2 M_n} \Im u < \Im v < \frac{n^2(1+m_n)}{2d_n^2 m_n} + \frac{n^{3/2}}{d_n^2 m_n} \Im u. \quad (3.113)$$

Or, il découle du lemme 9 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1-M_n)}{2d_n^2 M_n} = \frac{\pi^2}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1+m_n)}{2d_n^2 m_n} = +\infty.$$

De plus, pour $u \in \mathbb{C}$ fixé, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{d_n^2 M_n} \Im u = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{d_n^2 m_n} \Im u,$$

puisque $d_n \gg n^{3/4}$. Ainsi, pour tout $(u, v) \in \mathbb{C} \times V$, avec

$$V = \left\{ v \in \mathbb{C} : \Im v > -\frac{\pi^2}{3} \right\},$$

la condition (3.113) est vérifiée à partir d'un certain rang. Nous démontrons alors le résultat suivant :

Lemme 21. *Nous avons la convergence simple :*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C} \times V \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(u, v) = G_\infty(u, v),$$

où G_∞ est la fonction donnée par

$$G_\infty : (u, v) \in \mathbb{C} \times V \mapsto -u^2 - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 j^2} \right).$$

Démonstration. Soit $(u, v) \in \mathbb{C} \times V$ fixé. Nous nous intéressons tout d'abord à la limite de $G_n(0, v)$. Notons

$$h = \frac{1}{2} \wedge \left(\frac{1}{2} + \frac{3\Im v}{2\pi^2} \right),$$

qui est strictement positif puisque $v \in V$. Il découle du lemme 9 sur les extrema du spectre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Re \left(1 - \frac{2ivd_n^2 M_n}{n^2(1-M_n)} \right) = 1 + \frac{3\Im v}{\pi^2} \geq 2h,$$

tandis que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Re \left(1 + \frac{2ivd_n^2 m_n}{n^2(1+m_n)} \right) = 1 \geq 2h.$$

Ainsi, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad \Re \left(1 - \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1-\alpha_j^n)} \right) \geq h. \quad (3.114)$$

Soit $n \geq n_0$. En utilisant la symétrie $\alpha_{n-j}^n = \alpha_j^n$, nous écrivons

$$G_n(0, v) - G_\infty(0, v) = \delta_n^1(v) + \delta_n^2(v) - \delta_n^3(v),$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_n^1(v) &= \sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} \left[-\ln \left(1 - \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right) + \ln \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 j^2} \right) \right], \\ \delta_n^2(v) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{n - \lfloor n/d_n \rfloor - 1} \ln \left(1 - \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right), \\ \delta_n^3(v) &= - \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 j^2} \right). \end{aligned}$$

Contrôle du premier terme : Nous commençons avec δ_n^1 . Pour tout $j \leq \lfloor n/d_n \rfloor$, nous avons

$$\Re \left(1 - \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right) \geq h \quad \text{et} \quad \Re \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 j^2} \right) \geq 1 \wedge \left(1 + \frac{3\Im v}{\pi^2} \right) \geq h,$$

et donc l'inégalité des accroissements finis appliquée comme en (3.85) implique que

$$\left| -\ln \left(1 - \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right) + \ln \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 j^2} \right) \right| \leq \frac{1}{h} \left| \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} - \frac{3iv}{\pi^2 j^2} \right|.$$

Nous en déduisons que

$$|\delta_n^1(v)| \leq \frac{2d_n^2 |v|}{hn^2} \sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} \left| \frac{\alpha_j^n}{1 - \alpha_j^n} - \frac{3n^2}{2d_n^2 \pi^2 j^2} \right|.$$

D'après le lemme 8, nous avons donc

$$|\delta_n^1(v)| = O \left(\frac{d_n^2}{n^2} \sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} 1 \right) = O \left(\frac{d_n}{n} \right) = o(1).$$

Contrôle du deuxième terme : Nous nous intéressons maintenant à δ_n^2 . Si n est impair, en utilisant la symétrie des valeurs propres, nous écrivons

$$\delta_n^2(v) = - \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \ln \left(1 - \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right).$$

Si n est pair, il y a un terme compté en trop dans la somme ci-dessus, et donc

$$\delta_n^2(v) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2ivd_n^2 \alpha_{n/2}^n}{n^2(1 - \alpha_{n/2}^n)} \right) - \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \ln \left(1 - \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n/2}^n = 0$, et donc nous avons, quelle que soit la parité de n ,

$$\delta_n^2(v) = o(1) - \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \ln \left(1 - \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right).$$

Nous utilisons ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange (3.86) pour écrire

$$\delta_n^2(v) = o(1) + O\left(\frac{d_n^2}{n^2} \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\alpha_j^n}{1 - \alpha_j^n}\right) + O\left(\frac{d_n^4}{n^4} \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(\alpha_j^n)^2}{(1 - \alpha_j^n)^2}\right). \quad (3.115)$$

Pour la première somme, nous écrivons

$$\frac{\alpha_j^n}{1 - \alpha_j^n} = \alpha_j^n + \frac{(\alpha_j^n)^2}{1 - \alpha_j^n}.$$

Or, nous avons, d'après la majoration (3.17),

$$\forall j \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{d_n} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} \quad |\alpha_j^n| \leq \frac{n}{2d_n j} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.116)$$

Nous avons donc

$$\left| \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\alpha_j^n}{1 - \alpha_j^n} \right| \leq \left| \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_j^n \right| + 2 \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (\alpha_j^n)^2.$$

Ainsi, l'équation (3.115) devient

$$\delta_n^2(v) = o(1) + O\left(\frac{d_n^2}{n^2} \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_j^n\right) + O\left(\frac{d_n^2}{n^2} \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (\alpha_j^n)^2\right). \quad (3.117)$$

Nous écrivons alors, en utilisant la formule (3.16) pour les valeurs propres,

$$\left| \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_j^n \right| \leq \frac{n}{2d_n} + \frac{1}{2d_n} \left| \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\sin((2d_n + 1)j\pi/n)}{\sin(j\pi/n)} \right|. \quad (3.118)$$

Nous effectuons ensuite une transformation d'Abel en posant, pour $j \geq 0$,

$$\sigma_{n,j} = \sum_{k=0}^j \sin((2d_n + 1)k\pi/n).$$

Nous avons

$$|\sigma_{n,j}| = \left| \frac{\sin((2d_n + 1)j\pi/(2n)) \sin((2d_n + 1)(j+1)\pi/(2n))}{\sin((2d_n + 1)\pi/(2n))} \right| \leq \frac{1}{\sin((2d_n + 1)\pi/(2n))} \leq \frac{n}{2d_n}.$$

Cela nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\sin((2d_n + 1)j\pi/n)}{\sin(j\pi/n)} &= \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\sigma_{n,j} - \sigma_{n,j-1}}{\sin(j\pi/n)} \\ &= \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \sigma_{n,j} \left(\frac{1}{\sin(j\pi/n)} - \frac{1}{\sin((j+1)\pi/n)} \right) - \frac{\sigma_{n,\lfloor n/d_n \rfloor}}{\sin(\lfloor n/d_n \rfloor \pi/n)} + \frac{\sigma_{n,\lfloor n/2 \rfloor}}{\sin(\lfloor n/2 \rfloor \pi/n)}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\left| \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\sin((2d_n + 1)j\pi/n)}{\sin(j\pi/n)} \right| \leq \frac{n/d_n}{\sin(\lfloor n/d_n \rfloor \pi/n)} + \frac{n/d_n}{\sin(\lfloor n/2 \rfloor \pi/n)} = O(n).$$

Notre majoration (3.118) devient donc

$$\sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_j^n = O\left(\frac{n}{d_n}\right). \quad (3.119)$$

Par ailleurs, en reprenant la majoration (3.116), nous avons

$$\sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (\alpha_j^n)^2 \leq \sum_{j=\lfloor n/d_n \rfloor + 1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2d_n j}\right)^2 \leq \frac{n^2}{4d_n^2} \int_{\lfloor n/d_n \rfloor}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{4d_n}. \quad (3.120)$$

En injectant (3.119) et (3.120) dans (3.117), il vient

$$\delta_n^2(v) = o(1) + O\left(\frac{d_n}{n}\right) = o(1).$$

Contrôle du troisième terme : La convergence de la série

$$\sum_{j \geq 1} \ln \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 j^2}\right)$$

implique que $\delta_n^3(v)$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Nous avons donc bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0, v) = G_\infty(0, v).$$

Dépendance en u : D'après le lemme 9, nous avons

$$\max_{1 \leq j \leq n-1} \left| \frac{2iu}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \right| = \frac{2|u|}{\sqrt{n}(1 - M_n)} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3n^{3/2}|u|}{\pi^2 d_n^2} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0,$$

puisque $d_n \gg n^{3/4}$. Nous en déduisons qu'à partir d'un certain rang,

$$\left| \frac{2iu}{\sqrt{n}(1 - M_n)} \right| \leq \frac{h}{2}.$$

En combinant cela avec (3.114), nous obtenons qu'à partir d'un certain rang,

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad \Re \left(1 - \frac{2itu}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} - \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right) \geq \frac{h}{2}. \quad (3.121)$$

Nous reprenons ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange (3.92) et nous calculons les dérivées successives de G_n par rapport à u . Tout d'abord, nous écrivons

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_n}{\partial u}(0, v) &= -i\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \alpha_j^n - 2ivd_n^2 \alpha_j^n / n^2} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1 - \alpha_j^n - 2ivd_n^2 \alpha_j^n / n^2} - 1 \right) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j^n + 2ivd_n^2 \alpha_j^n / n^2}{1 - \alpha_j^n - 2ivd_n^2 \alpha_j^n / n^2} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{2ivd_n^2}{n^2} \right) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j^n}{1 - \alpha_j^n} \left(1 - \frac{2ivd_n^2 \alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Or, d'après (3.121), nous avons

$$\left| 1 - \frac{2ivd_n^2\alpha_j^n}{n^2(1-\alpha_j^n)} \right| \geq \Re \left(1 - \frac{2ivd_n^2\alpha_j^n}{n^2(1-\alpha_j^n)} \right) \geq \frac{h}{2}.$$

En utilisant cela dans (3.122), nous obtenons

$$\left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(0, v) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{h\sqrt{n}} \left(1 + \frac{2|v|d_n^2}{n^2} \right) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|\alpha_j^n|}{1-\alpha_j^n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4+8|v|}{h\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{|\alpha_j^n|}{1-\alpha_j^n}.$$

Or, d'après le lemme 8, nous avons, avec des O uniformes pour les $j \leq \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\frac{1}{1-\alpha_j^n} = O(1) + O\left(\frac{n^2}{d_n^2 j^2}\right). \quad (3.123)$$

En combinant cela avec l'inégalité (3.17) d'après laquelle

$$|\alpha_j^n| \leq 1 \wedge \frac{n}{2d_n j}, \quad (3.124)$$

nous obtenons

$$\frac{\alpha_j^n}{1-\alpha_j^n} = O\left(\frac{n}{d_n j}\right) + O\left(\frac{n^2}{d_n^2 j^2}\right),$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{|\alpha_j^n|}{1-\alpha_j^n} = O\left(\frac{n \ln n}{d_n}\right) + O\left(\frac{n^2}{d_n^2}\right). \quad (3.125)$$

Nous en déduisons que

$$\frac{\partial G_n}{\partial u}(0, v) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{\sqrt{n}(\ln n)}{d_n}\right) + O\left(\frac{n^{3/2}}{d_n^2}\right) = o(1),$$

puisque $d_n \gg n^{3/4}$. Nous avons, de même,

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0, v) = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(1-\alpha_j^n - 2ivd_n^2\alpha_j^n/n^2)^2} = -2 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(1-\alpha_j^n - 2ivd_n^2\alpha_j^n/n^2)^2} - 1 \right).$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0, v) + 2 \right| &\leq \frac{2}{n} + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left| 2\alpha_j^n(1 + 2ivd_n^2/n^2) + (\alpha_j^n)^2(1 + 2ivd_n^2/n^2)^2 \right|}{|1 - \alpha_j^n - 2ivd_n^2\alpha_j^n/n^2|^2} \\ &\leq \frac{2}{n} + \frac{8}{nh^2} \left(1 + \frac{2|v|d_n^2}{n^2} \right)^2 \left(2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|\alpha_j^n|}{(1-\alpha_j^n)^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|\alpha_j^n|^2}{(1-\alpha_j^n)^2} \right) \\ &\leq \frac{2}{n} + \frac{48(1+2|v|)^2}{nh^2} \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{|\alpha_j^n|}{(1-\alpha_j^n)^2}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Il découle de (3.123) et (3.124) que, pour $j \leq \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\frac{\alpha_j^n}{(1-\alpha_j^n)^2} = O\left(\frac{n^4}{d_n^4 j^4}\right) + O\left(\frac{n}{d_n j}\right),$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{|\alpha_j^n|}{(1 - \alpha_j^n)^2} = O\left(\frac{n^4}{d_n^4}\right) + O\left(\frac{n \ln n}{d_n}\right).$$

En utilisant cela dans (3.126), nous obtenons

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0, v) = -2 + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{n^3}{d_n^4}\right) + O\left(\frac{\ln n}{d_n}\right) = -2 + o(1).$$

Enfin, nous avons, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3 G_n}{\partial u^3}(tu) \right| &= \left| \frac{8}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(1 - \alpha_j^n - 2itu/\sqrt{n} - 2iv d_n^2 \alpha_j^n / n^2)^3} \right| \\ &\leq \frac{128}{n^{3/2} h^3} \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(1 - \alpha_j^n)^3}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\frac{|u|^3}{6} \sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{\partial^3 G_n}{\partial u^3}(tu) \right| \leq \frac{64|u|^3}{3n^{3/2} h^3} \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(1 - \alpha_j^n)^3}. \quad (3.127)$$

Or, d'après (3.123), nous avons pour $j \leq \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\frac{1}{(1 - \alpha_j^n)^3} = O(1) + O\left(\frac{n^6}{d_n^{12} j^{12}}\right),$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(1 - \alpha_j^n)^3} = O(n) + O\left(\frac{n^6}{d_n^{12}}\right).$$

En insérant cela dans (3.127), il vient

$$\frac{|u|^3}{6} \sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{\partial^3 G_n}{\partial u^3}(tu) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{n^{9/2}}{d_n^6}\right) = o(1),$$

où nous avons encore utilisé le fait que $d_n \gg n^{3/4}$. En utilisant tout cela dans l'inégalité (3.92) nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(u, v) = G_\infty(0, v) - u^2 = G_\infty(u, v),$$

ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

5.3 Déplacement du contour d'intégration

Nous souhaitons ici encore utiliser la méthode du col pour approcher l'intégrale dans (3.109). Pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C} \times V$, nous avons

$$\frac{\partial F_\infty}{\partial u}(x, y, z, u, v) + \frac{\partial G_\infty}{\partial u}(u, v) = -i(x - z^2) - 2u.$$

Nous considérons donc le point-col

$$u^\star = u^\star(x, z) = -\frac{i(x - z^2)}{2}.$$

Pour ce qui est de la seconde variable complexe, nous choisissons de poser

$$v^* = v^*(y) = -i \operatorname{sg}(y) = \begin{cases} -i & \text{si } y \geq 0, \\ +i & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui n'est pas le point-col, mais qui nous suffira pour obtenir notre résultat, l'important étant que le terme $-iyv^* = -|y|$ nous permette d'avoir une fonction intégrable en y , comme nous le verrons plus loin. Nous souhaitons ensuite déplacer le contour d'intégration de $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ à $(u, v) \in (u^*, v^*) + \mathbb{R}^2$. Le déplacement de la variable v s'effectue de manière similaire au déplacement que nous avons effectué en (3.108), en prenant $v_0 = v^*$. Nous obtenons alors

$$E_n = C_n \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \exp \left(F_n(x, y, z, u, v^* + v) + G_n(u, v^* + v) \right). \quad (3.128)$$

De même qu'en section 4.3, nous démontrons le résultat suivant, pour pouvoir intervertir les sommations sur u et sur v :

Lemme 22. *Il existe $K > 0$ tel que, à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$ et pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$\Re G_n(tu^* + u, v^* + v) - G_n(tu^*, v^*) \leq M_K(u, v) + 2 \ln(203 + z^2),$$

où $M_K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$M_K(u, v) = -2 \ln(1 + Ku^2) - \ln(1 + (|v| - |u|)_+^2). \quad (3.129)$$

Démonstration. Soit $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$, et soit $t \in [0, 1]$. Nous commençons par écrire

$$\Re G_n(tu^* + u, v^* + v) - G_n(tu^*, v^*) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{4(u/\sqrt{n} + vd_n^2 \alpha_j^n/n^2)^2}{(1 - \alpha_j^n - 2itu^*/\sqrt{n} - 2iv^* d_n^2 \alpha_j^n/n^2)^2} \right).$$

Nous nous intéressons tout d'abord aux quatre premières valeurs propres, et notons

$$S_1 = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \ln \left(1 + \frac{4(u/\sqrt{n} + vd_n^2 \alpha_j^n/n^2)^2}{(1 - \alpha_j^n - 2itu^*/\sqrt{n} - 2iv^* d_n^2 \alpha_j^n/n^2)^2} \right).$$

D'après le lemme 8, nous avons à partir d'un certain rang,

$$\max_{j \leq 4} (1 - \alpha_j^n) \leq \frac{200d_n^2}{n^2}.$$

Nous avons alors, pour $j \leq 4$,

$$1 - \alpha_j^n - \frac{2itu^*}{\sqrt{n}} - \frac{2iv^* d_n^2 \alpha_j^n}{n^2} \leq \frac{200d_n^2}{n^2} - \frac{x - z^2}{\sqrt{n}} + \frac{2d_n^2}{n^2} \leq \frac{d_n^2}{n^2} \left(202 + \frac{n^{3/4}}{d_n} + \frac{z^2 n^{3/2}}{d_n^2} \right),$$

où nous avons utilisé le fait que $|v^*| = 1$ et $|x| \leq d_n/n^{3/4}$. De plus, nous avons $n^{3/4}/d_n \leq 1$ à partir d'un certain rang, ce qui nous permet d'écrire

$$1 - \alpha_j^n - \frac{2iu^*}{\sqrt{n}} - \frac{2iv^* d_n^2 \alpha_j^n}{n^2} \leq \frac{d_n^2}{n^2} (203 + z^2).$$

Nous avons alors

$$S_1 \leq -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \ln \left(1 + \frac{4(u/\sqrt{n} + vd_n^2 \alpha_j^n/n^2)^2}{(d_n^2/n^2)(203 + z^2)^2} \right) \leq -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \ln \left(1 + \frac{4(v \alpha_j^n + u n^{3/2}/d_n^2)^2}{(203 + z^2)^2} \right).$$

Utilisant encore qu'à partir d'un certain rang, $n^{3/4}/d_n \leq 1/2$ et $\alpha_j^n \geq 1/2$ pour tout $j \leq 4$, nous obtenons

$$\left| v \alpha_j^n + \frac{un^{3/2}}{d_n^2} \right| \geq \left(|v \alpha_j^n| - \left| \frac{un^{3/2}}{d_n^2} \right| \right)_+ \geq \frac{(|v| - |u|)_+}{2},$$

à partir d'un certain rang qui ne dépend pas de u et v . Nous avons donc, à partir d'un certain rang,

$$S_1 \leq -\ln \left(1 + \frac{(|v| - |u|)_+^2}{(203 + z^2)^2} \right) \leq -\ln \left(1 + (|v| - |u|)_+^2 \right) + 2 \ln(203 + z^2). \quad (3.130)$$

Nous passons maintenant aux autres valeurs propres, et nous notons

$$S_2 = -\frac{1}{4} \sum_{j=5}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{4(u/\sqrt{n} + v d_n^2 \alpha_j^n / n^2)^2}{(1 - \alpha_j^n - 2itu^* / \sqrt{n} - 2iv^* d_n^2 \alpha_j^n / n^2)^2} \right).$$

D'après la définition (3.106) du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons $x - z^2 \geq -\sqrt{n}$. Nous en déduisons que pour tout $j \in \{5, \dots, n-1\}$,

$$1 - \alpha_j^n - \frac{2itu^*}{\sqrt{n}} - \frac{2iv^* d_n^2 \alpha_j^n}{n^2} \leq 2 - \frac{x - z^2}{\sqrt{n}} + \frac{2d_n^2}{n^2} \leq 5,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$S_2 \leq -\frac{1}{4} \sum_{j=5}^{n-1} \ln \left[1 + \frac{4}{25} \left(\frac{u}{\sqrt{n}} + \frac{v d_n^2 \alpha_j^n}{n^2} \right)^2 \right].$$

Selon le lemme 10, il existe une constante $K_0 > 0$ telle que

$$|J_{n,u,v}| \geq K_0 n,$$

où

$$J_{n,u,v} = \left\{ j \in \{5, \dots, n-1\} : uv \alpha_j^n \geq 0 \right\}.$$

Nous en déduisons que

$$S_2 \leq -\frac{|J_{n,u,v}|}{4} \ln \left(1 + \frac{4u^2}{25n} \right) \leq -\frac{K_0 n}{4} \ln \left(1 + \frac{4u^2}{25n} \right).$$

Pour $n \geq 8/K_0$, nous avons, par concavité du logarithme,

$$S_2 \leq -\frac{K_0}{4} \left\lceil \frac{8}{K_0} \right\rceil \ln \left(1 + \frac{4u^2}{25 \lceil 8/K_0 \rceil} \right).$$

En combinant cela avec (3.130), nous obtenons l'existence d'une constante $K > 0$ telle que, à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\Re G_n(tu^* + u, v^* + v) - G_n(tu^*, v^*) \leq -2 \ln(1 + Ku^2) - \ln \left(1 + (|v| - |u|)_+^2 \right) + 2 \ln(203 + z^2),$$

ce qui est bien la minoration recherchée. $\square$

Nous démontrons ensuite :

Lemme 23. *Pour tout $K > 0$, la fonction e^{M_K} , où $M_K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par (3.129), est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration. Soit $K > 0$. Nous avons, dans $[0, +\infty]$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} du dv e^{M_K(u, v)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{(1 + Ku^2)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{1 + K(|v| - |u|)_+^2}.$$

Nous écrivons alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{1 + K(|v| - |u|)_+^2} = 2|u| + 2 \int_0^{+\infty} \frac{dv}{1 + Kv^2} = 2|u| + \frac{\pi}{\sqrt{K}},$$

et nous avons donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} du dv e^{M_0(u, v)} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{(2|u| + \pi/\sqrt{K})}{(1 + Ku^2)^2} du < +\infty,$$

puisque

$$\frac{(2|u| + \pi/\sqrt{K})}{(1 + Ku^2)^2} = O\left(\frac{1}{|u|^3}\right)$$

quand $|u| \rightarrow \infty$. □

Revenons maintenant à l'équation (3.128), dans laquelle nous souhaitons intervertir la sommation sur u et celle sur v . Pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\Re F_n(x, y, z, u, v^* + v) = F_n(x, y, z, 0, v^*).$$

Ainsi, il découle du lemme 22 appliqué avec $t = 0$ qu'à partir d'un certain rang qui est le même pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\left| e^{F_n(x, y, z, u, v^* + v) + G_n(u, v^* + v)} \right| \leq (203 + z^2)^2 e^{F_n(x, y, z, 0, v^*) + G_n(0, v^*) + M_K(u, v)},$$

qui est une fonction intégrable de (u, v) d'après le lemme 23. En vertu du théorème de Fubini, nous pouvons donc intervertir l'intégrale sur u et l'intégrale sur v dans la formule (3.128), pour obtenir

$$E_n = C_n \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}} du \exp \left(F_n(x, y, z, u, v^* + v) + G_n(u, v^* + v) \right).$$

Nous raisonnons maintenant à $(x, y, z, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}$ et n fixés, et nous allons déplacer le contour d'intégration de la variable u . La fonction $u \mapsto F_n(x, y, z, u, v^* + v)$ est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. La fonction $u \mapsto G_n(u, v^* + v)$, quant à elle, est holomorphe sur l'ouvert

$$\left\{ u \in \mathbb{C} \quad : \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad 1 + \frac{2\Im u}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} - \frac{2\operatorname{sg}(y)d_n^2\alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} > 0 \right\}. \quad (3.131)$$

Nous souhaitons déplacer la variable u de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R} + u^*$, où

$$u^* = -\frac{i(x - z^2)}{2}.$$

Or, d'après la définition (3.106) du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons $|x| \leq d_n/n^{3/4} \leq n^{1/4}$, d'où

$$\forall t \in [0, 1] \quad 1 + \frac{2t\Im u^*}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} - \frac{2\operatorname{sg}(y)d_n^2\alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \geq 1 - \frac{d_n}{n^{5/4}(1 - M_n)} - \frac{2d_n^2}{n^2(1 - M_n)}. \quad (3.132)$$

Selon le lemme 9, nous avons

$$1 - M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi^2 d_n^2}{3n^2},$$

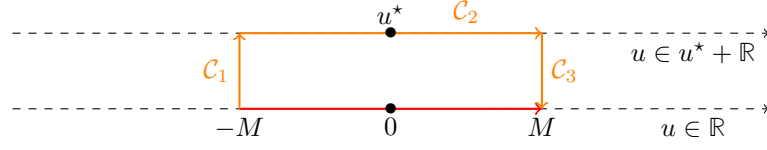


FIGURE 3.2 – Le théorème de Cauchy nous permet de remplacer l'intégrale sur $[-M, M]$ par celle sur les contours C_1 , C_2 et C_3 .

d'où

$$1 - \frac{d_n}{n^{5/4}(1 - M_n)} - \frac{2d_n^2}{n^2(1 - M_n)} = 1 - O\left(\frac{n^{3/4}}{d_n}\right) - \frac{3}{\pi^2}(1 + o(1)) = 1 - \frac{3}{\pi^2} + o(1). \quad (3.133)$$

Nous en déduisons qu'à partir d'un certain rang, qui ne dépend pas de $(x, y, z, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}$, nous avons

$$1 - \frac{d_n}{n^{5/4}(1 - M_n)} - \frac{2d_n^2}{n^2(1 - M_n)} > 0,$$

et dans ce cas, le contour représenté sur la figure 3.2 est entièrement inclus dans l'ouvert donné par (3.131). Ainsi, en vertu du théorème de Cauchy, nous obtenons, pour $M > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M du e^{F_n(x, y, z, u, v^* + v) + G_n(u, v^* + v)} &= \int_0^1 u^* dt e^{F_n(x, y, z, -M + tu^*, v^* + v) + G_n(-M + tu^*, v^* + v)} \\ &+ \int_{-M}^M du e^{F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v)} \\ &+ \int_1^0 u^* dt e^{F_n(x, y, z, M + tu^*, v^* + v) + G_n(M + tu^*, v^* + v)}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 22, pour $M > 0$ et $t \in [0, 1]$, nous pouvons écrire

$$\left| e^{F_n(x, y, z, \pm M + tu^*, v^* + v) + G_n(\pm M + tu^*, v^* + v)} \right| \leq (203 + z^2)^2 e^{F_n(x, y, z, tu^*, v^*) + G_n(tu^*, v^*) + M_0(\pm M, v)} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0,$$

uniformément par rapport à $t \in [0, 1]$. Nous en déduisons que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^1 u^* dt e^{F_n(x, y, z, \pm M + tu^*, v^* + v) + G_n(\pm M + tu^*, v^* + v)} = 0,$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} du e^{F_n(x, y, z, u, v^* + v) + G_n(u, v^* + v)} = \int_{\mathbb{R}} du e^{F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v)}.$$

Nous obtenons alors, à partir d'un certain rang,

$$E_n = C_n \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}} du \exp\left(F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v)\right). \quad (3.134)$$

5.4 Domination

Nous cherchons maintenant à majorer le module de l'intégrande dans (3.134), uniformément par rapport à n . Nous démontrons le résultat suivant :

Lemme 24. *Il existe des constantes $K, K_1 > 0$ telles que, à partir d'un certain rang,*

$$\forall (x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2 \quad \Re(F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v)) \leq M(x, y, z, u, v),$$

où $M : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$M(x, y, z, u, v) = -\frac{9}{70}(x - z^2)^2 - \frac{xz^2}{2} + 3|x - z^2| - \frac{|y|}{2} + z^2 + 2 \ln(203 + z^2) + K_1 + M_K(u, v).$$

avec M_K la fonction donnée par (3.129).

Démonstration. Majoration du premier terme : Nous commençons par majorer la partie réelle de F_n . Nous avons, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \Re F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) &= -i(x - z^2)u^* - iyv^* - \frac{xz^2 + xyn^{3/2}/d_n^2}{2(1 + x/\sqrt{n})} \\ &= -\frac{(x - z^2)^2}{2} - |y| - \frac{xz^2}{2} + \frac{x^2z^2}{2(x + \sqrt{n})} - \frac{xy n^2}{2d_n^2(x + \sqrt{n})}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Par définition du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons $|x| \leq d_n/n^{3/4} \leq n^{1/4}$, d'où

$$\sqrt{n} + x \geq \sqrt{n} - n^{1/4} \geq \frac{\sqrt{n}}{2},$$

dès lors que $n \geq 16$. Nous avons alors d'une part

$$\frac{x^2z^2}{2(x + \sqrt{n})} \leq \frac{(n^{1/4})^2z^2}{\sqrt{n}} = z^2, \quad (3.136)$$

et d'autre part,

$$-\frac{xy n^2}{2d_n^2(x + \sqrt{n})} \leq \frac{n^{3/2}}{d_n^2}|xy| \leq \frac{n^{3/4}}{d_n}|y|.$$

Comme nous avons supposé $d_n \gg n^{3/4}$, nous avons $d_n \geq 2n^{3/4}$ à partir d'un certain rang, et donc

$$-\frac{xy n^2}{2d_n^2(x + \sqrt{n})} \leq \frac{|y|}{2}. \quad (3.137)$$

Ainsi, en utilisant (3.136) et (3.137) dans (3.135), nous obtenons qu'à partir d'un certain rang,

$$\forall (x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2 \quad \Re F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) \leq -\frac{(x - z^2)^2}{2} - \frac{xz^2}{2} - \frac{|y|}{2} + z^2. \quad (3.138)$$

Majoration du second terme : Soit $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$. Nous souhaitons maintenant trouver un majorant pour le terme $G_n(u^*, v^*)$. Pour cela, nous repartons de l'inégalité des accroissements finis (3.100). En reprenant nos calculs (3.132) et (3.133), nous avons

$$\Re \left(1 + \frac{2tu^*}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} + \frac{2v^*d_n^2\alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right) \geq 1 - \frac{d_n}{n^{5/4}(1 - M_n)} - \frac{2d_n^2}{n^2(1 - M_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{3}{\pi^2} > \frac{9}{13},$$

uniformément pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$ et pour tout $t \in [0, 1]$. Par conséquent, à partir d'un certain rang, nous avons

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{D}_n \quad \forall t \in [0, 1] \quad \Re \left(1 + \frac{2tu^*}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} + \frac{2v^*d_n^2\alpha_j^n}{n^2(1 - \alpha_j^n)} \right) \geq \frac{9}{13}, \quad (3.139)$$

ce qui correspond à la majoration (3.121) que nous avons utilisée pour établir la convergence simple, mais qui vaut maintenant de manière uniforme. Le choix de la constante 9/13 est un peu arbitraire, mais l'important est le fait que celle-ci soit strictement supérieure à 2/3, pour que la forme quadratique que nous obtiendrons à la fin soit bien définie positive (voir lemme 20). Notons d'ailleurs que la constante $3/\pi^2$ qui apparaît ci-dessus est purement contingente, puisqu'elle découle de notre choix arbitraire de poser $v^* = -i \operatorname{sg}(y)$. Si nous avions eu besoin d'une constante plus petite à cet endroit, il nous aurait donc suffi de choisir v^* plus petit. En reprenant l'expression (3.111) de G_n , nous avons, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) &= -i\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \alpha_j^n - 2itu^*/\sqrt{n} - 2iv^*d_n^2\alpha_j^n/n^2} \\ &= -i\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1 - \alpha_j^n - 2itu^*/\sqrt{n} - 2iv^*d_n^2\alpha_j^n/n^2} - 1 \right) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j^n + 2itu^*/\sqrt{n} + 2iv^*d_n^2\alpha_j^n/n^2}{1 - \alpha_j^n - 2itu^*/\sqrt{n} - 2iv^*d_n^2\alpha_j^n/n^2}. \end{aligned}$$

Nous avons donc, en utilisant (3.139),

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{13}{9\sqrt{n}} \left(1 + \frac{2|v^*|d_n^2}{n^2} \right) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|\alpha_j^n|}{1 - \alpha_j^n} + \frac{26t|u^*|}{9n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \alpha_j^n} \\ &\leq 1 + \frac{13}{3\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|\alpha_j^n|}{1 - \alpha_j^n} + \frac{26t|u^*|}{9} \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|\alpha_j^n|}{1 - \alpha_j^n} \right). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Nous reprenons maintenant la majoration (3.125) d'après laquelle

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{|\alpha_j^n|}{1 - \alpha_j^n} = O\left(\frac{n \ln n}{d_n}\right) + O\left(\frac{n^2}{d_n^2}\right) = o(\sqrt{n}).$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{|\alpha_j^n|}{1 - \alpha_j^n} \leq \sqrt{n} \leq \frac{n}{35},$$

et donc (3.140) devient

$$\left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) \right| \leq 1 + \frac{13}{3} + \frac{26t|u^*|}{9} \times \frac{36}{35} \leq 6 + \frac{104t|u^*|}{35}.$$

En utilisant cela dans l'inégalité (3.100), nous obtenons alors qu'à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$,

$$|G_n(u^*, v^*)| \leq K_1 + 6|u^*| + \frac{52|u^*|^2}{35} = 3|x - z^2| + \frac{13(x - z^2)^2}{35}. \quad (3.141)$$

En combinant nos majorations (3.138) et (3.141) avec le résultat du lemme 22, nous obtenons bien la domination annoncée, à partir d'un certain rang qui est le même pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$. $\square$

Il nous faut maintenant vérifier :

Lemme 25. *La fonction e^M est intégrable sur $\mathbb{R}^5$.*

Démonstration. Nous avons, dans $[0, +\infty]$,

$$\int_{\mathbb{R}^5} dx dy dz du dv e^{M(x,y,z,u,v)} = e^{K_1} \int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz e^{M(x,y,z,0,0)} \times \int_{\mathbb{R}^2} du dv e^{M_K(u,v)}.$$

Nous avons déjà démontré l'intégrabilité de la fonction e^{M_K} sur $\mathbb{R}^2$ dans le lemme 23. Il nous reste donc à prouver que

$$\int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz e^{M(x,y,z,0,0)} < +\infty.$$

Pour cela, nous écrivons, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$M(x, y, z, 0, 0) = -\frac{9}{70} \left[(x - z^2)^2 + \frac{35}{9} x z^2 \right] + 3|x - z^2| - \frac{|y|}{2} + z^2 + 2 \ln(203 + z^2)$$

Nous remarquons ensuite que

$$\begin{aligned} (x - z^2)^2 + \frac{35}{9} x z^2 &= x^2 + \frac{17}{9} x z^2 + z^4 \\ &= \left(x + \frac{17}{18} z^2 \right)^2 + \left(1 - \frac{17^2}{18^2} \right) z^4 \\ &= \left(x + \frac{17}{18} z^2 \right)^2 + \frac{35}{324} z^4. \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$M(x, y, z, 0, 0) = -\frac{9}{70} \left(x + \frac{17}{18} z^2 \right)^2 - \frac{z^4}{72} + 3|x - z^2| - \frac{|y|}{2} + z^2 + 2 \ln(203 + z^2).$$

Dans l'intégrale, nous effectuons alors le changement de variable

$$x = \tau - \frac{17}{18} z^2,$$

et nous obtenons, dans $[0, +\infty]$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz e^{M(x,y,z,0,0)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\tau dy dz (203 + z^2)^2 \exp \left(-\frac{9\tau^2}{70} - \frac{z^4}{72} + 3 \left| \tau - \frac{35z^2}{18} \right| - \frac{|y|}{2} + z^2 \right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} d\tau \exp \left(3|\tau| - \frac{9\tau^2}{70} \right) \times \int_{\mathbb{R}} dy e^{-|y|/2} \times \int_{\mathbb{R}} dz (203 + z^2)^2 \exp \left(\frac{41z^2}{6} - \frac{z^4}{72} \right) < +\infty. \end{aligned}$$

La fonction e^M est donc bien intégrable sur $\mathbb{R}^5$. □

5.5 Convergence dominée

Nous sommes désormais en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure la preuve du théorème 6. Rappelons l'égalité (3.134) :

$$E_n = C_n \int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}} du e^{F_n(x,y,z,u^*+u,v^*+v)+G_n(u^*+u,v^*+v)} \mathbb{1}_{(x,y,z) \in \mathcal{D}_n}.$$

D'après l'équation (3.112) et le lemme 21, nous avons la convergence simple, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v) \right) \mathbb{1}_{(x,y,z) \in \mathcal{D}_n} \\ = \exp \left(F_\infty(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_\infty(u^* + u, v^* + v) \right), \end{aligned}$$

où

$$F_\infty(x, y, z, u^\star + u, v^\star + v) = -\frac{(x - z^2)^2}{2} - iu(x - z^2) - |y| - ivy - \frac{xz^2}{2}$$

et

$$G_\infty(u^\star + u, v^\star + v) = \frac{(x - z^2)^2}{4} + iu(x - z^2) - u^2 - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{3i(v^\star + v)}{\pi^2 j^2} \right).$$

En additionnant, nous obtenons donc, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(F_n(x, y, z, u^\star + u, v^\star + v) + G_n(u^\star + u, v^\star + v) \right) \mathbb{1}_{(x, y, z) \in \mathcal{D}_n} = \exp \left(J(x, y, z, u, v) \right),$$

avec

$$J(x, y, z, u, v) = -\frac{x^2}{4} - \frac{z^4}{4} - u^2 - |y| - ivy - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{3i(v^\star + v)}{\pi^2 j^2} \right).$$

D'après les lemmes 24 et 25 et le fait que la fonction g est bornée, l'hypothèse de domination est bien vérifiée à partir d'un certain rang. Nous avons donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$E_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_n \int_{\mathbb{R}^5} dx dy dz du dv g(z) e^{J(x, y, z, u, v)} = 2\pi C_n D \int_{\mathbb{R}} dz g(z) e^{-z^4/4},$$

où

$$D = \int_{\mathbb{R}^2} dy dv \exp \left[-|y| - ivy - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{3i(v^\star + v)}{\pi^2 j^2} \right) \right].$$

Ainsi, comme précédemment, la variable z se retrouve bien séparée des autres variables, et donc la somme qui apparaît dans D ne joue aucun rôle dans la loi limite de $S_n/n^{3/4}$. C'est cela qui changera dans la partie suivante, c'est-à-dire dans le régime $d_n \sim \lambda n^{3/4}$, parce que nous aurons alors un terme qui liera les deux variables y et z . Pour revenir au cas présent, souvenons-nous que d'après (3.103), nous avons

$$\hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right] = E_n + \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \mathbb{1}_{|T_n - n| > d_n / \sqrt[4]{n}} \right] = E_n + o(1).$$

Nous en déduisons que

$$\hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi C_n D \int_{\mathbb{R}} dz g(z) e^{-z^4/4}.$$

En appliquant cela à la fonction constante $g \equiv 1$, il vient

$$1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi C_n D \int_{\mathbb{R}} dz e^{-z^4/4}.$$

Nous avons donc, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right] = \frac{\int_{\mathbb{R}} dz g(z) e^{-z^4/4}}{\int_{\mathbb{R}} dz e^{-z^4/4}} = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/4)} \int_{\mathbb{R}} dz g(z) e^{-z^4/4},$$

ce qui démontre bien la convergence en loi annoncée dans le théorème 6. □

6 Preuve du théorème 7

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 7. Nous supposons donc que le paramètre d_n est tel que

$$d_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda n^{3/4} \quad \text{avec} \quad \lambda > 0,$$

nous prenons une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, et notre objectif est de déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right].$$

Nous procédons selon le même plan que la preuve du théorème 6 (voir section 5), avec toutefois quelques modifications.

6.1 Une borne sur le Hamiltonien

Nous commençons par démontrer une borne inférieure sur le terme d'interaction, qui nous sera utile pour obtenir une domination par une fonction intégrable.

Lemme 26. *Pour toute suite positive $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_n \gg n \ln n / d_n$, nous avons*

$$\hat{\mu}_n(H_n < -a_n) = O\left(\frac{e^{-a_n/8}}{Z_n}\right).$$

Démonstration. Soit (a_n) une suite de réels positifs vérifiant $a_n \gg n \ln n / d_n$. Nous écrivons tout d'abord

$$\hat{\mu}_n(H_n < -a_n) = \frac{1}{Z_n} \mu_n \left[\exp\left(\frac{nH_n}{2T_n}\right) \mathbb{1}_{H_n < -a_n} \right] \leq \frac{1}{Z_n} \mu_n(H_n < -a_n). \quad (3.142)$$

Ensuite, d'après l'inégalité de Tchebychev, nous avons

$$\begin{aligned} \mu_n(H_n < -a_n) &\leq e^{-a_n/4} \mu_n(e^{-H_n/4}) \\ &= e^{-a_n/4} \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left(e^{-\alpha_j^n Y_j^2/4}\right) \\ &= \exp \left[-\frac{a_n}{4} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \ln \left(1 + \frac{\alpha_j^n}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $|\alpha_j^n| \leq 1$. La fonction logarithme étant lipschitzienne sur le segment $[1/2, 3/2]$, nous en déduisons que

$$\sum_{j=1}^n \ln \left(1 + \frac{\alpha_j^n}{2} \right) = O\left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j^n| \right) = O\left(\frac{n \ln n}{d_n} \right),$$

d'après la majoration (3.18). Comme $a_n \gg n \ln n / d_n$, nous avons donc, à partir d'un certain rang,

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \ln \left(1 + \frac{\alpha_j^n}{2} \right) \leq \frac{a_n}{8}.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, notre majoration (3.143) devient

$$\mu_n(H_n < -a_n) \leq \exp\left(-\frac{a_n}{8}\right).$$

En remplaçant dans (3.142), nous obtenons bien le résultat annoncé. $\square$

6.2 Mise en forme de l'intégrale

Il découle du lemme 3 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \left(|T_n - n| > n^{3/4} \right) = 0.$$

De plus, d'après le lemme 26, nous avons

$$\hat{\mu}_n \left(H_n < -n^{3/4} \right) = O \left(\frac{e^{-n^{3/4}/8}}{Z_n} \right),$$

ce qui nous permettra de montrer que ce terme tend vers 0, une fois que nous connaîtrons l'ordre de grandeur de Z_n (voir section 6.6). Nous laissons donc ce terme de côté pour l'instant, et nous posons

$$E_n = \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \mathbb{1}_{|T_n - n| \leq n^{3/4}} \mathbb{1}_{H_n \geq -n^{3/4}} \right].$$

Avec la densité donnée par le lemme 12, nous avons donc, pour tout $n \geq n_I$,

$$\begin{aligned} E_n = & \frac{1}{(2\pi)^{5/2} Z_n \sqrt{n}} \int_{n-n^{3/4}}^{n+n^{3/4}} dx \int_{-n^{3/4}}^{+\infty} dy \int_{\mathbb{R}} dz g \left(\frac{z}{n^{3/4}} \right) \exp \left(\frac{ny}{2x} \right) \mathbb{1}_{2x > x+y > 2z^2/n} \\ & \times \int_{\mathbb{R}^2} du dv \exp \left[-iu \left(x - \frac{z^2}{n} \right) - iv \left(y - \frac{z^2}{n} \right) - \frac{z^2}{2n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - 2iu - 2iv \alpha_j^n \right) \right]. \end{aligned}$$

Nous faisons cette fois-ci le changement de variables

$$x = n + x' \sqrt{n}, \quad y = y' \sqrt{n}, \quad z = z' n^{3/4}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{n}}, \quad v = \frac{v'}{\sqrt{n}},$$

ce qui nous donne

$$\forall n \geq n_I \quad E_n = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}^2} du dv e^{A_n(x,y,z,u,v)},$$

où le domaine $\mathcal{D}_n$ est maintenant défini par

$$\mathcal{D}_n = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq n^{1/4}, \quad y \geq -n^{1/4} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{n} + 2x > \sqrt{n} + x + y > 2z^2 \right\}, \quad (3.144)$$

et où

$$A_n(x, y, z, u, v) = \frac{y\sqrt{n}}{2(1+x/\sqrt{n})} - iu\sqrt{n} - iu(x-z^2) - iv(y-z^2) - \frac{z^2\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}} \right).$$

Nous déplaçons alors le contour d'intégration de la même manière qu'en section 5.1, cette fois-ci de $v \in \mathbb{R}$ à

$$v \in v_0 + \mathbb{R} \quad \text{où} \quad v_0 = -\frac{i\sqrt{n}}{2}.$$

Ce déplacement de contour se justifie comme en section 5.1, et nous permet d'obtenir

$$\forall n \geq n_I \quad E_n = \frac{n^{1/4}}{(2\pi)^{5/2} Z_n} \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv e^{B_n(x,y,z,u,v)},$$

où

$$B_n(x, y, z, u, v) = -\frac{xy}{2(1+x/\sqrt{n})} - iu\sqrt{n} - iu(x-z^2) - iv(y-z^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \alpha_j^n - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}} \right).$$

Nous effectuons enfin le changement de variable

$$v = v' - u,$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$\forall n \geq n_I \quad E_n = C_n \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv e^{F_n(x,y,z,u,v)+G_n(u,v)},$$

avec la même constante C_n donnée par (3.110), et avec

$$F_n(x, y, z, u, v) = -iu(x - y) - iv(y - z^2) - \frac{xy}{2(1 + x/\sqrt{n})}$$

et

$$G_n(u, v) = -iu\sqrt{n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2iu}{\sqrt{n}} - \frac{2iv \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \right). \quad (3.145)$$

6.3 Convergence simple de l'intégrande

Nous avons directement

$$\forall (x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y, z, u, v) = F_\infty(x, y, z, u, v),$$

où

$$F_\infty(x, y, z, u, v) = -iu(x - y) - iv(y - z^2) - \frac{xy}{2}.$$

De même qu'en section 5.2, ici $G_n(u, v)$ est défini à partir d'un certain rang si $(u, v) \in \mathbb{C} \times V$, avec maintenant

$$V = \left\{ v \in \mathbb{C} : \Im v > -\frac{\pi^2 \lambda^2}{3} \right\}.$$

La limite simple de G_n est alors donnée par le lemme suivant :

Lemme 27. *Nous avons la convergence simple :*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C} \times V \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(u, v) = G_\infty(u, v),$$

où

$$G_\infty(u, v) = -u^2 - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 \lambda^2 j^2} \right).$$

Démonstration. Soit $(u, v) \in \mathbb{C} \times V$. Nous démontrons que $G_n(0, v) \rightarrow G_\infty(0, v)$ de la même manière que dans la preuve du lemme 21, sauf qu'un terme supplémentaire vient maintenant s'ajouter dans la majoration de $\delta_n^1(v)$. En effet, nous écrivons cette fois-ci

$$\delta_n^1(v) = \sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} \left[-\ln \left(1 - \frac{2iv \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \right) + \ln \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 \lambda^2 j^2} \right) \right],$$

et nous avons donc

$$\begin{aligned}
|\delta_n^1(v)| &= O\left(\sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} \left| \frac{\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} - \frac{3}{2\pi^2 \lambda^2 j^2} \right| \right) \\
&= O\left(\sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} \left| \frac{\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} - \frac{3n^{3/2}}{2\pi^2 d_n^2 j^2} \right| + \sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} \left| \frac{3n^{3/2}}{2\pi^2 d_n^2 j^2} - \frac{3}{2\pi^2 \lambda^2 j^2} \right| \right) \\
&= O\left(\sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} \frac{1}{j^2} \left| \frac{n^{3/2}}{d_n^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| \right) \\
&= O\left(\frac{\sqrt{n}}{d_n}\right) + o\left(\sum_{j=1}^{\lfloor n/d_n \rfloor} \frac{1}{j^2}\right) = o(1).
\end{aligned}$$

Pour ce qui est de la dépendance en u , le fait qu'il n'y a plus de $(1-\alpha_j^n)$ au dénominateur dans le terme en u simplifie un peu les calculs. De même que dans la preuve du lemme 21, nous disposons de $h > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang,

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad \Re \left(1 - \frac{2itu}{\sqrt{n}} - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right) \geq h. \quad (3.146)$$

Nous avons maintenant

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_n}{\partial u}(0, v) &= -i\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^{-1} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \left[\left(1 - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^{-1} - 1 \right] \\
&= -\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{2v}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j^n}{1-\alpha_j^n} \left(1 - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^{-1},
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\partial G_n}{\partial u}(0, v) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|\alpha_j^n|}{1-M_n}\right) = o(1) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n|\right),$$

où nous avons utilisé l'équivalent de $1 - M_n$ donné par le lemme 9. En utilisant maintenant la majoration (3.18), il vient

$$\frac{\partial G_n}{\partial u}(0, v) = o(1) + O\left(\frac{\sqrt{n}(\ln n)}{d_n}\right) = o(1).$$

Nous avons, de même,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0, v) &= -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^{-2} \\
&= -\frac{2(n-1)}{n} - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left[\left(1 - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^{-2} - 1 \right] \\
&= -2 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{4iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} - \left(\frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{2iv\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^{-2},
\end{aligned}$$

d'où il découle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_n}{\partial u^2}(0, v) &= -2 + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}(1-M_n)} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n|\right) + O\left(\frac{1}{n^2(1-M_n)^2} \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j^n)^2\right) \\ &= -2 + o(1) + O\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n|\right) = -2 + o(1). \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant (3.146) nous obtenons, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\left| \frac{\partial^3 G_n}{\partial u^3}(tu) \right| = \left| \frac{8}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2itu}{\sqrt{n}} - \frac{2iv \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^{-3} \right| \leq \frac{8}{h^3 \sqrt{n}},$$

et donc nous avons bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(u, v) = G_\infty(0, v) - u^2 = G_\infty(u, v),$$

comme dans le lemme 21. $\square$

6.4 Déplacement du contour d'intégration

Nous avons maintenant

$$u^\star = -\frac{i(x-y)}{2}, \quad (3.147)$$

et nous définissons cette fois

$$v^\star = +i, \quad (3.148)$$

ce qui nous donnera un terme $iz^2 v^\star = -z^2$ qui assurera l'intégrabilité par rapport à z . Le déplacement du contour d'intégration de (u, v) pour le faire passer par $u^\star$ et $v^\star$ se justifie de la même manière qu'en section 5.3. Pour montrer que nous avons le droit de permuter les intégrales sur u et sur v , nous démontrons :

Lemme 28. *Il existe $K > 0$ tel que, à partir d'un certain rang,*

$$\forall (x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \Re G_n(tu^\star + u, v^\star + v) - G_n(tu^\star, v^\star) \leq M_K(u, v),$$

où $M_K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$M_K(u, v) = -2 \ln(1 + Ku^2) - \ln\left(1 + K(|v| - |u|)_+^2\right). \quad (3.149)$$

Démonstration. Soit $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$, et soit $t \in [0, 1]$. Nous écrivons tout d'abord

$$\begin{aligned} &\Re G_n(tu^\star + u, v^\star + v) - G_n(tu^\star, v^\star) \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left[1 + 4 \left(\frac{u}{\sqrt{n}} + \frac{v \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^2 \left(1 - \frac{2itu^\star}{\sqrt{n}} - \frac{2iv^\star \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (3.150)$$

En remplaçant $u^\star$ et $v^\star$ par leur définition donnée par (3.147) et (3.148), il vient

$$1 - \frac{2itu^\star}{\sqrt{n}} - \frac{2iv^\star \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} = 1 - \frac{t(x-y)}{\sqrt{n}} + \frac{2\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \leq 1 + \frac{y-x}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}(1-M_n)}.$$

Or par définition du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons $y - x < \sqrt{n}$, d'où

$$1 - \frac{2itu^*}{\sqrt{n}} - \frac{2iv^* \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \leq 2 + \frac{2}{\sqrt{n}(1 - M_n)}.$$

D'après le lemme 9, nous avons

$$1 - M_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\pi^2 d_n^2}{3n^2} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\pi^2 \lambda^2}{3\sqrt{n}},$$

d'où

$$\frac{2}{\sqrt{n}(1 - M_n)} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{\pi^2 \lambda^2} < \frac{1}{\lambda^2}.$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang,

$$\frac{2}{\sqrt{n}(1 - M_n)} \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Nous avons alors, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$1 - \frac{2itu^*}{\sqrt{n}} - \frac{2iv^* \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \leq 2 + \frac{1}{\lambda^2}.$$

En remplaçant cela dans (3.150), nous avons à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$,

$$\Re G_n(tu^* + u, v^* + v) - G_n(tu^*, v^*) \leq -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left[1 + \frac{4}{2 + \lambda^{-2}} \left(\frac{u}{\sqrt{n}} + \frac{v \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \right)^2 \right].$$

De même que dans la preuve du lemme 22, nous posons

$$S_1 = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \ln \left[1 + \frac{4}{2 + \lambda^{-2}} \left(\frac{u}{\sqrt{n}} + \frac{v \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \right)^2 \right].$$

D'après le lemme 8, nous avons pour tout $j \leq 4$,

$$\frac{\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{2\pi^2 \lambda^2 j^2}.$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang n_0 ,

$$\forall j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \frac{\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \geq \frac{3}{64\pi^2 \lambda^2} \geq \frac{1}{214\lambda^2}.$$

Nous en déduisons que pour $n \geq n_0 \vee 214^2 \lambda^4$ et pour tout $j \leq 4$,

$$\left| \frac{u}{\sqrt{n}} + \frac{v \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \right| \geq \left(\left| \frac{v \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \right| - \left| \frac{u}{\sqrt{n}} \right| \right)_+ \geq \frac{(|v| - |u|)_+}{214\lambda^2}.$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$S_1 \leq -\ln \left(1 + \frac{4}{2 + \lambda^{-2}} \frac{(|v| - |u|)_+^2}{214^2 \lambda^4} \right).$$

L'autre terme

$$S_2 = -\frac{1}{4} \sum_{j=5}^{n-1} \ln \left[1 + \left(\frac{u}{\sqrt{n}} + \frac{v \alpha_j^n}{\sqrt{n}(1 - \alpha_j^n)} \right)^2 \right]$$

se traite alors exactement comme dans la preuve du lemme 22, ce qui nous permet d'obtenir l'inégalité voulue. $\square$

Ainsi, le déplacement du contour d'intégration de v et la permutation des intégrales sur u et v ne pose pas plus de problème que dans le régime $d_n \gg n^{3/4}$ (voir section 5.3). Le seul point un peu différent est le fait que la fonction $u \mapsto G_n(u, v^* + v)$, se retrouve être holomorphe sur l'ouvert

$$\left\{ u \in \mathbb{C} : 1 + \frac{2\Im u}{\sqrt{n}} - \frac{2\lambda^2 m_n}{\sqrt{n}(1+m_n)} > 0 \right\} \supset \left\{ u \in \mathbb{C} : \Im u > \lambda^2 - \frac{\sqrt{n}}{2} \right\}.$$

Or, d'après la définition (3.144) du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons

$$|x| \leq n^{1/4} \quad \text{et} \quad y \geq -n^{1/4},$$

d'où

$$\Im u^* = -\frac{x-y}{2} \geq -n^{1/4}.$$

et donc nous avons bien à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$,

$$\Im u^* \geq -n^{1/4} > \lambda^2 - \frac{\sqrt{n}}{2},$$

ce qui nous permet de déplacer le contour d'intégration de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R} + u^*$, de la même manière qu'en section 5.3. Nous obtenons alors une formule identique à (3.134), c'est-à-dire

$$E_n = C_n \int_{\mathcal{D}_n} dx dy dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}} du \exp \left(F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v) \right). \quad (3.151)$$

6.5 Domination

Nous cherchons maintenant à majorer le module de l'intégrande dans (3.151), uniformément par rapport à n . Nous démontrons le résultat suivant :

Lemme 29. *Il existe $K, K_1 > 0$ telles que, à partir d'un certain rang,*

$$\forall (x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2 \quad \Re \left(F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v) \right) \leq M(x, y, z, u, v),$$

où $M : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$M(x, y, z, u, v) = -\frac{x^2 + xy + y^2}{6} + |x| + 3|y| - z^2 + K_1 + M_K(u, v). \quad (3.152)$$

avec M_K donnée par (3.149).

Démonstration. Majoration du premier terme : Pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\begin{aligned} \Re F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) &= -i(x-y)u^* - i(y-z^2)v^* - \frac{xy}{2} + \frac{x^2y}{2(x+\sqrt{n})} \\ &= -\frac{(x-y)^2}{2} + y - z^2 - \frac{xy}{2} + \frac{x^2y}{2(x+\sqrt{n})}. \end{aligned}$$

D'après la définition (3.144) du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons $|x| \leq n^{1/4}$, d'où, à partir d'un certain rang,

$$\frac{x^2y}{2(x+\sqrt{n})} \leq \frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}-n^{1/4})}|y| \leq |y|.$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathcal{D}_n \times \mathbb{R}^2$,

$$\Re F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) \leq -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{xy}{2} + 2|y| - z^2. \quad (3.153)$$

Majoration du second terme : Soit $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$. Nous procédons de la même manière que dans la preuve du lemme 24. En reprenant l'expression (3.145) de G_n , nous avons, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) &= -i\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2itu^*}{\sqrt{n}} + \frac{2\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^{-1} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{2itu^*}{\sqrt{n}} - \frac{2\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right) \left(1 - \frac{2itu^*}{\sqrt{n}} + \frac{2\alpha_j^n}{\sqrt{n}(1-\alpha_j^n)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(2t|u^*| + \frac{2}{n(1-M_n)} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| \right) \left(1 - \frac{t(x-y)}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^{-1}. \quad (3.154)$$

Or, selon la définition (3.144) du domaine $\mathcal{D}_n$, nous avons

$$|x| \leq n^{1/4} \quad \text{et} \quad y \geq -n^{1/4},$$

d'où

$$1 - \frac{t(x-y)}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \geq 1 - \frac{2}{n^{1/4}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$1 - \frac{t(x-y)}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \geq \frac{3}{4},$$

et donc l'inégalité (3.154) devient

$$\left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{8t|u^*|}{3} + \frac{8}{3n(1-M_n)} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n|.$$

Or, d'après le lemme 9 et la majoration (3.18), nous avons

$$\frac{8}{3n(1-M_n)} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j^n|\right) = O\left(\frac{\sqrt{n}(\ln n)}{d_n}\right) = o(1).$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D}_n$, et pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons

$$\left| \frac{\partial G_n}{\partial u}(tu^*, v^*) \right| \leq 2 + \frac{8t|u^*|}{3}.$$

En utilisant cela dans (3.100), nous obtenons

$$|G_n(u^*, v^*)| \leq K_1 + 2|u^*| + \frac{4|u^*|^2}{3} = K_1 + |x-y| + \frac{(x-y)^2}{3}. \quad (3.155)$$

Le résultat du lemme découle alors de (3.153), (3.155) et du lemme 28. $\square$

Nous devons encore vérifier que la fonction obtenue bien intégrable :

Lemme 30. La fonction e^M , où M est la fonction donnée par (3.152), est intégrable sur $\mathbb{R}^5$.

Démonstration. Nous avons, dans $[0, +\infty]$,

$$\int_{\mathbb{R}^5} dx dy dz du dv e^{M(x,y,z,u,v)} = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{M(x,y,0,0,0)} \times \int_{\mathbb{R}} dz e^{-z^2} \times \int_{\mathbb{R}^2} du dv e^{M_K(u,v)}.$$

Il suffit alors d'écrire

$$M(x, y, 0, 0, 0) = -\frac{x^2 + xy + y^2}{6} + |x| + 3|y| = -\frac{1}{6} \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{8} + |x| + 3|y|$$

pour voir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{M(x,y,0,0,0)} \leq \int_{\mathbb{R}} dx e^{|x|-x^2/6} \times \int_{\mathbb{R}} dy e^{4|y|-y^2/8} < +\infty.$$

La fonction e^{M_K} étant intégrable sur $\mathbb{R}^2$ d'après le lemme 23, nous obtenons donc bien une intégrale finie. $\square$

6.6 Convergence dominée

Nous sommes désormais en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée. D'après les résultats de la section 6.3, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, nous avons la convergence simple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y, z, u^* + u, v^* + v) + G_n(u^* + u, v^* + v) = J(x, y, z, u, v),$$

avec

$$J(x, y, z, u, v) = -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + y - z^2 - u^2 - ivy + ivz^2 - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{3i(v+i)}{\pi^2 \lambda^2 j^2}\right).$$

L'hypothèse de domination est bien satisfaite à partir d'un certain rang, selon les lemmes 29 et 30. En vertu du théorème de convergence dominée, nous avons donc

$$E_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_n \int_{\mathbb{R}^5} dx dy dz du dv g(z) e^{J(x,y,z,u,v)} = 2\pi C_n \int_{\mathbb{R}^3} dy dz dv g(z) e^{J(0,y,z,0,v)}.$$

Dans le cas de la fonction constante $g \equiv 1$, en revenant à la définition (3.104) de E_n , nous avons

$$E_n \leq \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right] = 1,$$

d'où $C_n = O(1)$. En reprenant la définition (3.110) de C_n , nous en déduisons que

$$\frac{1}{Z_n} = O \left(n^{1/4} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_j^n}} \right). \quad (3.156)$$

Or, d'après le lemme 11, il existe une constante $K > 0$ telle que, à partir d'un certain rang,

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 - \alpha_j^n) \right| \leq K \frac{n \ln n}{d_n}.$$

Ainsi, notre estimation (3.156) devient

$$\frac{1}{Z_n} = O \left[n^{1/4} \exp \left(K \frac{n \ln n}{d_n} \right) \right]. \quad (3.157)$$

Souvenons-nous à présent que, comme expliqué au début de la section (6.2), pour toute fonction continue et bornée $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons

$$\hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right] = E_n + o(1) + O \left(\frac{e^{-n^{3/4}/8}}{Z_n} \right).$$

Étant donné (3.157) et le fait que $d_n \sim \lambda n^{3/4}$, ceci devient donc

$$\hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right] = E_n + o(1) + O \left[n^{1/4} \exp \left(K \frac{n \ln n}{d_n} - \frac{n^{3/4}}{8} \right) \right] = E_n + o(1).$$

Dans le cas de la fonction constante $g \equiv 1$, nous avons donc

$$1 \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} E_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\pi C_n \int_{\mathbb{R}^3} dy dz dv e^{J(0,y,z,0,v)}.$$

Nous en déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \left(2\pi \int_{\mathbb{R}^3} dy dz dv e^{J(0,y,z,0,v)} \right)^{-1}.$$

Ainsi, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \left[g \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right] = \frac{I(g)}{I(1)}, \quad (3.158)$$

où

$$I(g) = \int_{\mathbb{R}^3} dy dz dv g(z) e^{J(0,y,z,0,v)}. \quad (3.159)$$

6.7 Identification de la loi limite

Nous pouvons écrire

$$J(0, y, z, 0, v) = -\frac{y^2}{4} + f_{(y-z^2)}(v+i),$$

où, pour $\theta \in \mathbb{R}$, nous notons

$$f_\theta : v \mapsto -i\theta v - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 \lambda^2 j^2} \right),$$

qui est définie et holomorphe sur l'ouvert

$$V = \left\{ v \in \mathbb{C} : \Im v > -\frac{\pi^2 \lambda^2}{3} \right\}.$$

Ainsi, l'équation (3.159) devient

$$I(g) = \int_{\mathbb{R}} dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dy e^{-y^2/4} \int_{\mathbb{R}} dv e^{f_{(y-z^2)}(v+i)}.$$

Nous allons maintenant déplacer le contour d'intégration de la variable v pour nous débarrasser du terme i , ce qui revient à annuler notre dernier déplacement du contour de v (qui était tout de même utile pour obtenir une expression qui satisfait l'hypothèse de domination). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque. La fonction e^{f_θ} étant holomorphe sur l'ouvert V , nous avons d'après le théorème de Cauchy, pour tout $M > 0$,

$$\int_{-M}^M dv e^{f_\theta(v+i)} = \int_1^0 i dt e^{f_\theta(-M+it)} + \int_{-M}^M dv e^{f_\theta(v)} + \int_0^1 i dt e^{f_\theta(M+it)}.$$

Or pour tout $v \in V$ nous avons

$$\left| e^{f_\theta(v)} \right| = \exp \left[\theta \Im v - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{9|v|^2}{\pi^4 \lambda^2 j^4} \right) \right] \leq e^{\theta \Im v} \left(1 + \frac{9|v|^2}{\pi^4 \lambda^4} \right)^{-1/2},$$

d'où

$$\left| \int_0^1 i dt e^{f_\theta(\pm M + it)} \right| \leq e^{|\theta|} \left(1 + \frac{9M^2}{\pi^4 \lambda^4} \right)^{-1/2} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0.$$

Nous en déduisons que

$$\int_{\mathbb{R}} dv e^{f_\theta(v+i)} = \int_{\mathbb{R}} dv e^{f_\theta(v)},$$

et donc

$$I(g) = \int_{\mathbb{R}} dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dy e^{-y^2/4} \int_{\mathbb{R}} dv e^{f_{(y-z^2)}(v)}.$$

Nous fixons maintenant $z \in \mathbb{R}$ et nous souhaitons intervertir l'intégrale en y et l'intégrale en v . Pour tout $(y, v) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\left| e^{-y^2/4 + f_{(y-z^2)}(v)} \right| \leq e^{-y^2/4} \left(1 + \frac{9v^2}{\pi^4 \lambda^2} \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{9v^2}{16\pi^4 \lambda^2} \right)^{-1/2},$$

qui est une fonction intégrable de (y, v) sur $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons donc permuter l'intégration sur la variable y et celle sur la variable v , pour obtenir

$$I(g) = \int_{\mathbb{R}} dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \exp \left[ivz^2 - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 \lambda^2 j^2} \right) \right] \int_{\mathbb{R}} dy \exp \left(-ivy - \frac{y^2}{4} \right).$$

Nous pouvons alors calculer

$$\int_{\mathbb{R}} dy \exp \left(-ivy - \frac{y^2}{4} \right) = \sqrt{2\pi} F \left(\frac{1}{2}, -iv \right) = 2\sqrt{\pi} e^{-v^2},$$

d'après la formule d'intégration gaussienne (3.42). Nous avons donc

$$I(g) = 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv \exp \left[ivz^2 - v^2 - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{3iv}{\pi^2 \lambda^2 j^2} \right) \right]. \quad (3.160)$$

Pour identifier le résultat indiqué dans le théorème 7, nous considérons une famille $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes, et nous définissons la variable aléatoire

$$Z = \sqrt{2}Y_0 - \frac{3}{2\pi^2 \lambda^2} \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{Y_j^2}{j^2}.$$

Nous avons, quand $j \rightarrow +\infty$,

$$\mathbb{P} \left(|Y_j| \leq \sqrt[4]{j} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt[4]{j}}^{+\infty} dy e^{-y^2/2} \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dt e^{-\sqrt{j}/2 - t^2/2} = e^{-\sqrt{j}/2},$$

d'où

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P} \left(|Y_j| \leq \sqrt[4]{j} \right) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\sqrt{|j|}/2} < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, nous en déduisons que

$$\mathbb{P}(|Z| < \infty) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{|j| \geq k} \left\{|Y_j| \leq |j|^{1/4}\right\}\right) = 1.$$

Ainsi, la variable aléatoire Z est finie presque sûrement. Nous pouvons donc calculer sa fonction caractéristique : pour $v \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\phi_Z(v) = \mathbb{E}[e^{ivZ}] = \mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{2}Y_0}\right] \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{3ivY_j^2}{2\pi^2\lambda^2j^2}\right)\right].$$

En utilisant encore une fois la formule (3.42), il vient

$$\phi_Z(v) = F(1, iv\sqrt{2}) \prod_{j=1}^{+\infty} F\left(1 + \frac{3iv}{\pi^2\lambda^2j^2}, 0\right)^2 = \exp\left[-v^2 - \sum_{j=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{3iv}{\pi^2\lambda^2j^2}\right)\right].$$

La fonction ϕ_Z est bien intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque nous avons

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad |\phi_Z(v)| \leq e^{-v^2}.$$

La variable Z admet donc une densité f donnée par la transformée de Fourier inverse de ϕ_Z , c'est-à-dire que

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad f(z) = \int_{\mathbb{R}} dv e^{-ivz} \phi_Z(v).$$

Ainsi, l'équation (3.160) devient

$$\begin{aligned} I(g) &= 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv e^{ivz^2} \phi_Z(-v) \\ &= 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} dz g(z) \int_{\mathbb{R}} dv e^{-ivz^2} \phi_Z(v) \\ &= 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} dz g(z) f(z^2). \end{aligned}$$

En remplaçant cela dans (3.158), nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \left[g\left(\frac{S_n}{n^{3/4}}\right) \right] = \frac{\int_{\mathbb{R}} dz g(z) f(z^2)}{\int_{\mathbb{R}} dz f(z^2)},$$

ce qui démontre bien la convergence en loi annoncée par le théorème 7. □

Chapitre 4

Intermède géométrique

Dans ce chapitre, nous démontrons un résultat élémentaire de séparation qui nous sera utile dans les deux chapitres suivants.

Sommaire

1	Résultat principal	119
2	Lemme « du boucher »	119
3	Lemme « du chirurgien »	123

1 Résultat principal

L'objectif de ce chapitre est de démontrer la propriété suivante, qui peut se résumer en « découper un morceau d'une taille donnée d'un graphe (V, E) coûte $O(|V|^{(d-1)/d})$ arêtes ». Ce résultat nous sera utile pour l'étape cruciale de la minoration de la fonction de partition, aux chapitres 4 et 6.

Lemme 31. *Il existe une constante $K = K(d)$ telle que, pour tout sous-graphe connexe fini $G = (V, E)$ de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, pour tout sommet $x \in V$ et tout entier m tel que $1 \leq m \leq |V|$, il existe une partie $E_0 \subset E$ des arêtes de G de cardinal*

$$|E_0| \leq K |V|^{\frac{d-1}{d}}$$

telle que la composante connexe de x dans le graphe $(V, E \setminus E_0)$ contient exactement m sommets.

Nous décomposons la preuve de ce lemme en deux étapes. Dans la section 2, nous démontrons le lemme « du boucher », qui permet de découper un graphe en morceaux, lesquels morceaux peuvent éventuellement se révéler trop petits. En effet, l'application de ce lemme peut mener à une composante connexe de x qui contient strictement moins que l'objectif de m sommets. Dans la section 3, nous démontrons le lemme « du chirurgien », qui met en œuvre un algorithme pour rouvrir certaines des arêtes fermées par le lemme du boucher, afin d'atteindre la taille voulue m pour le cluster de x .

2 Lemme « du boucher »

Nous commençons par majorer le nombre d'arêtes qu'il faut retirer à un graphe connexe pour le diviser en morceaux plus petits que la moitié du graphe.

Lemme 32. *Lemme du boucher Pour tout sous-graphe fini $G = (V, E)$ de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, il existe une partie $E_0 \subset E$ des arêtes de G de cardinal*

$$|E_0| \leq 4^{d+1} d^2 |V|^{\frac{d-1}{d}}$$

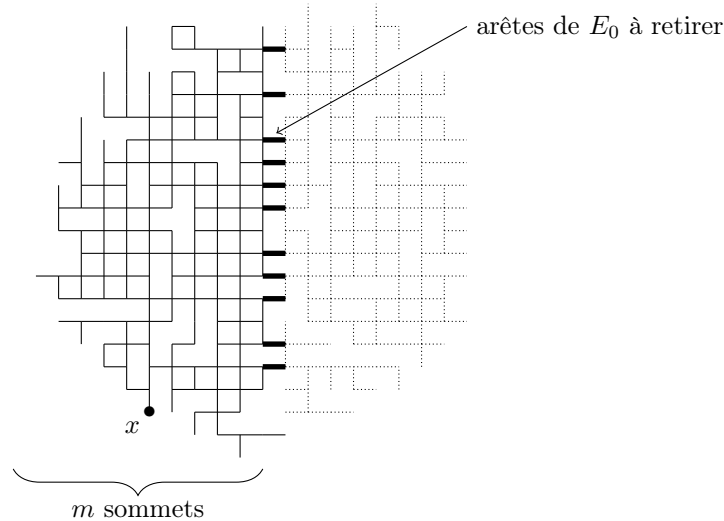


FIGURE 4.1 – La fermeture des arêtes de E_0 (représentées ici en gras) découpe le graphe en plusieurs composantes connexes, dont celle de x (en traits pleins normaux) qui contient le nombre voulu de sommets. Le lemme nous dit qu'en dimension 2, il est possible de choisir E_0 contenant un nombre d'arêtes d'ordre $\sqrt{|V|}$.

telle que toutes les composantes connexes du graphe $(V, E \setminus E_0)$ contiennent au plus $\lceil |V|/2 \rceil$ sommets.

Ce lemme de séparation, qui peut se résumer par « couper un graphe en deux coûte $O(|V|^{(d-1)/d})$ arêtes », a été démontré par Benjamini, Schramm et Timár dans [BST12], corollaire 3.3. Nous présentons néanmoins ici une preuve élémentaire dans le cas de $\mathbb{Z}^d$, pour permettre au lecteur de visualiser l'ensemble de l'algorithme qui permet d'obtenir le découpage du lemme 31. La technique plus générale de [BST12] permettrait d'étendre notre résultat à des graphes plus généraux, mais nous choisissons ici de nous restreindre au cas de la grille cubique en dimension d .

Si $x \in \mathbb{Z}^d$, nous notons $x = (x_1, \dots, x_d)$ ses coordonnées. Pour $V \subset \mathbb{Z}^d$ fini et non vide et $i \leq d$, nous noterons

$$\text{diam}_i V = \max_{x \in V} x_i - \min_{x \in V} x_i \quad \text{et} \quad \text{diam } V = \max_{1 \leq i \leq d} \text{diam}_i V.$$

Pour $i \in \{1, \dots, d\}$ et $m \in \mathbb{Z}$, notons

$$T_{i,m} = \left\{ e = \{x, y\} \in \mathbb{E}^d, \quad x_i = m \text{ et } y_i = m + 1 \right\}$$

la tranche d'arêtes qui coupe $\mathbb{Z}^d$ en deux dans la direction i entre l'abscisse m et l'abscisse $m + 1$. Nous commençons par démontrer le lemme auxiliaire suivant :

Lemme 33. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $A \geq 4$, pour tout sous-graphe fini $G = (V, E)$ de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ tel que $|V| \leq A^d$ et*

$$\text{diam } V \leq \left(\frac{3}{2}\right)^k (A - 1),$$

il existe une partie $E_0 \subset E$ des arêtes de G de cardinal

$$|E_0| \leq 2A^{d-1} + 36d^2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) A^{d-1}$$

telle que toutes les composantes connexes du graphe $(V, E \setminus E_0)$ contiennent au plus $\lceil A^d/2 \rceil$ sommets.

En pratique nous n'utiliserons ce lemme qu'avec $A = |V|^{1/d}$ mais il est plus commode pour la preuve de fixer ce paramètre A plutôt que de le faire dépendre du graphe.

Démonstration. Fixons $A \geq 4$. Nous procédons par récurrence sur k , et commençons donc par le cas $k = 0$. Soit $G = (V, E)$ un sous-graphe fini de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ tel que $|V| \leq A^d$ et $\text{diam } V \leq A - 1$. Quitte à effectuer une translation, nous pouvons supposer que $V \subset \Lambda(\text{diam } V + 1)$. Nous posons alors

$$E_0 = E \cap (T_{1,-1} \cup T_{1,0}) ,$$

qui est de cardinal

$$|E_0| \leq 2(\text{diam } V + 1)^{d-1} \leq 2A^{d-1} .$$

Si $C \subset V$ est une composante connexe de $(V, E \setminus E_0)$, alors nous avons

$$|C| \leq \max \left(\left\lfloor \frac{\text{diam } V}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\text{diam } V + 1}{2} \right\rfloor \right) (\text{diam } V + 1)^{d-1} \leq \frac{(\text{diam } V + 1)^d}{2} \leq \frac{A^d}{2} .$$

Nous vérifions maintenant l'hérédité. Soit $k \geq 1$ tel que le résultat est vrai pour $k - 1$. Soit $G = (V, E)$ un sous-graphe fini de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ tel que $|V| \leq A^d$ et

$$\text{diam } V \leq \left(\frac{3}{2} \right)^k (A - 1) .$$

Nous allons « trancher » le graphe G pour diminuer son diamètre d'un facteur $2/3$. Pour cela, nous allons retirer des tranches d'arêtes dans les directions i dans lesquelles le diamètre est trop grand. Notons

$$\mathcal{I} = \left\{ i \in \{1, \dots, d\}, \quad \text{diam}_i V > \left(\frac{3}{2} \right)^{k-1} (A - 1) \right\} .$$

Soit $i \in \mathcal{I}$. Quitte à effectuer une translation, nous pouvons supposer que $\min_{x \in V} x_i = 0$. Par le principe des tiroirs, il existe un entier k_i tel que

$$\left\lfloor \frac{\text{diam}_i V}{3} \right\rfloor < k_i \leq 2 \left\lfloor \frac{\text{diam}_i V}{3} \right\rfloor \quad \text{et} \quad |E \cap T_{i,k_i}| \leq \frac{|E|}{\left\lfloor \frac{\text{diam}_i V}{3} \right\rfloor} .$$

Nous choisissons donc un tel k_i et nous écrivons, en utilisant le fait que $A \geq 4$,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\text{diam}_i V}{3} \right\rfloor &\geq \frac{\text{diam}_i V}{3} - \frac{2}{3} \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{k-1} (A - 1) - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{3}{2} \right)^{k-1} (A - 1) + \frac{2}{9} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{k-1} (A - 1) - 3 \right] \\ &\geq \frac{1}{9} \left(\frac{3}{2} \right)^{k-1} (A - 1) \\ &\geq \frac{1}{9} \left(\frac{3}{2} \right)^{k-1} \frac{3}{4} A \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{3}{2} \right)^{k-1} A . \end{aligned}$$

Nous en déduisons, en remarquant que $|E| \leq d|V| \leq dA^d$, que

$$|E \cap T_{i,k_i}| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} \frac{12|E|}{A} \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} \frac{12dA^d}{A} = 12d \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} A^{d-1} .$$

Notons maintenant

$$E_1 = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (E \cap T_{i, k_i}),$$

qui est de cardinal

$$|E_1| \leq 12d^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} A^{d-1}.$$

Soit $G' = (V', E')$ une composante connexe du graphe $(V, E \setminus E_1)$ dont le nombre de sommets est maximal. Par construction, pour $i \in \mathcal{I}$, nous avons

$$\text{diam}_i V' \leq \max(k_i, \text{diam}_i V - (k_i + 1)) \leq \frac{2}{3} \text{diam}_i V \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} (A - 1),$$

et pour $i \notin \mathcal{I}$, nous avons par définition

$$\text{diam}_i V' \leq \text{diam}_i V \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} (A - 1).$$

En prenant le maximum sur i , il vient

$$\text{diam } V' \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} (A - 1).$$

De plus, nous avons $|V'| \leq |V| \leq A^d$. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence au graphe G' pour trouver $E_2 \subset E'$ tel que

$$|E_2| \leq 2A^{d-1} + 36d^2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right) A^{d-1},$$

et les composantes connexes du graphe $(V', E' \setminus E_2)$ contiennent au plus $\lceil A^d/2 \rceil$ sommets. Nous posons alors $E_0 = E_1 \cup E_2$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} |E_0| &= |E_1| + |E_2| \\ &\leq 12d^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} A^{d-1} + 2A^{d-1} + 36d^2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right) A^{d-1} \\ &= 2A^{d-1} + 36d^2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) A^{d-1}. \end{aligned}$$

Si C est une composante connexe du graphe $(V, E \setminus E_0)$, alors ou bien $C \subset V \setminus V'$ et donc par maximalité de V' nous avons $|C| \leq |V|/2 \leq A^d/2$, ou bien $C \subset V'$ auquel cas C est une composante connexe du graphe $(V', E' \setminus E_2)$, ce qui entraîne $|C| \leq \lceil A^d/2 \rceil$. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme du boucher, qui est une simple reformulation du lemme 33.

Preuve du lemme 32. Si $|V| \geq 4^d$, alors c'est une conséquence directe du lemme 33 avec

$$A = |V|^{1/d} \quad \text{et} \quad k = \left\lceil \frac{d \ln A - \ln(A-1)}{\ln 3 - \ln 2} \right\rceil$$

puisque nous avons alors

$$\text{diam } V \leq |V| = \frac{A^d}{A-1} (A-1) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^k (A-1)$$

et le lemme nous fournit une partie $E_0 \subset E$ de cardinal

$$|E_0| \leq (2 + 36d^2) A^{d-1} \leq 4^{d+1} d^2 |V|^{\frac{d-1}{d}}$$

telle que les composantes connexes de $(V, E \setminus E_0)$ contiennent au plus $\lceil A^d/2 \rceil = \lceil |V|/2 \rceil$ sommets. Sinon, si $|V| < 4^d$, alors $E_0 = E$ convient. $\square$

3 Lemme « du chirurgien »

L'application du lemme du boucher nous permet de séparer un graphe en morceaux plus petits que la moitié du graphe de départ. Si la composante connexe du sommet x dans le graphe obtenu contient encore plus de sommets que la taille voulue m , alors nous pouvons appliquer à nouveau le lemme du boucher à cette composante de x , pour obtenir une composante connexe qui contient au plus le quart du nombre initial de sommets. Cette opération peut être répétée jusqu'à ce que la composante connexe de x contienne strictement moins que m sommets, ce qui signifie que nous avons fermé trop d'arêtes. Le lemme du chirurgien permet alors de résoudre ce problème, en rouvrant certaines des arêtes fermées par le lemme du boucher.

Lemme 34 (Lemme du chirurgien). *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $G = (V, E)$ un sous-graphe connexe de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ avec $|V| \leq 2^k$. Soit $x \in V$ et soit m un entier tel que $1 \leq m \leq |V|$. Il existe une partie $E_0 \subset E$ des arêtes de G de cardinal*

$$|E_0| \leq \frac{1 - a^k}{1 - a} 4^{d+1} d^2 |V|^{\frac{d-1}{d}} \quad \text{où} \quad a = \frac{1}{2^{\frac{d-1}{d}}}$$

telle que, dans le graphe $(V, E \setminus E_0)$, la composante connexe de x contient exactement m sommets.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur k . Le résultat est trivial si $k = 0$. Soit $k \geq 1$ tel que le résultat est vrai pour $k - 1$. Soit $G = (V, E)$ un sous-graphe connexe de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ avec $2^{k-1} < |V| \leq 2^k$, soit $x \in V$ et soit m un entier tel que $1 \leq m \leq |V|$. D'après le lemme 32, nous disposons d'une partie $E_0 \subset E$ de cardinal

$$|E_0| \leq 4^{d+1} d^2 |V|^{\frac{d-1}{d}}$$

telle que toutes les composantes connexes du graphe $(V, E \setminus E_0)$ contiennent au plus 2^{k-1} sommets. L'idée est alors de rouvrir les arêtes de E_0 une par une en partant du cluster de x , pour faire grandir petit à petit ce cluster, jusqu'à ce que sa taille dépasse m . Nous appliquons ensuite l'hypothèse de récurrence au dernier morceau ajouté, qui contient au plus 2^{k-1} sommets. Nous allons numéroté les arêtes de E_0 en les explorant une par une en partant du cluster de x . Commençons par noter V_0 la composante connexe de x dans le graphe $(V, E \setminus E_0)$. Nous avons ainsi $|V_0| \leq 2^{k-1} < |V|$, donc $V_0 \subsetneq V$. Or le graphe (V, E) est connexe, donc nous pouvons choisir une arête $e_1 \in E_0$ incidente à ce cluster V_0 . Soit $s \geq 1$ tel que $e_1, \dots, e_s$ ont été définies. Notons V_s la composante connexe de x dans le graphe

$$(V, E \setminus (E_0 \setminus \{e_1, \dots, e_s\})).$$

Si $s < |E_0|$, alors nous pouvons choisir une arête $e_{s+1} \in E_0$ incidente à V_s . Une telle arête existe bien puisque (V, E) est connexe. Nous poursuivons cette construction jusqu'à ce que nous ayons numéroté toutes les arêtes de E_0 en une suite $e_1, \dots, e_r$ où $r = |E_0|$. Nous avons alors

$$x \in V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_r = V.$$

Si nous fermons toutes les arêtes de E_0 puis que nous les rouvrons une par une dans l'ordre $e_1, \dots, e_r$, alors après avoir rouvert s arêtes, le cluster de x est V_s . Nous considérons donc

$$\sigma = \min \left\{ s \in \{0, \dots, r\}, \quad |V_s| \geq m \right\},$$

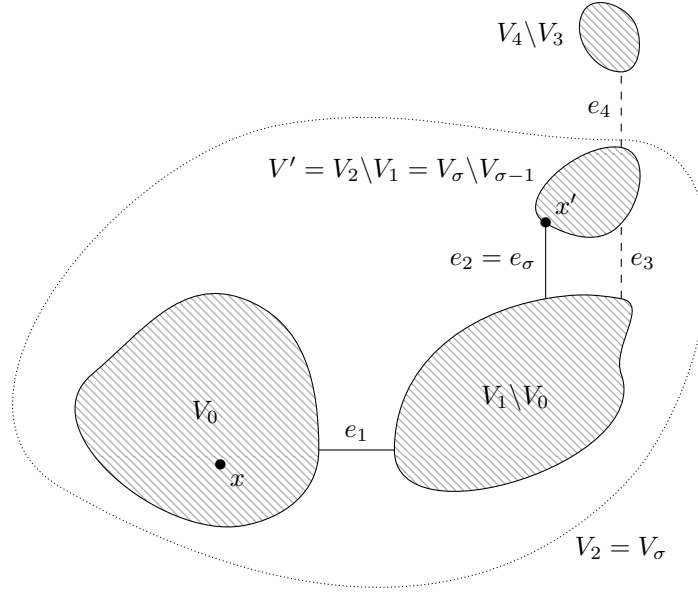


FIGURE 4.2 – Illustration de la preuve du lemme 34 : La fermeture des arêtes de $E_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ déconnecte le graphe en morceaux comportant au plus 2^{k-1} sommets. Nous rouvrons les arêtes e_i dans l'ordre jusqu'à ce que le nombre de sommets dans le cluster de x atteigne ou dépasse m . Dans le cas représenté ici, $\sigma = 2$. Ici $V_3 = V_2$ puisque l'arête e_3 relie deux sommets qui sont déjà dans V_2 .

qui est le nombre d'arêtes rouvertes à partir duquel la taille du cluster de x dépasse la taille voulue m . Cet indice σ est bien défini puisque $|V_r| = |V| \geq m$. Supposons que $\sigma \geq 1$. Par minimalité de σ , nous avons $|V_{\sigma-1}| < m \leq |V_\sigma|$ et donc $V_\sigma \neq V_{\sigma-1}$. Dans ce cas, l'arête e_σ relie un sommet de $V_{\sigma-1}$ et un sommet $x' \in V_\sigma \setminus V_{\sigma-1}$. Posant $m' = m - |V_{\sigma-1}|$, nous avons alors

$$1 \leq m' \leq |V_\sigma| - |V_{\sigma-1}| = |V_\sigma \setminus V_{\sigma-1}|.$$

Si $\sigma = 0$ nous posons $x' = x$ et $m' = m$, et nous avons alors $1 \leq m' \leq |V_0|$.

Soit $G' = (V', E')$ le graphe de la composante connexe de x' dans $(V, E \setminus E_0)$. Par le choix de E_0 , nous avons $|V'| \leq 2^{k-1}$. De plus, nous avons $V' = V_\sigma \setminus V_{\sigma-1}$ si $\sigma \geq 1$ et $V' = V_0$ sinon, ce qui entraîne dans les deux cas que $1 \leq m' \leq |V'|$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $G' = (V', E')$ nous fournit alors un ensemble $E'_0 \subset E'$ vérifiant

$$|E'_0| \leq \frac{1 - a^{k-1}}{1 - a} 4^{d+1} d^2 |V'|^{\frac{d-1}{d}} \leq \frac{1 - a^{k-1}}{1 - a} 4^{d+1} d^2 a |V|^{\frac{d-1}{d}}$$

et tel que dans le graphe $(V', E' \setminus E'_0)$, la composante connexe de x' , que nous noterons $V'_{x'}$, contient exactement m' sommets. Nous posons alors

$$E''_0 = \{e_{\sigma+1}, \dots, e_r\} \cup E'_0,$$

qui est de cardinal

$$\begin{aligned}
 |E_0''| &= (r - \sigma) + |E_0'| \\
 &\leq 4^{d+1} d^2 |V|^{\frac{d-1}{d}} + \frac{a - a^k}{1 - a} 4^{d+1} d^2 |V|^{\frac{d-1}{d}} \\
 &= \frac{1 - a^k}{1 - a} 4^{d+1} d^2 |V|^{\frac{d-1}{d}}.
 \end{aligned}$$

Si $\sigma = 0$ alors la composante connexe de x dans le graphe $(V, E \setminus E_0'')$ est $V_{x'}$ et contient donc exactement $m' = m$ sommets. Si au contraire $\sigma \geq 1$, alors cette composante connexe est $V_{\sigma-1} \cup V_{x'}$ et contient donc $|V_{\sigma-1}| + m' = m$ sommets. $\square$

Chapitre 5

Quelques modèles de criticité auto-organisée en percolation

Ce chapitre est consacré à l'étude du modèle que nous avons décrit dans la seconde section du chapitre 2. Rappelons que ce modèle est défini comme la distribution de probabilité

$$\mu_n : \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n} \mapsto \frac{1}{Z_n} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega),$$

où $\mathbb{P}_p$ désigne le modèle de percolation Bernoulli sur la boîte $\Lambda(n)$, et où la fonction $p_n(\omega)$ est donnée par

$$p_n(\omega) = \exp\left(-\frac{F_n(\omega)}{n^a}\right).$$

Notre objectif est de démontrer le théorème 8 pour les différents cas de fonctions F_n cités dans l'énoncé, et nous commencerons donc par le cas où $F_n(\omega) = |C_{max}(\omega)|$.

Sommaire

1	Modèle avec le plus grand cluster	128
1.1	Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique	128
1.2	Décroissance exponentielle dans le régime surcritique	128
1.3	Minoration de la fonction de partition	130
1.4	Preuve du résultat de convergence	135
1.5	Variante sur le tore	136
2	Modèle avec le nombre de sommets reliés au bord	136
2.1	Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique	136
2.2	Décroissance exponentielle dans le régime surcritique	138
2.3	Minoration de la fonction de partition	138
2.4	Démonstration du résultat	144
3	Modèle avec la distribution des tailles de cluster	144
3.1	Préliminaires	144
3.2	Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique	146
3.3	Décroissance exponentielle dans le régime surcritique	148
3.4	Minoration de la fonction de partition	149
3.5	Démonstration du résultat	151
3.6	Contrôle de la vitesse de convergence	151
3.7	Variante avec les diamètres des clusters	152

1 Modèle avec le plus grand cluster

Nous allons démontrer dans cette partie le théorème 8 dans le cas du premier modèle, c'est-à-dire celui défini avec le plus grand cluster dans la boîte. Nous allons pour cela d'une part majorer les queues de la distribution de $|C_{max}|$ dans les régimes sous-critique et surcritique, et d'autre part minorer la fonction de partition du modèle.

1.1 Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique

Nous avons besoin de la majoration suivante :

Lemme 35. *Pour tout paramètre réel $a > 0$, nous avons*

$$\forall p < p_c \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} \ln \mathbb{P}_p \left(|C_{max}(\Lambda(n))| > An^a \right) < 0.$$

Démonstration. Soient $a > 0$, $p < p_c$ et $A > 0$. Pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p \left(|C_{max}(\Lambda(n))| > An^a \right) &= \mathbb{P}_p \left(\max_{v \in \Lambda(n)} |C_{\Lambda(n)}(v)| > An^a \right) \\ &\leq \mathbb{P}_p \left(\max_{v \in \Lambda(n)} |C(v)| > An^a \right) \\ &\leq n^d \mathbb{P}_p \left(|C(0)| > An^a \right). \end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 4, il existe une constante $\lambda(p) > 0$ telle que pour tout $m \geq 1$,

$$\mathbb{P}_p \left(|C(0)| > m \right) \leq e^{-m\lambda(p)}.$$

Nous avons donc, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_p \left(|C_{max}(\Lambda(n))| > An^a \right) \leq n^d \exp(-A\lambda(p)n^a),$$

d'où le résultat du lemme. □

1.2 Décroissance exponentielle dans le régime surcritique

Nous établissons une majoration analogue dans le cas surcritique.

Lemme 36. *Pour tout réel $a < d$, nous avons*

$$\forall p > p_c \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d-1}} \ln \mathbb{P}_p \left(|C_{max}(\Lambda(n))| < An^a \right) < 0.$$

Démonstration. Nous allons démontrer un résultat un peu plus fort, à savoir que

$$\forall p > p_c \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d-1}} \ln \mathbb{P}_p \left(|C_{max}(\Lambda(n))| \leq \frac{\theta(p)n^d}{8} \right) < 0.$$

Supposons dans un premier temps que $d \geq 3$. D'après le théorème 1.2 de [Pis96], nous avons pour tout $d \geq 3$, pour tout $p > \hat{p}_c$ (où $\hat{p}_c$ désigne le seuil de percolation dans les tranches),

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d-1}} \ln \mathbb{P}_p \left(|C_{max}(\Lambda(n))| \leq \frac{\theta(p)n^d}{2} \right) < 0.$$

De plus, Grimmett et Marstrand ont démontré l'égalité $p_c = \hat{p}_c$ pour tout $d \geq 3$ dans [GM90]. Le résultat énoncé dans le lemme pour $d \geq 3$ en découle donc directement.

Passons maintenant au cas de la dimension $d = 2$. Le théorème 6.1 de [ACC90] implique que pour tout $p > p_c$, si nous considérons une configuration de percolation sur $\mathbb{Z}^d$ tout entier et si nous notons $C_\infty \subset \mathbb{Z}^d$ l'unique cluster infini, alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_p \left(|C_\infty \cap \Lambda(n)| \leq \frac{\theta(p)n^2}{2} \right) < 0.$$

Il existe donc $L > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_p \left(|C_\infty \cap \Lambda(n)| \leq \frac{\theta(p)n^2}{2} \right) \leq e^{-Ln}.$$

Par ailleurs, si nous notons, pour $m \geq k \geq 1$,

$$L_{k,m} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Le rectangle } \{0, \dots, k\} \times \{0, \dots, m\} \text{ contient} \\ \text{un chemin ouvert reliant ses deux petits côtés} \end{array} \right\},$$

alors d'après l'équation (7.110) dans [Gri99], il existe des constantes strictement positives $C_2(p)$ et $C_3(p)$ telles que, pour tous $m \geq k \geq 1$,

$$\mathbb{P}_p(L_{k,m}) \geq 1 - C_2 m e^{-C_3 k}. \quad (5.1)$$

Définissons les rectangles

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathbb{Z}^2 \cap \left] \frac{n}{2}, n \right[\times [-n, n[, \\ R_2 &= \mathbb{Z}^2 \cap [-n, n[\times \left] \frac{n}{2}, n \right[, \\ R_3 &= \mathbb{Z}^2 \cap \left[-n, -\frac{n}{2} \right[\times [-n, n[, \\ R_4 &= \mathbb{Z}^2 \cap [-n, n[\times \left[-n, -\frac{n}{2} \right[, \end{aligned}$$

qui sont représentés sur la figure 5.1. Considérons les événements

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \text{Il existe un chemin ouvert dans } \Lambda(2n) \setminus \Lambda(n) \text{ qui contient } \Lambda(n) \text{ en son intérieur} \right\}$$

et

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \text{Chacun des rectangles } R_1, R_2, R_3, R_4 \text{ est traversé par un chemin ouvert dans sa longueur} \right\}.$$

Comme illustré sur la figure 5.1, nous avons $\mathcal{E}_n \supset \mathcal{F}_n$. De plus, d'après l'inégalité FKG (proposition 1), nous avons

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{F}_n) \geq \mathbb{P}_p(L_{\lfloor n/2 \rfloor, 2n})^4.$$

Combinant ceci avec (5.1), nous obtenons

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_n) \geq \mathbb{P}_p(\mathcal{F}_n) \geq \mathbb{P}_p(L_{\lfloor n/2 \rfloor, 2n})^4 \geq \left(1 - 2C_2 n e^{-C_3 \lfloor n/2 \rfloor} \right)^4 \geq 1 - 8C_2 n e^{-C_3 \lfloor n/2 \rfloor}.$$

Or si l'événement $\mathcal{E}_n$ est réalisé, alors tous les sommets de $\Lambda(n)$ qui sont reliés au bord de $\Lambda(2n)$ sont reliés entre eux dans $\Lambda(2n)$, ce qui entraîne que $|C_{max}(\Lambda(2n))| \geq |C_\infty \cap \Lambda(n)|$. Nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{E}_n \cap \left\{ |C_\infty \cap \Lambda(n)| > \frac{\theta(p)n^2}{2} \right\} \subset \left\{ |C_{max}(\Lambda(2n))| > \frac{\theta(p)n^2}{2} \right\}.$$

En considérant les événements complémentaires, nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p \left(|C_{max}(\Lambda(2n))| \leq \frac{\theta(p)n^2}{2} \right) &\leq 1 - \mathbb{P}_p(\mathcal{E}_n) + \mathbb{P}_p \left(|C_\infty \cap \Lambda(n)| \leq \frac{\theta(p)n^2}{2} \right) \\ &\leq 8C_2 n e^{-C_3 \lfloor n/2 \rfloor} + e^{-Ln} \\ &\leq e^{-L'n} \end{aligned}$$

pour une certaine constante $L' > 0$, ce qui achève la preuve de notre lemme. $\square$

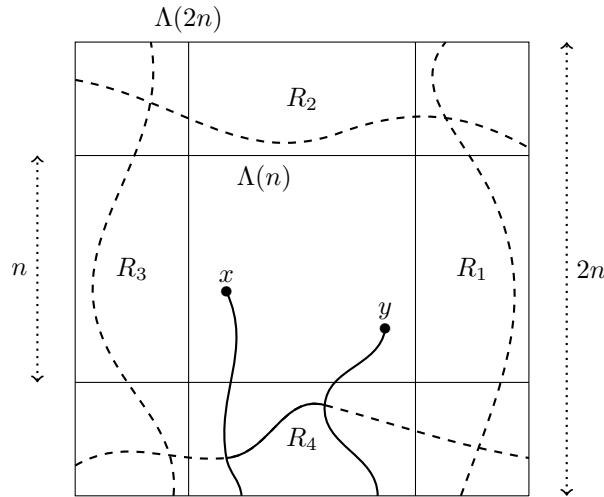


FIGURE 5.1 – La présence d'un chemin ouvert traversant chacun des quatre rectangles dans le sens de la longueur assure que $\Lambda(n)$ est entouré par un chemin ouvert dans $\Lambda(2n)$, et donc que deux sommets x et y dans la boîte $\Lambda(n)$ ne peuvent pas être reliés à $\partial\Lambda(2n)$ sans être reliés entre eux par un chemin ouvert dans $\Lambda(2n)$.

1.3 Minoration de la fonction de partition

Nous allons démontrer la minoration suivante.

Lemme 37. *Pour tout réel a tel que $0 < a < d$, nous avons*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{(\ln n) n^{a(d-1)/d}} > -\infty.$$

Démonstration. La fonction de partition peut s'écrire

$$Z_n = \sum_{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) = \sum_{b=1}^{n^d} \sum_{\substack{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n} \\ |C_{max}(\omega)|=b}} \mathbb{P}_{\varphi_n(b)}(\omega) = \sum_{b=1}^{n^d} \mathbb{P}_{\varphi_n(b)}(|C_{max}|=b). \quad (5.2)$$

Pour minorer Z_n , nous allons construire un couplage monotone entre les distributions $\mathbb{P}_{\varphi_n(b)}$ pour tous les $b \in \{0, \dots, n^d\}$.

Construction du couplage : Écrivons $\mathbb{E}_n = \{e_1, \dots, e_r\}$ avec $r = |\mathbb{E}_n|$. Donnons-nous une famille de variables aléatoires

$$(X_{b,e})_{b \in \{0, \dots, n^d-1\}, e \in \mathbb{E}_n}$$

indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\exp(-1/n^a)$. Définissons pour tout $b_0 \in \{0, \dots, n^d\}$ une configuration aléatoire

$$\omega(b_0) : e \in \mathbb{E}_n \mapsto \min_{0 \leq b < b_0} X_{b,e}.$$

Ainsi, pour $b_0 \in \{0, \dots, n^d\}$ et $e \in \mathbb{E}_n$, nous avons

$$\mathbb{P}(\omega(b_0)(e) = 1) = \prod_{b=0}^{b_0-1} \mathbb{P}(X_{b,e} = 1) = \exp\left(-\frac{b_0}{n^a}\right) = \varphi_n(b_0),$$

et donc la configuration $\omega(b_0)$ est distribuée suivant la loi $\mathbb{P}_{\varphi_n(b_0)}$. De plus, les configurations sont couplées de telle sorte que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{E}_n} = \omega(0) \geq \omega(1) \geq \dots \geq \omega(n^d).$$

Lorsque nous passons de la configuration $\omega(b)$ à la configuration $\omega(b+1)$, un certain nombre d'arêtes sont fermées (il s'agit des arêtes e pour lesquelles $\omega(b)(e) = 1$ et $X_{b,e} = 0$). Pour pouvoir contrôler la fermeture de ces arêtes une par une, nous définissons des configurations intermédiaires. Pour $b \in \{0, \dots, n^d - 1\}$ et $s_0 \in \{0, \dots, r\}$, nous posons

$$\omega(b, s_0) : e_s \in \mathbb{E}_n \mapsto \begin{cases} \omega(b+1)(e_s) & \text{si } s \leq s_0, \\ \omega(b)(e_s) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi nous avons $\omega(b, 0) = \omega(b)$ et pour $s \geq 1$, la configuration $\omega(b, s)$ s'obtient à partir de la configuration $\omega(b, s-1)$ en fermant l'arête e_s si $X_{b,e_s} = 0$, et en ne changeant rien si $X_{b,e_s} = 1$. Pour $s = r = |\mathbb{E}_n|$, toutes les arêtes ont été mises à jour et donc $\omega(b, r) = \omega(b+1)$. Les configurations sont donc couplées de telle sorte que

$$(b, s) \leq (b', s') \implies \omega(b, s) \geq \omega(b', s'),$$

où l'ordre considéré sur $\{0, \dots, n^d - 1\} \times \{0, \dots, r\}$ est l'ordre lexicographique. Cette construction nous permet de réécrire (5.2) comme suit.

$$Z_n = \sum_{b=1}^{n^d} \mathbb{P}\left(|C_{\max}(\omega(b))| = b\right) = \mathbb{P}\left(\exists b \in \{1, \dots, n^d\} \mid |C_{\max}(\omega(b))| = b\right). \quad (5.3)$$

Ainsi, la fonction de partition Z_n est égale à la probabilité que la fonction décroissante $b \mapsto |C_{\max}(\omega(b))|$ admette un point fixe. Nous allons donc considérer un indice B situé avant le passage de cette fonction sous la première bissectrice, et nous allons regarder ce qu'il faut demander aux variables $X_{b,e}$ pour que la fonction intersecte effectivement la bissectrice à l'indice $B+2$.

Définition de l'indice B : En considérant toujours l'ordre lexicographique, nous définissons un couple de variables aléatoires

$$(B, S) = \min \left\{ (b, s) \in \{0, \dots, n^d - 2\} \times \{0, \dots, r\} : \exists e \in \mathbb{E}_n \mid |C_{\max}(\omega(b, s)_e)| \leq b+2 \right\}.$$

Ce minimum est bien défini puisque nous avons toujours $|C_{\max}(\omega(n^d - 2, 0))| \leq n^d$. De plus, pour tout (b_0, s_0) , l'événement $\{(B, S) = (b_0, s_0)\}$ ne dépend que des variables X_{b,e_s} pour $(b, s) \leq (b_0, s_0)$, c'est-à-dire que (B, S) est un temps d'arrêt pour la filtration engendrée par les variables X_{b,e_s} . Par ailleurs, la fermeture d'une arête peut au plus diviser par deux la taille du plus grand cluster, donc nous avons

$$|C_{\max}(\omega(B, S))| \leq 2(B+2). \quad (5.4)$$

Montrons en distinguant deux cas que nous avons aussi

$$|C_{\max}(\omega(B, S))| \geq B+2. \quad (5.5)$$

- Si $S \geq 1$ alors par minimalité de (B, S) , nous avons pour tout $e \in \mathbb{E}_n$,

$$|C_{\max}(\omega(B, S-1)_e)| > B+2.$$

Or la configuration $\omega(B, S)$ s'obtient à partir de $\omega(B, S-1)$ en fermant au plus une arête, donc nous avons bien (5.5).

- Si $S = 0$ et $B > 0$ alors par minimalité de (B, S) , nous avons

$$|C_{\max}(\omega(B-1, r))| > B-1+2 = B+1.$$

Or les configurations $\omega(B-1, r)$ et $\omega(B, 0)$ sont identiques, donc (5.5) est aussi vérifiée.

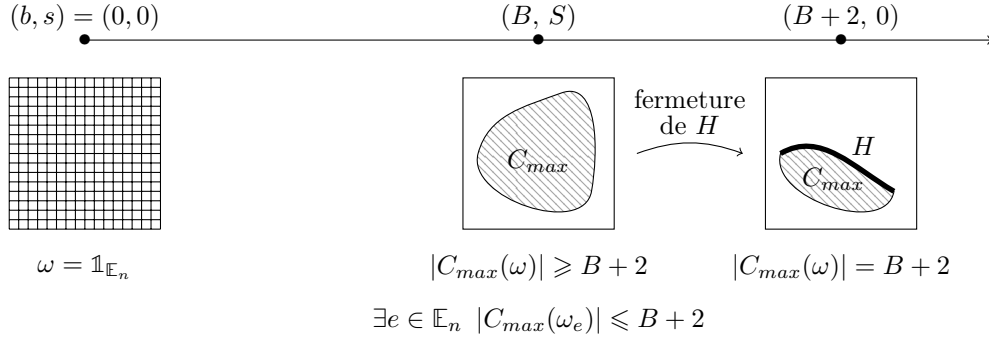


FIGURE 5.2 – Schéma de la preuve : si l'événement $\mathcal{E}$ est réalisé, c'est-à-dire qu'entre les instants (B, S) et $(B + 2, 0)$, les arêtes de H se ferment mais aucune autre arête de C_{max} ne se ferme, alors le plus grand cluster dans la configuration $\omega(B + 2, 0)$ contient exactement $B + 2$ sommets.

• Le cas $(B, S) = (0, 0)$ ne se produit jamais puisque dans la configuration $\omega(0, 0)$ toutes les arêtes sont ouvertes.

Construction de l'heureux événement : Notons (V, E) le graphe du plus grand cluster dans la configuration $\omega(B, S)$, c'est-à-dire que $V = C_{max}(\omega(B, S))$ et E est l'ensemble des arêtes entre deux sommets de V qui sont ouvertes dans $\omega(B, S)$. Étant donné (5.5) et en vertu du lemme 31, nous disposons d'un ensemble (aléatoire) d'arêtes

$$H = H(B, \omega(B, S)) \subset E,$$

de cardinal

$$|H| \leq K |V|^{\frac{d-1}{d}} \quad (5.6)$$

tel que la plus grande composante connexe du graphe $(V, E \setminus H)$ contient exactement $B + 2$ sommets. Notons que nous avons défini $H = H(B, \omega(B, S))$ comme une fonction déterministe des variables B et $\omega(B, S)$, ce qui nous aidera plus tard. L'existence d'une arête $e \in E_n$ telle que

$$|C_{max}(\omega(B, S)_e)| \leq B + 2$$

assure que dans la configuration $\omega(B, S)$ il y a au plus un cluster contenant strictement plus que $B + 2$ sommets. Donc la fermeture des arêtes de H suffit pour que le plus grand cluster restant contienne exactement $B + 2$ sommets, c'est-à-dire que

$$|C_{max}(\omega(B, S)_H)| = B + 2.$$

Ainsi, il suffit de fermer les arêtes de H et aucune autre arête de $E[C_{max}(\omega(B, S))]$ entre les configurations $\omega(B, S)$ et $\omega(B + 2)$ pour avoir $|C_{max}(\omega(B + 2))| = B + 2$. Mais les arêtes $e_s \in H$ ne sont pas forcément numérotées avec un indice $s > S$. Il n'est donc pas possible en général de fermer toutes les arêtes de H entre les instants (B, S) et $(B + 1, 0)$. L'événement que nous considérons est donc celui dans lequel aucune arête de $C_{max}(\omega(B, S))$ n'est fermée entre (B, S) et $(B + 1, 0)$, et les arêtes de $C_{max}(\omega(B, S))$ qui se ferment entre $(B + 1, 0)$ et $(B + 2, 0)$ sont précisément celles de H , c'est-à-dire l'événement

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} \forall s > S \quad e_s \in E[C_{max}(\omega(B, S))] \Rightarrow X_{B, e_s} = 1 \\ \forall e \in H \quad X_{B+1, e} = 0 \\ \forall e \in E[C_{max}(\omega(B, S))] \setminus H \quad X_{B+1, e} = 1 \end{array} \right\}.$$

Si cet événement est réalisé, alors dans la configuration $\omega(B + 2)$, les arêtes de H sont fermées, les autres arêtes de $E[C_{max}(\omega(B, S))]$ qui étaient ouvertes dans la configuration $\omega(B, S)$ restent ouvertes,

et tous les autres clusters contiennent au plus $B + 2$ sommets, donc

$$\mathcal{E} \subset \left\{ |C_{max}(\omega(B+2))| = |C_{max}(\omega(B, S)_H)| = B+2 \right\}.$$

Probabilité conditionnelle de l'heureux événement : Revenant à l'expression (5.3) de la fonction de partition, nous avons

$$Z_n \geq \mathbb{P}(|C_{max}(\omega(B+2))| = B+2) \geq \mathbb{P}(\mathcal{E}). \quad (5.7)$$

Soient (b_0, s_0) et $\omega_0 : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$ tels que

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_{b_0, s_0, \omega_0}) > 0 \quad \text{où} \quad \mathcal{C}_{b_0, s_0, \omega_0} = \left\{ (B, S) = (b_0, s_0) \text{ et } \omega(B, S) = \omega_0 \right\}.$$

Vu que nous avons défini H comme une fonction déterministe de B et $\omega(B, S)$, nous pouvons considérer l'événement

$$\tilde{\mathcal{E}}_{b_0, s_0, \omega_0} = \left\{ \begin{array}{l} \forall s > s_0 \quad e_s \in \mathbb{E}[C_{max}(\omega_0)] \Rightarrow X_{b_0, e_s} = 1 \\ \forall e \in H(b_0, \omega_0) \quad X_{b_0+1, e} = 0 \\ \forall e \in \mathbb{E}[C_{max}(\omega_0)] \setminus H(b_0, \omega_0) \quad X_{b_0+1, e} = 1 \end{array} \right\},$$

qui est tel que

$$\mathbb{P}(\mathcal{E} | \mathcal{C}_{b_0, s_0, \omega_0}) = \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_{b_0, s_0, \omega_0} | \mathcal{C}_{b_0, s_0, \omega_0}). \quad (5.8)$$

Or, cet événement $\tilde{\mathcal{E}}_{b_0, s_0, \omega_0}$ ne dépend que des variables X_{b, e_s} pour $(b, s) > (b_0, s_0)$, tandis que l'événement $\mathcal{C}_{b_0, s_0, \omega_0}$ ne dépend que des variables X_{b, e_s} pour $(b, s) \leq (b_0, s_0)$. Ces deux événements sont donc indépendants, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_{b_0, s_0, \omega_0} | \mathcal{C}_{b_0, s_0, \omega_0}) &= \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_{b_0, s_0, \omega_0}) \\ &= \prod_{\substack{s > s_0 \\ e_s \in \mathbb{E}[C_{max}(\omega_0)]}} \mathbb{P}(X_{b_0, e_s} = 1) \times \prod_{e \in H(b_0, \omega_0)} \mathbb{P}(X_{b_0+1, e} = 0) \\ &\quad \times \prod_{e \in \mathbb{E}[C_{max}(\omega_0)] \setminus H(b_0, \omega_0)} \mathbb{P}(X_{b_0+1, e} = 1) \\ &\geq \left(e^{-1/n^a}\right)^{2|\mathbb{E}[C_{max}(\omega_0)]|} \left(1 - e^{-1/n^a}\right)^{|H(b_0, \omega_0)|}. \end{aligned}$$

Combinant ceci avec (5.8), nous obtenons

$$\mathbb{P}(\mathcal{E} | (B, S, \omega(B, S))) \geq \left(e^{-1/n^a}\right)^{2|\mathbb{E}[C_{max}(\omega(B, S))]|} \left(1 - e^{-1/n^a}\right)^{|H(B, \omega(B, S))|}. \quad (5.9)$$

Or, d'après (5.4), nous avons

$$|\mathbb{E}[C_{max}(\omega(B, S))]| \leq d|C_{max}(\omega(B, S))| \leq 2d(B+2).$$

De plus, par concavité de $x \mapsto 1 - e^{-x}$, nous avons

$$1 - e^{-1/n^a} \geq \frac{1}{n^a} (1 - e^{-1}) \geq \frac{1}{2n^a}.$$

Par ailleurs, en combinant (5.6) avec (5.4), il vient

$$|H| \leq K|C_{max}(\omega(B, S))|^{\frac{d-1}{d}} \leq K(2(B+2))^{\frac{d-1}{d}} \leq 2K(B+2)^{\frac{d-1}{d}}.$$

En remplaçant tout cela dans (5.9), nous obtenons

$$\mathbb{P}(\mathcal{E} | (B, S, \omega(B, S))) \geq \exp\left(-\frac{4d(B+2)}{n^a}\right) \left(\frac{1}{2n^a}\right)^{2K(B+2)^{\frac{d-1}{d}}}.$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à B , ceci devient

$$\mathbb{P}(\mathcal{E} | B) \geq \exp\left(-\frac{4d(B+2)}{n^a}\right) \left(\frac{1}{2n^a}\right)^{2K(B+2)^{\frac{d-1}{d}}}. \quad (5.10)$$

Majoration de B : Nous avons maintenant besoin d'un contrôle sur B pour pouvoir minorer la probabilité de l'événement $\mathcal{E}$. Définissons

$$b_n = \left\lceil n^a \left(-\ln\left(\frac{p_c}{2}\right)\right) \right\rceil.$$

Le lemme 36 implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p_c/2}(|C_{max}| \leq b_n) = 1$$

donc à partir d'un certain rang, nous avons

$$\mathbb{P}_{p_c/2}(|C_{max}| \leq b_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Étant donné que

$$\varphi_n(b_n) \leq \varphi_n\left(n^a \left(-\ln\left(\frac{p_c}{2}\right)\right)\right) = \frac{p_c}{2},$$

nous pouvons en déduire qu'à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \leq b_n) &\geq \mathbb{P}(|C_{max}(\omega(b_n))| \leq b_n + 2) \\ &= \mathbb{P}_{\varphi_n(b_n)}(|C_{max}| \leq b_n + 2) \\ &\geq \mathbb{P}_{p_c/2}(|C_{max}| \leq b_n + 2) \\ &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc trouver $\kappa \geq 2$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(B \leq \kappa n^a) \geq \frac{1}{2}. \quad (5.11)$$

Conclusion : Combinant (5.11) avec (5.10), il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{E}) &\geq \mathbb{P}(\mathcal{E} \cap \{B \leq \kappa n^a\}) \\ &= \mathbb{P}(B \leq \kappa n^a) \mathbb{P}(\mathcal{E} | B \leq \kappa n^a) \\ &\geq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{4d(\kappa n^a + 2)}{n^a} - 2K(\kappa n^a + 2)^{\frac{d-1}{d}} \ln(2n^a)\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \exp\left(-8d\kappa - 4K\kappa(\ln 2)n^{a(d-1)/d} - 4K\kappa a(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right). \end{aligned}$$

Il ne reste alors qu'à reprendre la minoration (5.7) pour obtenir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{(\ln n)n^{a(d-1)/d}} \geq -4K\kappa a > -\infty,$$

ce qui est bien la minoration recherchée. □

1.4 Preuve du résultat de convergence

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le résultat de convergence pour le premier modèle.

Preuve du théorème 8, cas $F_n = |C_{max}|$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \min(p_c, 1 - p_c)$. Contrôlons dans un premier temps les déviations à gauche de p_c de la loi de p_n . Notons pour cela

$$b_n^- = \lceil n^a (-\ln(p_c - \varepsilon)) \rceil.$$

Nous commençons par écrire

$$\begin{aligned} \mu_n(p_n \leq p_c - \varepsilon) &= \frac{1}{Z_n} \sum_{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{1}_{\{p_n(\omega) \leq p_c - \varepsilon\}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \\ &= \frac{1}{Z_n} \sum_{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{1}_{\{|C_{max}(\omega)| \geq b_n^-\}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \\ &= \frac{1}{Z_n} \sum_{b=b_n^-}^{n^d} \sum_{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{1}_{\{|C_{max}(\omega)|=b\}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \\ &= \frac{1}{Z_n} \sum_{b=b_n^-}^{n^d} \mathbb{P}_{\varphi_n(b)}(|C_{max}| = b) \\ &\leq \frac{1}{Z_n} \sum_{b=b_n^-}^{n^d} \mathbb{P}_{\varphi_n(b)}(|C_{max}| \geq b_n^-). \end{aligned}$$

Or l'événement $\{|C_{max}| \geq b_n^-\}$ est un événement croissant, donc pour tout $b \geq b_n^-$ nous avons

$$\mathbb{P}_{\varphi_n(b)}(|C_{max}| \geq b_n^-) \leq \mathbb{P}_{p_c - \varepsilon}(|C_{max}| \geq b_n^-).$$

Nous avons donc

$$\mu_n(p_n \leq p_c - \varepsilon) \leq \frac{n^d}{Z_n} \mathbb{P}_{p_c - \varepsilon}(|C_{max}| \geq (-\ln(p_c - \varepsilon))n^a).$$

Nous pouvons alors utiliser les résultats des lemmes 35 et 37 pour obtenir des constantes $L, L' > 0$ telles que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mu_n(p_n \leq p_c - \varepsilon) \leq n^d \exp\left(L(\ln n)n^{a(d-1)/d} - L'n^a\right).$$

Comme $a > a(d-1)/d$, nous avons donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} \ln \mu_n(p_n \leq p_c - \varepsilon) < 0.$$

Intéressons-nous maintenant aux déviations de p_n à droite de p_c en posant

$$b_n^+ = \lfloor n^a (-\ln(p_c + \varepsilon)) \rfloor$$

et en écrivant

$$\begin{aligned}
\mu_n(p_n \geq p_c + \varepsilon) &= \frac{1}{Z_n} \sum_{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{1}_{\{p_n(\omega) \geq p_c + \varepsilon\}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{1}_{\{|C_{max}(\omega)| \leq b_n^+\}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{b=0}^{b_n^+} \sum_{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{1}_{\{|C_{max}(\omega)|=b\}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{b=0}^{b_n^+} \mathbb{P}_{\varphi_n(b)}(|C_{max}| = b) \\
&\leq \frac{1}{Z_n} \sum_{b=0}^{b_n^+} \mathbb{P}_{\varphi_n(b)}(|C_{max}| \leq b_n^+) \\
&\leq \frac{1}{Z_n} \sum_{b=0}^{b_n^+} \mathbb{P}_{p_c + \varepsilon}(|C_{max}| \leq b_n^+) \\
&\leq \frac{n^d}{Z_n} \mathbb{P}_{p_c + \varepsilon}(|C_{max}| \leq b_n^+).
\end{aligned}$$

D'après les lemmes 36 et 37, nous disposons donc de $L, L' > 0$ tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mu_n(p_n \geq p_c + \varepsilon) \leq n^d \exp\left(L(\ln n)n^{a(d-1)/d} - L'n^{d-1}\right),$$

ce qui entraîne

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d-1}} \ln \mu_n(p_n \geq p_c + \varepsilon) < 0.$$

Nous avons donc bien démontré la convergence de p_n vers p_c sous la loi μ_n , ainsi que l'estimée (2.8). $\square$

1.5 Variante sur le tore

Expliquons maintenant en quelques mots ce qu'il faut modifier pour traiter le cas d'une variante de ce modèle définie sur le tore, c'est-à-dire avec des conditions aux bords périodiques. Les clusters dans le tore étant au moins aussi grands que ceux dans la boîte, la décroissance exponentielle dans le régime surcritique se déduit directement du lemme 36. Le pendant du lemme 35 peut être prouvé en remarquant que la taille du cluster de l'origine dans le tore est stochastiquement dominée par la taille du cluster de l'origine dans $\mathbb{Z}^d$ tout entier, ce qui permet d'obtenir la même décroissance exponentielle que dans le lemme 35. La minoration de la fonction de partition se démontre de la même manière, en adaptant le lemme géométrique pour l'étendre aux sous-graphes connexes du tore. Cette variante présente donc la même propriété de convergence de p_n vers p_c quand $n \rightarrow \infty$.

2 Modèle avec le nombre de sommets reliés au bord

Nous allons maintenant démontrer le second cas du théorème 8, qui concerne le modèle défini à partir de $|\mathcal{M}_n|$, le nombre de sommets reliés au bord de la boîte $\partial\Lambda(n)$.

2.1 Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique

Suivant la même méthode que pour le modèle précédent, nous commençons par démontrer un résultat de décroissance exponentielle dans le régime sous-critique.

Lemme 38. *Pour $a > d - 1$, nous avons la majoration suivante.*

$$\forall p < p_c \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} \ln \mathbb{P}_p(|\mathcal{M}_n| > An^a) < 0.$$

Démonstration. Soit $a > d - 1$ et soient $p < p_c$ et $A > 0$. Écrivons $\partial\Lambda(n) = \{x_1, \dots, x_t\}$ avec $t = |\partial\Lambda(n)|$. Rappelons que si A et B sont deux événements alors $A \circ B$ désigne l'occurrence disjointe de ces deux événements. Soit $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$ une configuration telle que $|\mathcal{M}_n(\omega)| > An^a$. Définissons, pour $i \in \{1, \dots, t\}$,

$$n_i = \left| C_{\Lambda(n)}(x_i) \setminus \bigcup_{j < i} C_{\Lambda(n)}(x_j) \right| = \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } j < i \text{ tel que } x_i \xleftrightarrow{\omega} x_j, \\ |C_{\Lambda(n)}(x_i)| & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons alors

$$\sum_{i=1}^t n_i = \left| \bigcup_{i=1}^t C_{\Lambda(n)}(x_i) \right| = |\mathcal{M}_n(\omega)| > An^a,$$

et nous pouvons écrire

$$\omega \in \{|C_{\Lambda(n)}(x_1)| \geq n_1\} \circ \dots \circ \{|C_{\Lambda(n)}(x_t)| \geq n_t\}.$$

En effet, si $n_i = 0$ alors l'événement $\{|C_{\Lambda(n)}(x_i)| \geq n_i\}$ est trivial, tandis que si $n_i > 0$ et $n_j > 0$ avec $i \neq j$, alors les sommets x_i et x_j appartiennent à des clusters disjoints. Nous avons donc l'inclusion

$$\left\{ |\mathcal{M}_n| > An^a \right\} \subset \bigcup_{\substack{0 \leq n_1, \dots, n_t \leq n^d \\ n_1 + \dots + n_t > An^a}} \{|C_{\Lambda(n)}(x_1)| \geq n_1\} \circ \dots \circ \{|C_{\Lambda(n)}(x_t)| \geq n_t\}.$$

Or pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, l'événement $\{|C_{\Lambda(n)}(x_i)| \geq n_i\}$ est un événement croissant, donc d'après l'inégalité BK (proposition 2) nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|\mathcal{M}_n| > An^a) &\leq \sum_{\substack{0 \leq n_1, \dots, n_t \leq n^d \\ n_1 + \dots + n_t > An^a}} \prod_{i=1}^t \mathbb{P}_p(|C_{\Lambda(n)}(x_i)| \geq n_i) \\ &\leq \sum_{\substack{0 \leq n_1, \dots, n_t \leq n^d \\ n_1 + \dots + n_t > An^a}} \prod_{i=1}^t \mathbb{P}_p(|C(0)| \geq n_i). \end{aligned}$$

Or d'après la proposition 4, il existe une constante $\lambda(p) > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_p(|C(0)| \geq n) \leq e^{-n\lambda(p)},$$

ce qui reste vrai si $n = 0$. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|\mathcal{M}_n| > An^a) &\leq \sum_{\substack{0 \leq n_1, \dots, n_t \leq n^d \\ n_1 + \dots + n_t > An^a}} \prod_{i=1}^t \exp(-\lambda(p)n_i) \\ &\leq \sum_{0 \leq n_1, \dots, n_t \leq n^d} \exp(-\lambda(p)An^a) \\ &\leq (n^d + 1)^t \exp(-\lambda(p)An^a) \\ &= \exp(|\partial\Lambda(n)| \ln(n^d + 1) - \lambda(p)An^a). \end{aligned}$$

Or nous avons

$$|\partial\Lambda(n)| \ln(n^d + 1) = O((\ln n)n^{d-1}) = o(n^a),$$

d'où le résultat. $\square$

2.2 Décroissance exponentielle dans le régime surcritique

Nous avons la majoration suivante.

Lemme 39. *Pour tout $a < d$, nous avons*

$$\forall p > p_c \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d-1}} \ln \mathbb{P}_p(|\mathcal{M}_n| < An^a) < 0.$$

Démonstration. Nous démontrons, de même que pour le lemme 36, que

$$\forall p > p_c \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d-1}} \ln \mathbb{P}_p\left(|\mathcal{M}_n| \leq \frac{\theta(p)n^d}{2}\right) < 0.$$

Pour $d \geq 3$, le résultat découle du théorème 1.2 de [Pis96], qui démontre cette majoration pour tout $p > \hat{p}_c$. Or $\hat{p}_c = p_c$ d'après [GM90]. Pour $d = 2$, le résultat découle du théorème 6.1 de [ACC90]. $\square$

2.3 Minoration de la fonction de partition

Nous établissons maintenant la minoration suivante de la fonction de partition :

Lemme 40. *Pour tout réel a tel que $d - 1 < a < d$, nous avons*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{(\ln n)n^{a(d-1)/d}} > -\infty.$$

Explication heuristique de la preuve : Nous reprenons l'idée de la démonstration pour le cas du plus grand cluster (section 1.3), en construisant un couplage décroissant entre les distributions $\mathbb{P}_{\varphi_n(b)}$ pour b variant de 0 (toutes les arêtes ouvertes) à n^d (presque toutes les arêtes fermées). Nous suivons l'évolution de la variable $|\mathcal{M}_n|$ jusqu'à un instant $b = B'$ où $|\mathcal{M}_n|$ est d'ordre B' . Nous trouvons alors un ensemble d'arêtes $H \subset \mathbb{E}_n$ dont la fermeture entraînerait $|\mathcal{M}_n| = B' + 2$ à l'instant $B' + 2$.

Le problème est que, pour trouver un tel ensemble H qui ne soit pas trop grand (et donc dont la fermeture soit assez probable), nous avons besoin d'un contrôle sur la taille des clusters qui sont reliés au bord de la boîte à l'instant B' . Pour obtenir un tel contrôle, il semble naturel de suivre d'abord l'évolution de la taille des clusters reliés au bord, et d'attendre un instant B où ces clusters sont devenus assez petits, puis de définir l'instant B' d'une manière qui assure qu'il soit postérieur à B . Cependant, contrairement à la taille du plus grand cluster C_{max} , qui est au plus divisée par deux en fermant une arête, la taille du plus grand cluster relié au bord peut chuter brutalement à la fermeture d'une seule arête. Pour éviter cela, nous choisissons plutôt de suivre la taille du plus grand cluster dans le tore, c'est-à-dire dans la boîte mais avec des conditions aux bords périodiques. Cette variable présente l'avantage d'être au plus divisée par deux à chaque fermeture d'arête.

Démonstration. Plan de la preuve : Nous allons dans un premier temps définir un couplage de configurations $(\omega(b, s))_{b, s}$ mais sur les arêtes du tore. Nous considérerons ensuite le premier instant (B, S) pour lequel tous les clusters dans le tore contiennent au plus $2B + 3$ sommets. Dans la suite de la démonstration, nous raisonnerons conditionnellement au fait qu'à cet instant, le plus grand cluster dans le tore touche le bord de la boîte. Nous montrerons alors qu'à cet instant, nous avons $|\mathcal{M}_n(\omega)| \geq B + 2$. Nous allons ensuite construire un second instant $(B', S') \geq (B, S)$ et un ensemble d'arêtes H tels que, si les seules arêtes de $\mathcal{M}_n$ qui se ferment entre (B', S') et $(B' + 2, 0)$ sont celles de H alors nous avons $|\mathcal{M}_n(\omega(B' + 2))| = B' + 2$. Nous appellerons « heureux événement » un tel scénario, et notre objectif sera de minorer sa probabilité. Pour cela, nous montrerons qu'avec probabilité assez grande, nous avons $B' = O(n^a)$, ce qui implique qu'à partir de l'instant (B, S) , tous les clusters dans le tore contiennent $O(n^a)$ sommets. Ce contrôle nous permettra de montrer qu'il est possible de trouver H assez petit pour que l'heureux événement soit suffisamment probable.

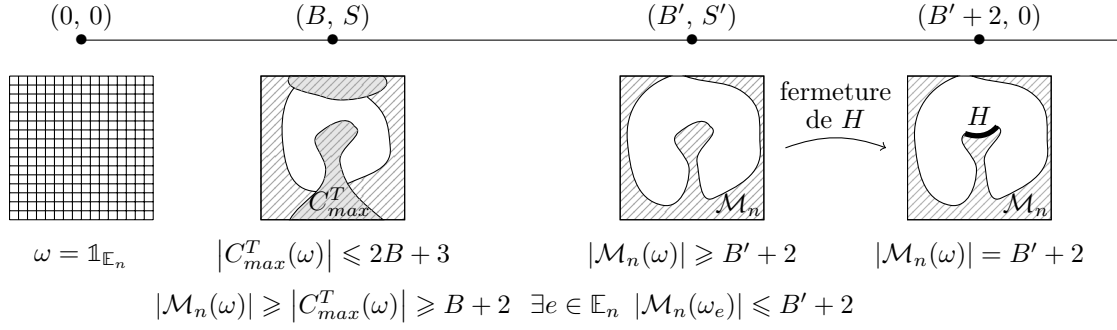


FIGURE 5.3 – Illustration du schéma de la preuve du lemme 40.

Construction du couplage et définition de B : Soit $n \geq 2$. Nous reprenons les notations et définitions de la preuve du lemme 37, mais nous considérons cette fois-ci des configurations sur le tore. Pour définir le tore, notons $p : \mathbb{Z}^d \rightarrow \Lambda(n)$ l'application de projection, qui est telle que $p(x) - x \in n\mathbb{Z}^d$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. Le tore est alors le graphe dont l'ensemble de sommets est $\Lambda(n)$, et dont l'ensemble d'arêtes est

$$\mathbb{E}_n^T = p(\mathbb{E}^d) = \left\{ \{p(x), p(y)\} : \{x, y\} \in \mathbb{E}^d \right\},$$

ce qui revient à rajouter des arêtes entre les sommets qui se font face sur les bords opposés de la boîte. Nous notons alors $\mathbb{E}_n^T = \{e_1, \dots, e_r\}$ avec $r = |\mathbb{E}_n^T|$, et nous nous donnons des variables aléatoires

$$(X_{b,e})_{b \in \{0, \dots, n^d - 1\}, e \in \mathbb{E}_n^T}$$

indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\exp(-1/n^a)$. Nous posons, pour $b_0 \in \{0, \dots, n^d\}$,

$$\omega(b_0) : e \in \mathbb{E}_n^T \mapsto \min_{0 \leq b < b_0} X_{b,e},$$

et pour $b \in \{0, \dots, n^d - 1\}$ et $s_0 \in \{0, \dots, r\}$, nous définissons

$$\omega(b, s_0) : e_s \in \mathbb{E}_n^T \mapsto \begin{cases} \omega(b+1)(e_s) & \text{si } s \leq s_0, \\ \omega(b)(e_s) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $\omega : \mathbb{E}_n^T \rightarrow \{0, 1\}$ et $v \in \Lambda(n)$, notons $C_{\Lambda(n)}^T(v, \omega) \subset \Lambda(n)$ le cluster de v dans la configuration ω sur le tore, c'est-à-dire la composante connexe du sommet v dans le graphe

$$\left(\Lambda(n), \{e \in \mathbb{E}_n^T : \omega(e) = 1\} \right).$$

Pour toute configuration $\omega : \mathbb{E}_n^T \rightarrow \{0, 1\}$, notons $C_{max}^T(\omega)$ le plus grand cluster dans le tore dans la configuration ω . En cas d'égalité entre plusieurs clusters, nous en choisissons un avec un ordre arbitraire sur les parties de $\Lambda(n)$. Définissons maintenant le couple de variables aléatoires

$$(B, S) = \min \left\{ (b, s) \in \{0, \dots, n^d - 2\} \times \{0, \dots, r\} : |C_{max}^T(\omega(b, s))| \leq 2b + 3 \right\},$$

qui est bien défini puisque $|C_{max}^T(\omega(n^d - 2, 0))| \leq n^d$. Montrons qu'à cet instant (B, S) nous avons

$$|C_{max}^T(\omega(B, S))| \geq B + 2. \quad (5.12)$$

Nous considérons plusieurs cas :

- Si $S \geq 1$ alors, par minimalité de (B, S) , nous avons $|C_{max}^T(\omega(B, S-1))| \geq 2B+4$. Or la fermeture d'une arête peut au plus diviser $|C_{max}^T|$ par deux, d'où la minoration (5.12).
- Si $B \neq 0$ et $S = 0$ alors, par minimalité de (B, S) , nous avons

$$|C_{max}^T(\omega(B-1, r))| \geq 2(B-1)+4 = 2B+2 \geq B+2,$$

ce qui entraîne là aussi l'inégalité (5.12), puisque les configurations $\omega(B-1, r)$ et $\omega(B, 0)$ sont identiques.

- Le cas $(B, S) = (0, 0)$ ne se produit pas puisque nous avons $|C_{max}^T(\omega(0, 0))| = n^d > 3$. Nous avons donc bien démontré l'inégalité (5.12).

Définition du sommet repère : Nous considérons maintenant le sommet $V = \min C_{max}^T(\omega(B, S))$, en prenant le minimum avec un ordre arbitraire sur $\Lambda(n)$. Étant donné que

$$\sum_{v \in \Lambda(n)} \mathbb{P}(V = v) = 1,$$

nous pouvons trouver un sommet $v_0 \in \Lambda(n)$ tel que

$$\mathbb{P}(V = v_0) \geq \frac{1}{|\Lambda(n)|} = \frac{1}{n^d}.$$

Dans toute la suite, nous raisonnerons conditionnellement à cet événement $\{V = v_0\}$. Jusqu'ici, tout s'est déroulé sur le tore, qui est invariant par translation. Quitte à effectuer une translation sur le tore et à modifier en conséquence les ordres arbitraires que nous nous sommes donnés sur $\mathbb{E}_n^T$, sur $\Lambda(n)$ et sur les parties de $\Lambda(n)$, nous pouvons donc supposer que $v_0 \in \partial\Lambda(n)$. Ainsi, si $V = v_0$ alors nous avons $C_{max}^T(\omega(B, S)) \subset \mathcal{M}_n(\omega(B, S))$, et donc

$$V = v_0 \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{M}_n(\omega(B, S))| \geq |C_{max}^T(\omega(B, S))| \geq B+2, \quad (5.13)$$

d'après (5.12).

Construction du second instant B' : Nous définissons ensuite

$$(B', S') = \min \left\{ (b, s) \geq (B, S) : \exists e \in \mathbb{E}_n \quad |\mathcal{M}_n(\omega(b, s)_e)| \leq b+2 \right\}.$$

Le fait que $B \leq n^d - 2$ et $|\mathcal{M}_n(\omega(n^d - 2, r))| \leq n^d$ assure que (B', S') est bien défini et que nous avons $B' \leq n^d - 2$. Montrons en distinguant plusieurs cas que

$$V = v_0 \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{M}_n(\omega(B', S'))| \geq B' + 2. \quad (5.14)$$

- Si $(B', S') = (B, S)$, alors l'inégalité découle de (5.13).
- Si $(B', S') > (B, S)$ et $S' = 0$, alors par minimalité de (B', S') , nous avons

$$B' - 1 + 2 < |\mathcal{M}_n(\omega(B' - 1, r))| = |\mathcal{M}_n(\omega(B', S'))|.$$

- Si $(B', S') > (B, S)$ et $S' \neq 0$, alors par minimalité de (B', S') , nous avons pour tout $e \in \mathbb{E}_n$,

$$|\mathcal{M}_n(\omega(B', S' - 1)_e)| > B' + 2,$$

et donc en particulier $|\mathcal{M}_n(\omega(B', S'))| > B' + 2$, puisque la configuration $\omega(B', S')$ s'obtient à partir de $\omega(B', S' - 1)$ en fermant au plus une arête.

Nous avons donc bien démontré (5.14) dans l'ensemble des cas.

Construction de l'heureux événement : Nous allons définir un ensemble d'arêtes H que nous voulons voir fermées entre la configuration $\omega(B', S')$ et la configuration $\omega(B' + 2, 0)$ pour avoir

$$|\mathcal{M}_n(\omega(B' + 2))| = B' + 2.$$

Nous ne nous intéressons qu'aux situations où $V = v_0$, donc nous posons arbitrairement $H = \emptyset$ si l'événement $\{V = v_0\}$ n'est pas réalisé. Supposons maintenant que $V = v_0$. Par définition de (B', S') , nous pouvons considérer une arête $e \in \mathbb{E}_n$ telle que

$$|\mathcal{M}_n(\omega(B', S')_e)| \leq B' + 2. \quad (5.15)$$

Nous choisissons cette arête e minimale (pour l'ordre $e_1, \dots, e_r$ que nous nous sommes donné sur $\mathbb{E}_n^T$) parmi les arêtes qui vérifient (5.15), ce qui assure que e ne dépend que de B' , $\omega(B', S')$ et V . Nous construisons ensuite l'ensemble H en distinguant deux cas selon que cette inégalité (5.15) est stricte ou non.

- S'il y a égalité dans (5.15), alors nous posons $H = \{e\}$.
- Supposons que l'inégalité (5.15) est stricte. D'après (5.14), nous avons

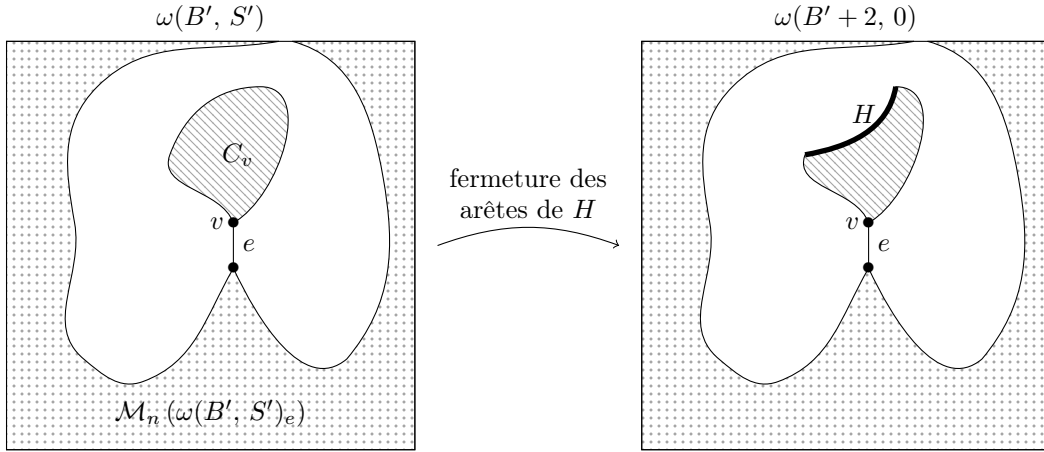


FIGURE 5.4 – Si l'inégalité (5.15) est stricte, alors la fermeture de l'arête e dans la configuration $\omega(B', S')$ fait diminuer le nombre $|\mathcal{M}_n|$ de sommets reliés au bord de la boîte. Cela signifie que l'une des extrémités de l'arête e , que nous notons v , se retrouve déconnectée du bord à la fermeture de l'arête e . Nous choisissons alors une partie H des arêtes du cluster C_v qui se retrouve déconnecté par la fermeture de e , telle que la fermeture des arêtes de H et d'aucune autre arête de $\mathbb{E}[\mathcal{M}_n]$ entre les instants (B', S') et $(B' + 2, 0)$ entraîne que $|\mathcal{M}_n(\omega(B' + 2))| = B' + 2$.

$$|\mathcal{M}_n(\omega(B', S')_e)| < |\mathcal{M}_n(\omega(B', S'))| ,$$

c'est-à-dire que la fermeture de l'arête e modifie le nombre de sommets reliés au bord. Par conséquent, l'une des extrémités de e , que nous noterons v , doit se retrouver déconnectée de $\partial\Lambda(n)$ à la fermeture de l'arête e dans la configuration $\omega(B', S')$. Notons (C_v, E_v) le graphe du cluster ouvert de v dans la configuration $\omega(B', S')_e$. Ainsi nous avons

$$|\mathcal{M}_n(\omega(B', S')_e)| = |\mathcal{M}_n(\omega(B', S'))| - |C_v| \geq B' + 2 - |C_v|$$

d'après (5.14). Combinant ceci avec l'inégalité stricte (5.15), nous obtenons

$$1 \leq B' + 2 - |\mathcal{M}_n(\omega(B', S')_e)| \leq |C_v| .$$

En vertu du lemme 31 appliqué au graphe (C_v, E_v) et au point v , nous pouvons choisir un ensemble d'arêtes $H \subset E_v$, de cardinal

$$|H| \leq K |C_v|^{\frac{d-1}{d}} \quad (5.16)$$

tel que le cluster de v dans le graphe $(C_v, E_v \setminus H)$ contient exactement $B' + 2 - |\mathcal{M}_n(\omega(B', S')_e)|$ sommets. Nous avons alors

$$|\mathcal{M}_n(\omega(B', S')_H)| = B' + 2.$$

L'arête e (et donc le sommet v) ne dépendant que de B' , $\omega(B', S')$ et V , nous pouvons prendre un tel ensemble d'arêtes H qui ne dépend lui aussi que de B' , $\omega(B', S')$ et V . Par ailleurs, nous avons le contrôle suivant sur $|C_v|$:

$$|C_v| = |C_{\Lambda(n)}(v, \omega(B', S')_e)| \leq |C_{\Lambda(n)}(v, \omega(B', S'))| \leq |C_{max}^T(\omega(B', S'))|. \quad (5.17)$$

Remarquons maintenant que $|C_{max}^T(\omega)|$ est une fonction croissante de ω et que, par définition, nous avons $(B', S') \geq (B, S)$, d'où

$$|C_{max}^T(\omega(B', S'))| \leq |C_{max}^T(\omega(B, S))| \leq 2B + 3. \quad (5.18)$$

Combinant (5.17) et (5.18), nous obtenons

$$|C_v| \leq 2B + 3,$$

et donc la majoration (5.16) devient

$$|H| \leq K(2B + 3)^{\frac{d-1}{d}}. \quad (5.19)$$

Ainsi, pour résumer ces deux cas, nous avons construit un ensemble (aléatoire) d'arêtes $H \subset \mathbb{E}_n$ de cardinal contrôlé par l'inégalité (5.19) et tel que

$$V = v_0 \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{M}_n(\omega(B', S')_H)| = B' + 2.$$

Par conséquent, conditionnellement à l'événement $\{V = v_0\}$, il suffit de fermer les arêtes de H et aucune autre arête de $\mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega(B', S'))]$ entre les configurations $\omega(B', S')$ et $\omega(B' + 2, 0)$ pour avoir

$$|\mathcal{M}_n(\omega(B' + 2))| = B' + 2. \quad (5.20)$$

Nous considérons donc l'événement

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{ll} \forall s > S' & e_s \in \mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega(B', S'))] \Rightarrow X_{B', e_s} = 1 \\ \forall e \in H & X_{B'+1, e} = 0 \\ \forall e \in \mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega(B', S'))] \setminus H & X_{B'+1, e} = 1 \end{array} \right\}$$

qui, s'il est réalisé et si $V = v_0$, implique (5.20). Nous avons donc

$$Z_n = \sum_{b=1}^{n^d} \mathbb{P}_{\varphi_n(b)}(|\mathcal{M}_n| = b) = \mathbb{P}(\exists b \in \{1, \dots, n^d\} \mid \mathcal{M}_n(\omega(b))| = b) \geq \mathbb{P}(\mathcal{E} \cap \{V = v_0\}). \quad (5.21)$$

Probabilité conditionnelle de l'heureux événement : De même qu'en section 1.3, nous nous donnons (b_0, b'_0, s'_0) et $\omega_0 : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$ tels que

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_{b_0, b'_0, s'_0, \omega_0}) > 0 \quad \text{où} \quad \mathcal{C}_{b_0, b'_0, s'_0, \omega_0} = \{V = v_0\} \cap \{(B, B', S') = (b_0, b'_0, s'_0)\} \cap \{\omega(B', S') = \omega_0\}.$$

Par définition de B et B' , nous avons

$$|\mathcal{M}_n(\omega_0)| \leq (B' + 2) + (2B + 3) \leq 3B' + 5.$$

Cet événement $\mathcal{C}_{b_0, b'_0, s'_0, \omega_0}$ ne dépend que des variables aléatoires X_{b, e_s} pour $(b, s) \leq (b'_0, s'_0)$ et, conditionnellement à cet événement, l'événement $\mathcal{E}$ ne dépend que des variables X_{b, e_s} pour des indices (b, s)

vérifiant $(b'_0, s'_0) < (b, s) < (b'_0 + 2, 0)$. De plus, l'ensemble H ne dépend que de B' , $\omega(B', S')$ et V , donc nous pouvons écrire $H = H(B', \omega(B', S'), V)$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{E} \mid \mathcal{C}_{b_0, b'_0, s'_0, \omega_0}) &= \prod_{\substack{s > s'_0 \\ e_s \in \mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega_0)]}} \mathbb{P}(X_{b'_0, e_s} = 1) \times \prod_{e \in H(b'_0, \omega_0, v_0)} \mathbb{P}(X_{b'_0+1, e} = 0) \\ &\quad \times \prod_{e \in \mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega_0)] \setminus H(b'_0, \omega_0, v_0)} \mathbb{P}(X_{b'_0+1, e} = 1) \\ &\geq \left(e^{-1/n^a}\right)^{2|\mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega_0)]|} \left(1 - e^{-1/n^a}\right)^{|H(b'_0, \omega_0, v_0)|} \\ &\geq \exp\left(-\frac{2d|\mathcal{M}_n(\omega_0)|}{n^a}\right) \left(\frac{1}{2n^a}\right)^{|H(b'_0, \omega_0, v_0)|} \\ &\geq \exp\left(-\frac{2d(3B' + 5)}{n^a} - 2a(\ln n) |H(b'_0, \omega_0, v_0)|\right). \end{aligned}$$

En utilisant la majoration (5.19), nous obtenons alors

$$\mathbb{P}(\mathcal{E} \mid B, B', S', \omega(B', S'), V) \geq \mathbb{1}_{V=v_0} \exp\left(-\frac{2d(3B' + 5)}{n^a} - 2Ka(\ln n)(2B + 3)^{\frac{d-1}{d}}\right).$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à (B', V) , ceci se ramène à

$$\mathbb{P}(\mathcal{E} \mid B', V) \geq \mathbb{1}_{V=v_0} \exp\left(-\frac{2d(3B' + 5)}{n^a} - 2Ka(\ln n)(2B' + 3)^{\frac{d-1}{d}}\right). \quad (5.22)$$

Majoration de B' : D'après le lemme 38 nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} \ln \mathbb{P}_{p_c/2} \left[|\mathcal{M}_n| \geq n^a \left(-\ln \left(\frac{p_c}{2} \right) \right) \right] < 0.$$

Nous avons donc

$$\mathbb{P}_{p_c/2} \left[|\mathcal{M}_n| \geq n^a \left(-\ln \left(\frac{p_c}{2} \right) \right) \right] = o\left(\frac{1}{n^d}\right),$$

et donc, si nous posons

$$b_n = \left\lceil n^a \left(-\ln \left(\frac{p_c}{2} \right) \right) \right\rceil,$$

alors nous avons, à partir d'un certain rang,

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{M}_n(\omega(b_n))| \geq b_n\right) \leq \mathbb{P}_{p_c/2} \left[|\mathcal{M}_n| \geq n^a \left(-\ln \left(\frac{p_c}{2} \right) \right) \right] \leq \frac{1}{2n^d}.$$

Nous avons alors, en utilisant le fait que $\mathbb{P}(V = v_0) \geq 1/n^d$,

$$\mathbb{P}\left(V = v_0 \text{ et } |\mathcal{M}_n(\omega(b_n))| < b_n\right) \geq \frac{1}{n^d} - \frac{1}{2n^d} = \frac{1}{2n^d}.$$

Or, si $V = v_0$ et $|\mathcal{M}_n(\omega(b_n))| < b_n$, alors l'inégalité (5.14) implique que $B' < b_n$. Nous en déduisons donc qu'à partir d'un certain rang,

$$\mathbb{P}\left(V = v_0 \text{ et } B' < b_n\right) \geq \frac{1}{2n^d}.$$

Nous pouvons donc trouver $\kappa \geq 2$ tel que, à partir d'un certain rang,

$$\mathbb{P}(V = v_0 \text{ et } B' \leq \kappa n^a) \geq \frac{1}{2n^d}. \quad (5.23)$$

Conclusion : Combinant (5.22) et (5.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{V = v_0\} \cap \mathcal{E}) &\geq \mathbb{P}(V = v_0 \text{ et } B' \leq \kappa n^a) \mathbb{P}(\mathcal{E} \mid V = v_0 \text{ et } B' \leq \kappa n^a) \\ &\geq \frac{1}{2n^d} \exp\left(-\frac{2d(3\kappa n^a + 5)}{n^a} - 2Ka(\ln n)(2\kappa n^a + 3)^{\frac{d-1}{d}}\right) \\ &\geq \frac{1}{2n^d} \exp\left(-6d\kappa - \frac{10d}{n^a} - 8K\kappa a(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right). \end{aligned}$$

Étant donné (5.21), nous obtenons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{(\ln n)n^{a(d-1)/d}} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{P}(\{V = v_0\} \cap \mathcal{E})}{(\ln n)n^{a(d-1)/d}} \geq -8K\kappa a > -\infty,$$

ce qui est bien la minoration recherchée. $\square$

2.4 Démonstration du résultat

Une fois la minoration obtenue sur Z_n (lemme 40) et les résultats de décroissance exponentielle établis dans les régimes sous-critique (lemme 38) et surcritique (lemme 39), le résultat de convergence du théorème 8 se prouve de façon identique à la preuve pour le cas de C_{max} , qui est détaillée en section 1.4.

3 Modèle avec la distribution des tailles de cluster

L'objectif de cette partie est de démontrer le troisième cas du théorème 8, ainsi que le théorème 9. Nous fixons donc deux réels a et b tels que

$$\frac{5d}{6} < a < d \quad \text{et} \quad 0 < b < \frac{2a}{d} - \frac{5}{3}. \quad (5.24)$$

Rappelons la définition, pour $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$, de

$$B_n^b(\omega) = \left| \left\{ x \in \Lambda(n), |C_{\Lambda(n)}(x, \omega)| \geq n^b \right\} \right|.$$

Définissons également, pour $\omega : \mathbb{E}^d \rightarrow \{0, 1\}$ et $X \subset \mathbb{Z}^d$,

$$A_n^b(X) = A_n^b(X, \omega) = \left| \left\{ x \in X, |C(x, \omega)| \geq n^b \right\} \right|.$$

3.1 Préliminaires

Nous commençons par démontrer trois lemmes préliminaires.

Lemme 41. *Pour tous $\eta > 0$ et $r < \eta/2$, et pour tous $p, q \in [0, 1]$ tels que $\eta < q < 1 - \eta$ et $|p - q| < r$, nous avons*

$$\forall n \geq 1 \quad \forall \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n} \quad \mathbb{P}_p(\omega) \geq \mathbb{P}_q(\omega) \exp\left(-\frac{2dn^dr}{\eta}\right).$$

Démonstration. Soient η, r, p, q, n et ω comme dans l'énoncé. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\omega) &= \mathbb{P}_q(\omega) \left(\frac{p}{q}\right)^{o(\omega)} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{|\mathbb{E}_n| - o(\omega)} \\
&\geq \mathbb{P}_q(\omega) \left(1 - \frac{r}{q}\right)^{o(\omega)} \left(1 - \frac{r}{1-q}\right)^{|\mathbb{E}_n| - o(\omega)} \\
&\geq \mathbb{P}_q(\omega) \left(1 - \frac{r}{\eta}\right)^{|\mathbb{E}_n|} \\
&\geq \mathbb{P}_q(\omega) \exp\left(|\mathbb{E}_n| \ln\left(\frac{2r}{\eta} \left(\frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{2r}{\eta}\right) \times 1\right)\right) \\
&\geq \mathbb{P}_q(\omega) \exp\left(|\mathbb{E}_n| \frac{2r}{\eta} \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&\geq \mathbb{P}_q(\omega) \exp\left(-\frac{2r|\mathbb{E}_n|}{\eta}\right),
\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme puisque $|\mathbb{E}_n| \leq dn^d$. $\square$

Lemme 42. *Nous avons l'encadrement suivant*

$$\forall n \geq 1 \quad \forall \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} \quad A_n^b(\Lambda(n), \omega) - 4dn^{b+d-1} \leq B_n^b(\omega) \leq A_n^b(\Lambda(n), \omega). \quad (5.25)$$

Démonstration. L'inégalité de droite provient du fait que, pour tout $x \in \Lambda(n)$, nous avons $C_{\Lambda(n)}(x) \subset C(x)$. Pour obtenir l'inégalité de gauche, il suffit de remarquer que, si $x \in \Lambda(n - 2 \lceil n^b \rceil)$, alors les événements

$$\{|C_{\Lambda(n)}(x)| \geq n^b\} \quad \text{et} \quad \{|C(x)| \geq n^b\}$$

coïncident, donc

$$B_n^b(\omega) \geq A_n^b(\Lambda(n - 2 \lceil n^b \rceil), \omega) \geq A_n^b(\Lambda(n), \omega) - (|\Lambda(n)| - |\Lambda(n - 2 \lceil n^b \rceil)|).$$

Il suffit alors de remarquer que

$$|\Lambda(n)| - |\Lambda(n - 2 \lceil n^b \rceil)| \leq 2dn^{d-1} \lceil n^b \rceil \leq 4dn^{b+d-1}$$

pour obtenir le résultat. $\square$

Lemme 43. *Nous contrôlons $\mathbb{E}_p[A_n^b(\Lambda(m))]$ en majorant d'une part, en régime sous-critique*

$$\forall p < p_c \quad \exists \lambda(p) > 0 \quad \forall n, m \geq 1 \quad \mathbb{E}_p[A_n^b(\Lambda(m))] \leq m^d \exp(-n^b \lambda(p)), \quad (5.26)$$

et en minorant comme suit en régime surcritique

$$\forall p > p_c \quad \forall n, m \geq 1 \quad \mathbb{E}_p[A_n^b(\Lambda(m))] \geq m^d \theta(p). \quad (5.27)$$

Démonstration. Nous écrivons

$$\mathbb{E}_p[A_n^b(\Lambda(m))] = \sum_{x \in \Lambda(m)} \mathbb{P}_p(|C(x)| \geq \lceil n^b \rceil) = m^d \mathbb{P}_p(|C(0)| \geq \lceil n^b \rceil).$$

La majoration (5.26) découle alors directement de la proposition 4 selon laquelle

$$\forall p < p_c \quad \exists \lambda(p) > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}_p(|C(0)| \geq n) \leq e^{-n \lambda(p)}.$$

Nous remarquons par ailleurs que

$$\mathbb{P}_p(|C(0)| \geq \lceil n^b \rceil) \geq \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) = \theta(p),$$

ce qui démontre la minoration (5.27). $\square$

3.2 Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique

Nous démontrons encore un résultat de décroissance exponentielle dans la phase surcritique.

Lemme 44. *Nous avons la majoration*

$$\forall p < p_c \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2a-bd-d}} \ln \mathbb{P}_p(B_n^b > An^a) < 0.$$

Démonstration. Soient $A > 0$ et $p < p_c$. D'après l'encadrement (5.25), nous avons $B_n^b \leq A_n^b$ donc il suffit de démontrer le résultat avec A_n^b à la place de B_n^b . Nous nous intéresserons donc dans la suite à A_n^b . Nous allons découper $\Lambda(n)$ en boîtes carrées (avec des boîtes éventuellement pas carrées sur les bords), comme représenté sur la figure 5.5. Explicitons ce découpage. Posons

$$N = \lceil 2n^b \rceil \quad \text{et} \quad M = 3 + \left\lfloor \frac{n}{2N} \right\rfloor.$$

Nous pouvons écrire $\mathbb{Z}^d$ comme une partition

$$\mathbb{Z}^d = \bigsqcup_{z \in \mathbb{Z}^d} (Nz + \Lambda(N)) = \bigsqcup_{\substack{x \in \{0,1\}^d \\ y \in \mathbb{Z}^d}} (N(x + 2y) + \Lambda(N)).$$

Nous définissons, pour $x \in \{0,1\}^d$ et $y \in \mathbb{Z}^d$, la boîte

$$\mathcal{B}_{x,y} = (N(x + 2y) + \Lambda(N)) \cap \Lambda(n).$$

Les boîtes ainsi construites ont les propriétés suivantes :

- (i) Si $z \in \mathcal{B}_{x,y}$ et $z' \in \mathcal{B}_{x,y'}$ sont dans deux boîtes de même indice x mais avec $y \neq y'$, alors nous avons $\|z - z'\|_\infty > N$.
- (ii) Les boîtes $\mathcal{B}_{x,y}$ avec $y \notin \Lambda(M)$ sont vides. En effet, pour $x \in \{0,1\}^d$, $y \in \mathbb{Z}^d$ et $z \in \Lambda(N)$, nous avons

$$\begin{aligned} y \notin \Lambda(M) &\Rightarrow \|y\|_\infty \geq \frac{M}{2} \geq \frac{n}{4N} + 1 \\ &\Rightarrow \|N(x + 2y) + z\|_\infty \geq -N + \frac{n}{2} + 2N - \frac{N}{2} > \frac{n}{2} \\ &\Rightarrow N(x + 2y) + z \notin \Lambda(n). \end{aligned}$$

- (iii) Inversement, si $y \in \Lambda(M - 5)$ alors la boîte $\mathcal{B}_{x,y}$ est pleine, c'est-à-dire de cardinal N^d . En effet, pour $x \in \{0,1\}^d$, $y \in \mathbb{Z}^d$ et $z \in \Lambda(N)$, nous avons

$$\begin{aligned} y \in \Lambda(M - 5) &\Rightarrow \|y\|_\infty \leq \frac{M - 5}{2} \leq \frac{n}{4N} - 1 \\ &\Rightarrow \|N(x + 2y) + z\|_\infty \leq N + \frac{n}{2} - 2N + \frac{N}{2} < \frac{n}{2} \\ &\Rightarrow N(x + 2y) + z \in \Lambda(n). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une partition de la boîte $\Lambda(n)$,

$$\Lambda(n) = \bigsqcup_{x \in \{0,1\}^d} \mathcal{D}_x \quad \text{où} \quad \mathcal{D}_x = \bigsqcup_{y \in \Lambda(M)} \mathcal{B}_{x,y},$$

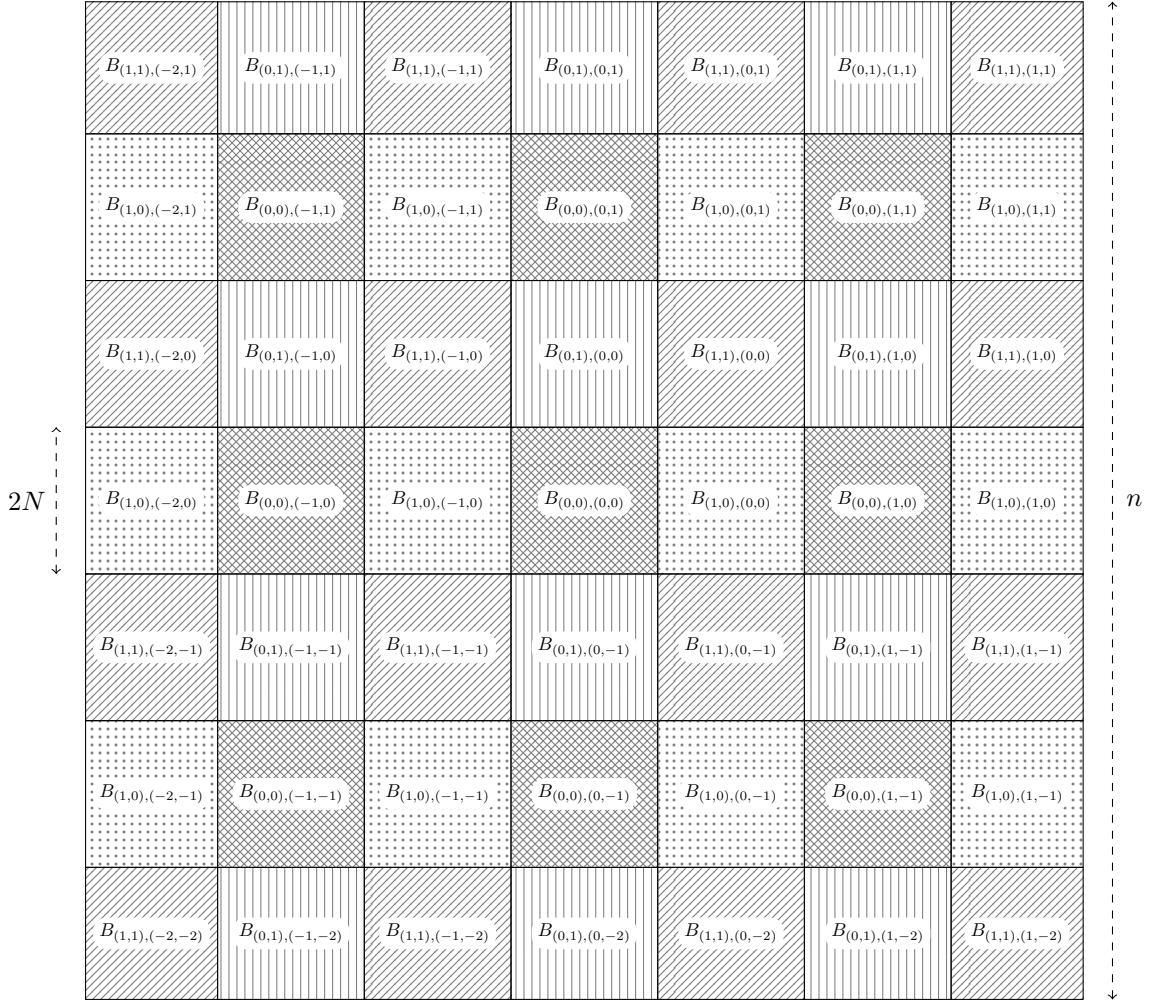


FIGURE 5.5 – Partition de $\Lambda(n)$ en 2^d sous-ensembles $\mathcal{D}_x$ correspondant aux différents styles de hachures, chaque $\mathcal{D}_x$ étant à son tour partitionné en boîtes $\mathcal{B}_{x,y}$ avec $y \in \Lambda(M)$.

avec chacun des ensembles $\mathcal{D}_x$ qui correspond à un type de hachures sur la figure 5.5. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_p \left(A_n^b(\Lambda(n)) > An^a \right) &= \mathbb{P}_p \left(\sum_{x \in \{0,1\}^d} A_n^b(\mathcal{D}_x) > An^a \right) \\
 &\leq \mathbb{P}_p \left(\exists x \in \{0,1\}^d \quad A_n^b(\mathcal{D}_x) > \frac{An^a}{2^d} \right) \\
 &\leq \sum_{x \in \{0,1\}^d} \mathbb{P}_p \left(A_n^b(\mathcal{D}_x) > \frac{An^a}{2^d} \right). \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \{0,1\}^d$, la majoration (5.26) fournit

$$\mathbb{E}_p[A_n^b(\mathcal{D}_x)] \leq \mathbb{E}_p[A_n^b(\Lambda(n))] \leq n^d \exp(-\lambda(p)n^b) = o(n^a).$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang,

$$\forall x \in \{0, 1\}^d \quad \mathbb{E}_p[A_n^b(\mathcal{D}_x)] \leq \frac{An^a}{2^{d+1}},$$

ce qui permet d'écrire, à partir d'un certain rang,

$$\mathbb{P}_p\left(A_n^b(\mathcal{D}_x) > \frac{An^a}{2^d}\right) \leq \mathbb{P}_p\left(A_n^b(\mathcal{D}_x) - \mathbb{E}_p[A_n^b(\mathcal{D}_x)] > \frac{An^a}{2^{d+1}}\right). \quad (5.29)$$

Observons à présent que la propriété (i) ci-dessus entraîne que pour $z \in \mathcal{B}_{x,y}$ et $z' \in \mathcal{B}_{x,y'}$ avec $y \neq y'$, les événements $\{|C(z)| \geq n^b\}$ et $\{|C(z')| \geq n^b\}$ sont indépendants. La somme suivante est donc une somme de variables indépendantes.

$$\forall x \in \{0, 1\}^d \quad A_n^b(\mathcal{D}_x) = \sum_{y \in \Lambda(M)} A_n^b(\mathcal{B}_{x,y}).$$

De plus, les variables $A_n^b(\mathcal{B}_{x,y})$ prennent toutes leurs valeurs dans $\{0, \dots, N^d\}$, et le nombre de variables dans la somme est $|\Lambda(M)|$. Nous pouvons donc appliquer l'inégalité de Hoeffding [Hoe63] pour obtenir qu'à partir d'un certain rang,

$$\mathbb{P}_p\left(A_n^b(\mathcal{D}_x) - \mathbb{E}_p[A_n^b(\mathcal{D}_x)] > \frac{An^a}{2^{d+1}}\right) \leq \exp\left(-\frac{2A^2n^{2a}}{2^{2d+2}|\Lambda(M)|N^{2d}}\right).$$

Or nous avons, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{n^{2a}}{|\Lambda(M)|N^{2d}} \sim \frac{n^{2a}}{N^{2d}} \left(\frac{2N}{n}\right)^d \sim \frac{2^d n^{2a-d}}{N^d} \sim n^{2a-bd-d},$$

et donc à partir d'un certain rang,

$$\mathbb{P}_p\left(A_n^b(\mathcal{D}_x) - \mathbb{E}_p[A_n^b(\mathcal{D}_x)] > \frac{An^a}{2^{d+1}}\right) \leq \exp\left(-\frac{A^2}{2^{2d+2}} n^{2a-bd-d}\right). \quad (5.30)$$

Il ne reste alors plus qu'à combiner (5.28), (5.29), (5.30) et (5.25) pour obtenir qu'à partir d'un certain rang,

$$\mathbb{P}_p(B_n^b > An^a) \leq 2^d \exp\left(-\frac{A^2}{2^{2d+2}} n^{2a-bd-d}\right),$$

ce qui implique notre résultat. $\square$

3.3 Décroissance exponentielle dans le régime surcritique

Nous nous intéressons maintenant aux déviations dans le régime $p > p_c$.

Lemme 45. *Nous avons la majoration*

$$\forall p > p_c \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d-bd}} \ln \mathbb{P}_p(B_n^b < An^a) < 0.$$

Démonstration. Nous reprenons le même découpage en boîtes que dans la preuve du lemme 44. D'après l'encadrement (5.25), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(B_n^b < An^a) &\leq \mathbb{P}_p(A_n^b(\Lambda(n)) < An^a + 4dn^{b+d-1}) \\ &\leq \mathbb{P}_p\left(\forall x \in \{0, 1\}^d \quad A_n^b(\mathcal{D}_x) < An^a + 4dn^{b+d-1}\right) \\ &\leq \mathbb{P}_p(A_n^b(\mathcal{D}_0) < An^a + 4dn^{b+d-1}). \end{aligned} \quad (5.31)$$

D'après la propriété (iii) du découpage en boîtes, l'ensemble $\mathcal{D}_0$ contient au moins $(M-5)^d$ boîtes de cardinal N^d , donc nous pouvons utiliser (5.27) pour écrire

$$\mathbb{E}_p [A_n^b(\mathcal{D}_0)] \geq (M-5)^d N^d \theta(p) \sim M^d N^d \theta(p) \sim \left(\frac{n}{2N}\right)^d N^d \theta(p) \sim \frac{n^d}{2^d} \theta(p).$$

Or nous avons supposé $a < d$ et $b < 1$, donc nous avons, à partir d'un certain rang,

$$An^a + 4dn^{b+d-1} \leq \frac{n^d}{2^{d+2}} \theta(p) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}_p [A_n^b(\mathcal{D}_0)]. \quad (5.32)$$

La majoration (5.31) devient donc

$$\mathbb{P}_p(B_n^b < An^a) \leq \mathbb{P}_p\left(A_n^b(\mathcal{D}_0) - \mathbb{E}_p[A_n^b(\mathcal{D}_0)] < -\frac{n^d}{2^{d+2}} \theta(p)\right).$$

Nous appliquons là encore l'inégalité de Hoeffding et nous obtenons (toujours à partir d'un certain rang)

$$\mathbb{P}_p(B_n^b < An^a) \leq \exp\left(-\frac{2n^{2d}\theta(p)^2}{2^{2d+4} |\Lambda(M)| N^{2d}}\right).$$

Or nous avons

$$\frac{n^{2d}}{|\Lambda(M)| N^{2d}} \sim \frac{n^{2d}}{N^{2d}} \left(\frac{n}{2N}\right)^{-d} \sim \frac{2^d n^d}{N^d} \sim n^{d-bd},$$

ce qui termine la preuve de notre lemme. $\square$

3.4 Minoration de la fonction de partition

Il nous reste à minorer la constante de normalisation Z_n . Nous démontrons donc le résultat suivant.

Lemme 46. *Pour tous paramètres a et b vérifiant les conditions (5.24), nous avons la minoration*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{n^{2d/3}} > -\infty.$$

Démonstration. La fonction

$$f_n : p \mapsto \varphi_n(\mathbb{E}_p[B_n^b]) = \exp\left(-\frac{\mathbb{E}_p[B_n^b]}{n^a}\right)$$

est continue et décroissante sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$. Elle admet donc sur cet intervalle un unique point fixe, que nous noterons q_n . Notons d'une part que, si $p < p_c$, alors la majoration (5.25) et l'inégalité (5.26) entraînent que

$$f_n(p) \geq \varphi_n(\mathbb{E}_p[A_n^b(\Lambda(n))]) \geq \exp\left(-n^{d-a} e^{-\lambda(p)n^b}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

D'autre part, si $p > p_c$ alors la minoration (5.25), l'inégalité (5.27) et les conditions (5.24) impliquent que

$$f_n(p) \leq \exp\left(-\frac{\mathbb{E}_p[A_n^b(\Lambda(n))] - 4dn^{b+d-1}}{n^a}\right) \leq \exp\left(-n^{d-a}\theta(p) + 4dn^{b-a+d-1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous en déduisons que q_n tend vers p_c quand n tend vers l'infini. Vu que q_n n'est jamais égal à 0 ou 1 et que $0 < p_c < 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \eta < q_n < 1 - \eta.$$

Définissons maintenant

$$r_n = \frac{1}{n^a} \sqrt{2\text{Var}_{q_n} [B_n^b]},$$

où Var_{q_n} désigne la variance sous la loi $\mathbb{P}_{q_n}$. Le point clef de notre démonstration est le contrôle de cette variance, en utilisant le fait que si deux sommets $x, y \in \Lambda(n)$ sont tels que $|x - y|_1 \geq 2n^b$, alors les événements $\{|C_{\Lambda(n)}(x)| \geq n^b\}$ et $\{|C_{\Lambda(n)}(y)| \geq n^b\}$ sont indépendants. Cette propriété d'indépendance nous permet de procéder à la majoration suivante.

$$\begin{aligned} \text{Var}_{q_n} [B_n^b] &= \text{Var}_{q_n} \left[\sum_{x \in \Lambda(n)} \mathbb{1}_{\{|C_{\Lambda(n)}(x)| \geq n^b\}} \right] \\ &= \sum_{x, y \in \Lambda(n)} \text{Cov} \left[\mathbb{1}_{\{|C_{\Lambda(n)}(x)| \geq n^b\}}, \mathbb{1}_{\{|C_{\Lambda(n)}(y)| \geq n^b\}} \right] \\ &= \sum_{\substack{x, y \in \Lambda(n) \\ |x - y|_1 < 2n^b}} \text{Cov} \left[\mathbb{1}_{\{|C_{\Lambda(n)}(x)| \geq n^b\}}, \mathbb{1}_{\{|C_{\Lambda(n)}(y)| \geq n^b\}} \right] \\ &\leq \left| \left\{ (x, y) \in \Lambda(n)^2 : |x - y|_1 < 2n^b \right\} \right| \\ &\leq 4^d n^{bd+d}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$r_n \leq 2^{d+1} n^{bd/2+d/2-a} \leq \frac{2^{d+1}}{n^{d/3}},$$

d'après la condition (5.24), ce qui assure que r_n tend vers 0 et donc que $r_n < \eta/2$ à partir d'un certain rang. Nous pouvons maintenant minorer la fonction de partition. Grâce au lemme 41, nous avons, à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} Z_n &\geq \sum_{\substack{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n} \\ |p_n(\omega) - q_n| < r_n}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \\ &\geq \sum_{\substack{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n} \\ |p_n(\omega) - q_n| < r_n}} \mathbb{P}_{q_n}(\omega) \exp \left(-\frac{2dn^d r_n}{\eta} \right) \\ &\geq \mathbb{P}_{q_n}(|p_n - q_n| < r_n) \exp \left(-\frac{2^{d+2}dn^{2d/3}}{\eta} \right). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Nous utilisons ensuite la définition de p_n et q_n , ainsi que le caractère 1-lipschitzien de la fonction exponentielle sur $]-\infty, 0]$, pour écrire, à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{q_n}(|p_n - q_n| < r_n) &= \mathbb{P}_{q_n}(|\varphi_n(B_n^b) - \varphi_n(\mathbb{E}_{q_n}[B_n^b])| < r_n) \\ &\geq \mathbb{P}_{q_n} \left(\left| \frac{B_n^b}{n^a} - \frac{\mathbb{E}_{q_n}[B_n^b]}{n^a} \right| < r_n \right) \\ &= \mathbb{P}_{q_n}(|B_n^b - \mathbb{E}_{q_n}[B_n^b]| < r_n n^a) \\ &= \mathbb{P}_{q_n}((B_n^b - \mathbb{E}_{q_n}[B_n^b])^2 < 2\text{Var}_{q_n}[B_n^b]) \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5.34)$$

d'après l'inégalité de Tchebychev. En combinant (5.33) et (5.34), nous obtenons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{n^{2d/3}} \geq -\frac{2^{d+2}d}{\eta} > -\infty,$$

ce qui achève la preuve de notre lemme. $\square$

3.5 Démonstration du résultat

Étant donné les majorations obtenues dans les régime sous-critique et surcritique et la minoration obtenue sur la fonction de partition, la démonstration du résultat de convergence du théorème 8 est en tout point similaire à la preuve pour le cas de C_{max} , qui est détaillée en section 1.4, avec seulement des exposants différents. La condition (5.24) implique que

$$2a - bd - d > \frac{5d}{3} - d = \frac{2d}{3} \quad \text{et} \quad d - bd > d - 2a + \frac{5d}{3} > \frac{2d}{3},$$

ce qui permet d'obtenir l'exposant voulu.

3.6 Contrôle de la vitesse de convergence

Nous précisons à présent les arguments précédents pour obtenir une estimation de la vitesse de convergence de p_n vers p_c . Pour toute cette partie, nous supposons qu'il existe des réels $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que

$$\limsup_{\substack{p \rightarrow p_c \\ p > p_c}} \frac{\ln \theta(p)}{\ln(p - p_c)} \leq \beta \quad \text{et} \quad \liminf_{\substack{p \rightarrow p_c \\ p < p_c}} \frac{\ln \chi(p)}{\ln(p_c - p)} \geq -\gamma,$$

et nous nous donnons des réels a, b et c vérifiant

$$\frac{5d}{6} < a < d, \quad 0 < b < \frac{2a}{d} - \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad 0 < c < \min\left(\frac{b}{2\gamma}, \frac{1-b}{\beta}, \frac{d-a}{\beta}\right).$$

Nous choisissons également β' et γ' tels que

$$\beta < \beta' < \min\left(\frac{1-b}{c}, \frac{d-a}{c}\right) \quad \text{et} \quad \gamma < \gamma' < \frac{b}{2c}.$$

Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\theta(p_c + \varepsilon) \geq \varepsilon^{\beta'} \quad \text{et} \quad \chi(p_c - \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^{\gamma'}}.$$

Régime sous-critique

Lemme 47. *Nous avons la majoration*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2a-bd-d}} \ln \mathbb{P}_{p_c - \varepsilon/n^c} \left(B_n^b > A n^a \right) < 0.$$

Démonstration. Soient $A > 0$ et $0 < \varepsilon < p_c$. Quitte à prendre ε plus petit, nous pouvons supposer que $\varepsilon < \varepsilon_0$. Nous reprenons le fil de la preuve du lemme 44, en remplaçant p par $p_c - \varepsilon/n^c$. Pour contrôler $\mathbb{E}_{p_c - \varepsilon/n^c} [A_n^b(\mathcal{D}_x)]$, la majoration (5.26) ne suffit plus, parce que nous avons besoin d'explicitier la dépendance en n de $\lambda(p_c - \varepsilon/n^c)$. Nous utilisons donc la seconde partie de la proposition 4. Par notre choix de γ' , nous avons

$$\chi\left(p_c - \frac{\varepsilon}{n^c}\right)^2 \leq \frac{n^{2\gamma'c}}{\varepsilon^{2\gamma'}} = o(n^b),$$

donc la condition $n^b \geq \chi(p_c - \varepsilon/n^c)^2$ est vérifiée à partir d'un certain rang. Cela permet alors d'appliquer la proposition 4 pour obtenir, pour tout $x \in \{0, 1\}^d$, à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p_c - \varepsilon/n^c} [A_n^b(\mathcal{D}_x)] &\leq \mathbb{E}_{p_c - \varepsilon/n^c} [A_n^b(\Lambda(n))] \\ &\leq n^d \mathbb{P}_{p_c - \varepsilon/n^c} (|C(0)| \geq \lceil n^b \rceil) \\ &\leq 2n^d \exp \left(- \frac{n^b}{2\chi \left(p_c - \frac{\varepsilon}{n^c} \right)^2} \right) \\ &\leq 2n^d \exp \left(- \frac{\varepsilon^{2\gamma'} n^{b-2\gamma'c}}{2} \right) = o(n^a). \end{aligned}$$

La suite de la preuve est alors identique à la preuve du lemme 44. $\square$

Régime surcritique

Lemme 48. *Nous avons la majoration*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d-bd-2c}} \ln \mathbb{P}_{p_c + \varepsilon/n^c} (B_n^b < An^a) < 0.$$

Démonstration. La preuve est identique à la preuve du lemme 45, en remplaçant p par $p_c + \varepsilon/n^c$, et en remarquant pour obtenir (5.32) que la comparaison

$$An^a + 4dn^{b+d-1} = o(n^{d\theta(p_c + \varepsilon/n^c)})$$

découle des inégalités $a < d - c\beta'$ et $b + d - 1 < d - c\beta'$. $\square$

Conclusion

Nous obtenons donc la convergence de $n^c(p_n - p_c)$ vers 0 en combinant la minoration de Z_n obtenue dans le lemme 46 et les résultats des lemmes 47 et 48 ci-dessus, de la même manière qu'en section 1.4.

3.7 Variante avec les diamètres des clusters

Pour traiter la variante du modèle obtenue en remplaçant B_n^b par la fonction

$$\tilde{B}_n^b : \omega \mapsto \left| \left\{ x \in \Lambda(n), x \xleftrightarrow{\omega} (x + \partial\Lambda(\lceil n^b \rceil)) \cap \Lambda(n) \right\} \right|,$$

nous utilisons la même technique, en remplaçant A_n^b par

$$\tilde{A}_n^b : (X, \omega) \mapsto \left| \left\{ x \in X, x \xleftrightarrow{\omega} (x + \partial\Lambda(\lceil n^b \rceil)) \right\} \right|.$$

La seule différence est qu'il faut alors utiliser la proposition 3 au lieu de la proposition 4 et nous obtenons alors le même résultat de convergence avec les mêmes conditions sur a et b et la même estimation de la vitesse de convergence.

Chapitre 6

Un modèle d'Ising de criticité auto-organisée en dimension 2

Ce chapitre est consacré à l'étude du modèle décrit en section 3 du chapitre 2. Rappelons que ce modèle est défini comme la distribution de probabilité

$$\mu_n : \sigma \in \{-, +\}^{\Lambda(n)} \mapsto \frac{1}{Z_n} \mu_{n, T_n(\sigma)}^+(\sigma),$$

où notre température auto-ajustée est donnée par

$$T_n(\sigma) = \frac{(m(\sigma))^2}{n^{2a}} = \frac{1}{n^{2a}} \left(\sum_{x \in \Lambda(n)} \sigma(x) \right)^2,$$

et où Z_n est la fonction de partition. Notre objectif est de démontrer que, pour tout $a \in (31/16, 2)$ vérifiant $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$, nous avons

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n \left(|T_n - T_c| > \varepsilon \right) < 0.$$

Nous démontrons tout d'abord des estimées exponentielles uniformes sur la magnétisation dans le régime surcritique en section 1, puis dans le régime sous-critique en section 2. Ensuite, nous montrons en section 3 comment la propriété $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$ découle des résultats de [CM11], dès lors que $a > 81/41$. Enfin, nous démontrons en section 4 une minoration de la fonction de partition, qui est le point clé de la preuve.

Sommaire

1	Décroissance exponentielle en température surcritique	154
1.1	Majoration du volume des clusters	154
1.2	Contrôle du cluster du bord	155
1.3	Le coût d'un changement de condition aux bords	156
1.4	Corrélation négative entre les tailles des clusters	156
1.5	Contrôle de la taille des clusters	158
1.6	Passage au modèle d'Ising	160
2	Décroissance exponentielle en température sous-critique	161
2.1	Contrôle du cluster du bord	162
2.2	Contrôle de la taille des clusters	162

2.3	Passage au modèle d'Ising	164
3	Quelques estimées en FK-percolation quasi-surcritique	165
4	Minoration de la fonction de partition	168
4.1	Heuristique	168
4.2	Le prix à payer pour fermer des arêtes	170
4.3	Construction du point fixe et estimées préalables	172
4.4	Découpage du cluster du bord	175
4.5	Passage au modèle d'Ising	179
5	Conclusion	183

1 Décroissance exponentielle en température surcritique

L'objectif de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Lemme 49. *Pour tout réel $a > 3/2$, nous avons*

$$\forall T_0 > T_c \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{T \geq T_0} \ln \mu_{n,T}^+ \left(|m| \geq An^a \right) < 0.$$

Nous allons avoir besoin d'estimées en FK-percolation sous-critique sur le nombre de sommets reliés au bord et sur la taille des clusters. Nous montrerons ensuite en section 1.6 comment passer de ces estimées en FK-percolation au contrôle de la magnétisation dans le modèle d'Ising en température surcritique.

1.1 Majoration du volume des clusters

Nous disposons du résultat de décroissance exponentielle suivant, valable avec une condition aux bords libre.

Lemme 50. *Pour tout $q \geq 1$ et pour tout $p < p_c(q)$, il existe $\psi = \psi(p, q) > 0$ tel que*

$$\forall n, k \geq 1 \quad \forall v \in \Lambda(n) \quad \phi_{n,p,q}^0 \left(|C(v)| \geq k \right) \leq e^{-\psi k}.$$

Démonstration. Soit $q \geq 1$. D'après le théorème 1.2 de [DCRT19], pour tout $p < p_c(q)$, il existe $c = c(p, q) > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\phi_{n,p,q}^1 \left(0 \longleftrightarrow \partial \Lambda(n) \right) \leq e^{-cn}.$$

D'après le théorème 5.86 de [Gri06], cela entraîne que pour tout $p < p_c(q)$, il existe $\psi = \psi(p, q) > 0$ tel que

$$\forall n, k \geq 1 \quad \forall v \in \Lambda(n) \quad \phi_{p,q}^0 \left(|C(v)| \geq k \right) \leq e^{-\psi k},$$

où $C(v)$ est le cluster de v dans la boîte $\Lambda(n)$, comme expliqué au paragraphe 2.2. Comme les variables $|C(v)|$ sont croissantes, nous en déduisons que

$$\forall n, k \geq 1 \quad \forall v \in \Lambda(n) \quad \phi_{n,p,q}^0 \left(|C(v)| \geq k \right) \leq \phi_{p,q}^0 \left(|C(v)| \geq k \right) \leq e^{-\psi k},$$

ce qui est bien l'inégalité voulue. □

1.2 Contrôle du cluster du bord

Nous démontrons maintenant une borne supérieure sur le nombre de sommets connectés au bord de la boîte.

Lemme 51. *Pour tout réel $a > 1$, nous avons la majoration suivante :*

$$\forall q \geq 1 \quad \forall p < p_c(q) \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} \ln \phi_{n,p,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \geq An^a \right) < 0.$$

Démonstration. Soient $a > 1$, $q \geq 1$, $p < p_c(q)$, $A > 0$ et $n \geq 1$. Par la propriété d'imbrication des mesures FK (proposition 8), nous avons

$$\phi_{n,p,q}^1 \left(|\mathcal{M}_n| > An^a \right) = \phi_{n+2,p,q}^0 \left(|\mathcal{M}_n| \geq An^a \mid \mathcal{E}_n \right) = \frac{\phi_{n+2,p,q}^0 \left(\{ |\mathcal{M}_n| \geq An^a \} \cap \mathcal{E}_n \right)}{\phi_{n+2,p,q}^0 (\mathcal{E}_n)}, \quad (6.1)$$

où $\mathcal{E}_n$ est l'événement

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \forall e \in \mathbb{E}_{n+2} \setminus \mathbb{E}_n \quad \omega(e) = 1 \right\}.$$

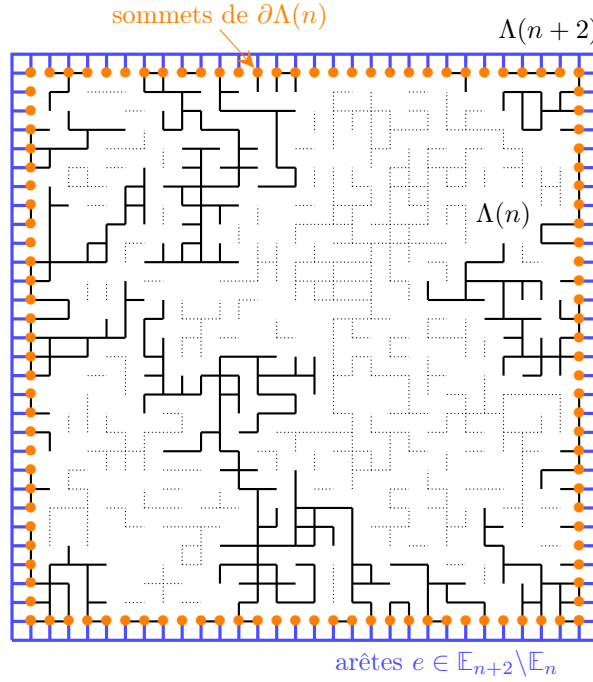


FIGURE 6.1 – Illustration de la preuve du lemme 51 : prendre une condition liée aux bords de la boîte $\Lambda(n)$ revient à conditionner par l'ouverture des arêtes de $\mathbb{E}_{n+2} \setminus \mathbb{E}_n$. Or, si ces arêtes sont ouvertes, alors tous les sommets de $\partial\Lambda(n)$ sont connectés dans la boîte $\Lambda(n+2)$, donc tous les sommets de $\mathcal{M}_n$ se retrouvent appartenir à un même cluster ouvert dans la boîte $\Lambda(n+2)$.

Or, tous les sommets de $\partial\Lambda(n)$ sont reliés entre eux par des chemins n'empruntant que les arêtes de $\mathbb{E}_{n+2} \setminus \mathbb{E}_n$ (voir figure 6.1). Donc si l'événement $\mathcal{E}_n$ est réalisé, alors tous les sommets de $\mathcal{M}_n$ appartiennent à un même cluster ouvert dans la boîte $\Lambda(n+2)$. Fixant un sommet quelconque $v_0 \in \partial\Lambda(n)$, nous avons donc

$$\phi_{n+2,p,q}^0 \left(\{ |\mathcal{M}_n| \geq An^a \} \cap \mathcal{E}_n \right) \leq \phi_{n+2,p,q}^0 \left(|C(v_0)| \geq An^a \right) \leq e^{-\psi An^a}, \quad (6.2)$$

où $\psi = \psi(p, q)$ est la constante donnée par le lemme 50. Remarquons à présent que l'ensemble $\mathbb{E}_{n+2} \setminus \mathbb{E}_n$ est composé de $8n + 4$ arêtes, donc la propriété d'énergie finie (voir théorème 3.1 de [Gri06]) entraîne que

$$\phi_{n+2,p,q}^0(\mathcal{E}_n) \geq \left(\frac{p}{p+q(1-p)} \right)^{8n+4}. \quad (6.3)$$

Nous obtenons donc, en combinant (6.1), (6.2) et (6.3),

$$\phi_{n,p,q}^1(|\mathcal{M}_n| \geq An^a) \leq \left(\frac{p+q(1-p)}{p} \right)^{8n+4} e^{-\psi An^a}.$$

Étant donné que nous avons pris $a > 1$, cela entraîne que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} \ln \phi_{n,p,q}^1(|\mathcal{M}_n| \geq An^a) \leq -\psi A < 0,$$

ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

1.3 Le coût d'un changement de condition aux bords

Nous démontrons ici que changer de condition aux bords « coûte au plus un facteur q^{4n} ».

Lemme 52. Soient $q \geq 1$, $p \in [0, 1]$, $\xi \in \{0, 1\}$, et $n \geq 1$. Pour tout événement $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n}$, nous avons

$$\phi_{n,p,q}^\xi(\mathcal{A}) \leq q^{4n} \phi_{n,p,q}^{1-\xi}(\mathcal{A}).$$

Démonstration. Soient $q \geq 1$, $p \in [0, 1]$, $n \geq 1$ et $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n}$. Rappelons que k^0 désigne le nombre de clusters dans la boîte $\Lambda(n)$, tandis que k^1 désigne le nombre de clusters lorsque tous les clusters qui touchent le bord sont comptés comme un seul cluster. Le nombre de clusters qui touchent le bord étant majoré par le nombre de sommets sur le bord, qui vaut $|\partial\Lambda(n)| \leq 4n$, nous avons

$$\forall \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n} \quad k^1(\omega) \leq k^0(\omega) \leq k^1(\omega) + 4n.$$

Nous avons donc, d'une part,

$$\phi_{n,p,q}^0(\mathcal{A}) = \frac{\phi_{n,p,1}^0(q^{k^0} \mathbb{1}_{\mathcal{A}})}{\phi_{n,p,1}^0(q^{k^0})} \leq \frac{\phi_{n,p,1}^0(q^{k^1+4n} \mathbb{1}_{\mathcal{A}})}{\phi_{n,p,1}^0(q^{k^1})} = q^{4n} \frac{\phi_{n,p,1}^1(q^{k^1} \mathbb{1}_{\mathcal{A}})}{\phi_{n,p,1}^1(q^{k^1})} = q^{4n} \phi_{n,p,q}^1(\mathcal{A}),$$

et d'autre part,

$$\phi_{n,p,q}^1(\mathcal{A}) = \frac{\phi_{n,p,1}^1(q^{k^1} \mathbb{1}_{\mathcal{A}})}{\phi_{n,p,1}^1(q^{k^1})} \leq \frac{\phi_{n,p,1}^1(q^{k^0} \mathbb{1}_{\mathcal{A}})}{\phi_{n,p,1}^1(q^{k^0-4n})} = q^{4n} \frac{\phi_{n,p,1}^0(q^{k^1} \mathbb{1}_{\mathcal{A}})}{\phi_{n,p,1}^0(q^{k^1})} = q^{4n} \phi_{n,p,q}^0(\mathcal{A}),$$

ce qui termine la preuve. $\square$

1.4 Corrélation négative entre les tailles des clusters

Nous démontrons maintenant une inégalité de corrélation entre les tailles de clusters disjoints, qui est une sorte de substitut de l'inégalité BK. Soit $n \geq 1$. Pour tout $N \in \{1, \dots, n^2\}$, pour tout choix de sommets $v_1, \dots, v_N \in \Lambda(n)$ deux à deux distincts et pour tout choix d'entiers $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$, nous définissons l'événement

$$\mathcal{Q}_N(v_1, \dots, v_N, k_1, \dots, k_N) = \left\{ \forall i \leq N \quad |C(v_i)| \geq k_i \quad \text{et} \quad \forall i \neq j \quad v_i \not\leftrightarrow v_j \right\}. \quad (6.4)$$

Lemme 53. Soient $q \geq 1$, $p \in [0, 1]$, $\xi \in \{0, 1\}$ et $n \geq 1$. Pour tout entier $N \in \{1, \dots, n^2\}$, pour tous sommets $v_1, \dots, v_N \in \Lambda(n)$ deux à deux distincts et pour tous $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\phi_{n,p,q}^\xi \left(\mathcal{Q}_N(v_1, \dots, v_N, k_1, \dots, k_N) \right) \leq \prod_{i=1}^N \phi_{n,p,q}^\xi \left(|C(v_i)| \geq k_i \right). \quad (6.5)$$

Démonstration. Soient $q \geq 1$, $p \in [0, 1]$, $\xi \in \{0, 1\}$ et $n \geq 1$ fixés. Nous procédons par récurrence sur l'entier N . Le résultat est évident pour $N = 1$. Soit $N \in \{1, \dots, n^2 - 1\}$ tel que le résultat est vrai au rang N . Soient $v_1, \dots, v_{N+1} \in \Lambda(n)$ deux à deux distincts et soient $k_1, \dots, k_{N+1} \in \mathbb{N}$. Donnons-nous des parties connexes $C_1, \dots, C_{N+1} \subset \Lambda(n)$ deux à deux disjointes et telles que $v_i \in C_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N+1\}$. Considérons l'ensemble d'arêtes qui délimite la frontière de l'union des N premiers clusters, c'est-à-dire

$$F = \partial^e \left(\bigcup_{i=1}^N C_i \right) = \left\{ e = \{x, y\} \in \mathbb{E}_n : x \in \bigcup_{i=1}^N C_i \text{ et } y \in \Lambda(n) \setminus \bigcup_{i=1}^N C_i \right\}.$$

Si $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$ est une configuration telle que $C(v_i) = C_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, alors toutes les arêtes de F sont fermées dans la configuration ω . Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} & \phi_{n,p,q}^\xi \left(\forall i \leq N+1 \quad C(v_i) = C_i \right) \\ &= \phi_{n,p,q}^\xi \left(\forall i \leq N \quad C(v_i) = C_i \right) \phi_{n,p,q}^\xi \left(C(v_{N+1}) = C_{N+1} \mid \forall i \leq N \quad C(v_i) = C_i \right) \\ &= \phi_{n,p,q}^\xi \left(\forall i \leq N \quad C(v_i) = C_i \right) \phi_{n,p,q}^\xi \left(C(v_{N+1}) = C_{N+1} \mid \omega|_F = 0 \text{ et } \forall i \leq N \quad C(v_i) = C_i \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Or, conditionnellement au fait que toutes les arêtes de F sont fermées, les événements

$$\left\{ C(v_{N+1}) = C_{N+1} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \forall i \leq N \quad C(v_i) = C_i \right\}$$

sont indépendants. Nous avons donc

$$\phi_{n,p,q}^\xi \left(C(v_{N+1}) = C_{N+1} \mid \omega|_F = 0 \text{ et } \forall i \leq N \quad C(v_i) = C_i \right) = \phi_{n,p,q}^\xi \left(C(v_{N+1}) = C_{N+1} \mid \omega|_F = 0 \right),$$

et donc l'équation (6.6) devient

$$\begin{aligned} \phi_{n,p,q}^\xi \left(\forall i \leq N+1 \quad C(v_i) = C_i \right) &= \phi_{n,p,q}^\xi \left(\forall i \leq N \quad C(v_i) = C_i \right) \\ &\quad \times \phi_{n,p,q}^\xi \left(C(v_{N+1}) = C_{N+1} \mid \omega|_F = 0 \right). \end{aligned}$$

En sommant sur tous les ensembles connexes C_{N+1} tels que

$$v_{N+1} \in C_{N+1} \subset \Lambda(n) \setminus \bigcup_{i=1}^N C_i \quad \text{et} \quad |C_{N+1}| \geq k_{N+1},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & \phi_{n,p,q}^\xi \left(|C(v_{N+1})| \geq k_{N+1} \text{ et } \forall i \leq N \quad C(v_i) = C_i \right) \\ &= \phi_{n,p,q}^\xi \left(\forall i \leq N \quad C(v_i) = C_i \right) \phi_{n,p,q}^\xi \left(|C(v_{N+1})| \geq k_{N+1} \mid \omega|_F = 0 \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Or l'événement $\{|C(v_{N+1})| \geq k_{N+1}\}$ est croissant, tandis que l'événement $\{\omega|_F = 0\}$ est décroissant, donc d'après l'inégalité FKG (proposition 9), nous avons

$$\phi_{n,p,q}^\xi \left(|C(v_{N+1})| \geq k_{N+1} \mid \omega|_F = 0 \right) \leq \phi_{n,p,q}^\xi \left(|C(v_{N+1})| \geq k_{N+1} \right).$$

En utilisant cela dans (6.7) et en sommant sur toutes les parties connexes $C_1, \dots, C_N \subset \Lambda(n)$ deux à deux disjointes et telles que $v_i \in C_i$ et $|C_i| \geq k_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \phi_{n,p,q}^\xi \left(Q_{N+1}(v_1, \dots, v_{N+1}, k_1, \dots, k_{N+1}) \right) \\ \leq \phi_{n,p,q}^\xi \left(Q_N(v_1, \dots, v_N, k_1, \dots, k_N) \right) \phi_{n,p,q}^\xi \left(|C(v_{N+1})| \geq k_{N+1} \right). \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure, ce qui termine la preuve de l'inégalité (6.5). $\square$

1.5 Contrôle de la taille des clusters

Rappelons que, pour $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$ une configuration de percolation, $\mathcal{C}_n(\omega)$ désigne l'ensemble des clusters ouverts dans la boîte $\Lambda(n)$ dans la configuration ω . Nous obtenons ici une inégalité exponentielle sur la queue de la distribution des tailles de ces clusters, en montrant que cette majoration est uniforme sur tout segment inclus dans $[0, p_c(2)[$. Cette inégalité nous sera utile pour contrôler la somme des tailles des clusters dans le lemme 55, ainsi que pour obtenir un contrôle analogue en régime surcritique, grâce à un argument de dualité.

Lemme 54. *Pour $A, b, c \geq 0$ et $n \geq 1$, considérons l'événement*

$$\mathcal{D}_n(A, b, c) = \left\{ \sum_{C \in \mathcal{C}_n : |C| \geq n^b} |C| \geq An^c \right\} = \left\{ \left| \left\{ x \in \Lambda(n) : |C(x)| \geq n^b \right\} \right| \geq An^c \right\}.$$

Nous avons alors la minoration

$$\forall q \geq 1 \quad \forall p_0 < p_c(q) \quad \forall A > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall c \geq 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^c} \sup_{p \leq p_0} \ln \phi_{n,p,q}^0 \left(\mathcal{D}_n(A, b, c) \right) < 0.$$

Démonstration. Soient $q \geq 1$, $p \leq p_0 < p_c(q)$, $A > 0$, $b > 0$, $c \geq 0$ et $n \geq 1$. Notant

$$M = \lceil An^{c-b} \rceil,$$

nous démontrons l'inclusion

$$\mathcal{D}_n(A, b, c) \subset \bigcup_{N=1}^M \bigcup_{\substack{v_1, \dots, v_N \in \Lambda(n) \\ 2 \text{ à } 2 \text{ distinctes}}} \bigcup_{\substack{n^b \leq k_1, \dots, k_N \leq n^2 \\ k_1 + \dots + k_N \geq An^c}} \mathcal{Q}_N(v_1, \dots, v_N, k_1, \dots, k_N), \quad (6.8)$$

où $\mathcal{Q}_N$ est l'événement défini par (6.4). En effet, prenons $\omega \in \mathcal{D}_n(A, b, c)$, et choisissons un ensemble de clusters

$$B \subset \left\{ C \in \mathcal{C}_n : |C| \geq n^b \right\} \quad \text{telle que} \quad \sum_{C \in B} |C| \geq An^c, \quad (6.9)$$

l'ensemble B étant choisi minimal, au sens de l'inclusion, parmi ceux qui vérifient (6.9). Posons $N = |B|$, et choisissons un cluster arbitraire $C_0 \in B$. Par minimalité de B , nous avons

$$(N-1)n^b \leq \sum_{C \in B \setminus \{C_0\}} |C| < An^c,$$

ce qui nous assure que $N < 1 + An^{c-b}$ et donc $N \leq M$. Ensuite, si nous numérotions les clusters de B en écrivant $B = \{C_1, \dots, C_N\}$ et si nous choisissons un sommet $v_i \in C_i$ en posant $k_i = |C_i|$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, alors nous obtenons

$$\omega \in \mathcal{Q}_N(v_1, \dots, v_N, k_1, \dots, k_N).$$

Ainsi, nous avons bien démontré l'inclusion (6.8). En utilisant la relation de sous-multiplicativité donnée par le lemme 53, il vient

$$\phi_{n,p,q}^0 \left(\mathcal{D}_n(A, b, c) \right) \leq \sum_{N=1}^M \sum_{\substack{v_1, \dots, v_N \in \Lambda(n) \\ 2 \text{ à } 2 \text{ distincts}}} \sum_{\substack{n^b \leq k_1, \dots, k_N \leq n^2 \\ k_1 + \dots + k_N \geq An^c}} \prod_{i=1}^N \phi_{n,p,q}^0 \left(|C(v_i)| \geq k_i \right).$$

D'après le lemme 50, il existe $\psi = \psi(p_0, q) > 0$ tel que

$$\forall n, k \geq 1 \quad \forall v \in \Lambda(n) \quad \phi_{n,p_0,q}^0 \left(|C(v)| \geq k \right) \leq e^{-\psi k}.$$

En utilisant le fait que les volumes $|C(v)|$ sont des variables croissantes et que $p \leq p_0$, nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \phi_{n,p,q}^0 \left(\mathcal{D}_n(A, b, c) \right) &\leq \sum_{N=1}^M \sum_{\substack{v_1, \dots, v_N \in \Lambda(n) \\ 2 \text{ à } 2 \text{ distincts}}} \sum_{\substack{n^b \leq k_1, \dots, k_N \leq n^2 \\ k_1 + \dots + k_N \geq An^c}} \exp \left(-\psi \sum_{i=1}^N k_i \right) \\ &\leq M (n^2)^{2M} \exp \left(-\psi An^c \right). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $p \leq p_0$, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{n^c} \sup_{p \leq p_0} \ln \phi_{n,p,q}^0 \left(\mathcal{D}_n(A, b, c) \right) \leq \frac{\ln M + 4M \ln n}{n^c} - \psi A = -\psi A + O \left(\frac{\ln n}{n^b} \right).$$

Nous avons donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^c} \sup_{p \leq p_0} \ln \phi_{n,p,q}^0 \left(\mathcal{D}_n(A, b, c) \right) \leq -\psi A < 0,$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Cette inégalité va nous permettre d'obtenir un contrôle uniforme sur la somme des carrés des tailles des clusters dans le régime sous-critique, quand p ne se rapproche pas trop de $p_c(2)$. En pratique nous pourrions nous passer de l'uniformité puisque cette variable est une variable croissante (l'ouverture d'une arête qui relie deux clusters C_1 et C_2 fait augmenter cette somme de $(|C_1| + |C_2|)^2 - |C_1|^2 - |C_2|^2 \geq 0$), mais l'uniformité dans le lemme 54 nous sera utile pour le régime $T < T_c$.

Lemme 55. *Pour tout $a > 3/2$, nous avons le contrôle suivant sur la taille des clusters en régime sous-critique :*

$$\forall q \geq 1 \quad \forall p_0 < p_c(q) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{p \leq p_0} \ln \phi_{n,p,q}^1 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n} |C|^2 > 2n^{a+1/2} \right) = -\infty.$$

Démonstration. Soient $a > 3/2$, $q \geq 1$ et $p \leq p_0 < p_c(q)$. Nous reprenons la notation $\mathcal{D}_n$ introduite au lemme 54. Si l'événement $\mathcal{D}_n(1, a - 3/2, a/2 + 1/4)$ n'est pas réalisé, alors nous avons

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_n : |C| \geq n^{a-3/2}} |C| < n^{a/2+1/4},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sum_{C \in \mathcal{C}_n} |C|^2 &= \sum_{C \in \mathcal{C}_n : |C| < n^{a-3/2}} |C|^2 + \sum_{C \in \mathcal{C}_n : |C| \geq n^{a-3/2}} |C|^2 \\ &\leq n^{a-3/2} \times \sum_{C \in \mathcal{C}_n : |C| < n^{a-3/2}} |C| + \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n : |C| \geq n^{a-3/2}} |C| \right)^2 \\ &\leq n^{a-3/2} \times n^2 + \left(n^{a/2+1/4} \right)^2 \\ &= 2n^{a+1/2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\phi_{n,p,q}^0 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n} |C|^2 > 2n^{a+1/2} \right) \leq \phi_{n,p,q}^0 \left(\mathcal{D}_n \left(1, a - \frac{3}{2}, \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right) \right).$$

Le lemme 52 nous permet alors de modifier la condition aux bords, pour obtenir

$$\phi_{n,p,q}^1 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n} |C|^2 > 2n^{a+1/2} \right) \leq q^{4n} \phi_{n,p,q}^0 \left(\mathcal{D}_n \left(1, a - \frac{3}{2}, \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right) \right). \quad (6.10)$$

Or, d'après le lemme 54, nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{a/2+1/4}} \sup_{p \leq p_0} \ln \phi_{n,p,q}^0 \left(\mathcal{D}_n \left(1, a - \frac{3}{2}, \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right) \right) < 0.$$

Or, la condition $a > 3/2$ entraîne que $a/2 + 1/4 > 1$, donc nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{p \leq p_0} \ln \phi_{n,p,q}^0 \left(\mathcal{D}_n \left(1, a - \frac{3}{2}, \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right) \right) = -\infty. \quad (6.11)$$

En combinant (6.10) et (6.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{p \leq p_0} \ln \phi_{n,p,q}^1 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n} |C|^2 > 2n^{a+1/2} \right) \\ \leq 4 \ln q + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{p \leq p_0} \ln \phi_{n,p,q}^0 \left(\mathcal{D}_n \left(1, a - \frac{3}{2}, \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right) \right) = -\infty, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. $\square$

1.6 Passage au modèle d'Ising

Nous démontrons maintenant le résultat de décroissance exponentielle uniforme sur tout segment inclus dans $(T_c, 1]$.

Preuve du lemme 49. Soient $a > 3/2$, $A > 0$ et $T \geq T_0 > T_c$. Pour contrôler la magnétisation dans le modèle d'Ising à la température T , nous utilisons le couplage d'Edwards-Sokal (voir section 3.2) pour construire une configuration d'Ising à partir d'une configuration de FK-percolation. Nous posons donc $p = 1 - e^{-2/T}$ et $p_0 = 1 - e^{-2/T_0}$, qui sont tels que $p \leq p_0 < p_c(2)$. Soit ω une configuration de percolation distribuée suivant $\phi_{n,p,2}^1$. Pour chaque partie $C \subset \Lambda(n)$, nous tirons une variable aléatoire ε_C uniforme sur $\{-, +\}$, les variables $(\varepsilon_C)_{C \subset \Lambda(n)}$ étant mutuellement indépendantes et indépendantes de ω . Cela représente bien plus de variables que nécessaire, mais cela simplifie les notations. Nous notons $\mathbb{P}$ pour la loi jointe de ω et $(\varepsilon_C)_{C \subset \Lambda(n)}$. Rappelant que $\mathcal{C}_n^-(\omega)$ désigne l'ensemble des clusters ouverts dans la configuration ω qui ne touchent pas le bord de la boîte, nous définissons une configuration d'Ising en posant

$$\sigma : \begin{cases} \Lambda(n) \longrightarrow \{-, +\} \\ x \longmapsto \begin{cases} + & \text{si } x \in \mathcal{M}_n(\omega) \\ \varepsilon_C & \text{si } x \in C \in \mathcal{C}_n^-(\omega). \end{cases} \end{cases} \quad (6.12)$$

La configuration σ est alors distribuée suivant la loi $\mu_{n,T}^+$, et la magnétisation de cette configuration s'écrit

$$m(\sigma) = |\mathcal{M}_n(\omega)| + \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \varepsilon_C.$$

Nous avons donc l'inclusion

$$\left\{ |m(\sigma)| \geq An^a \right\} \subset \left\{ |\mathcal{M}_n(\omega)| \geq \frac{A}{2}n^a \right\} \cup \left\{ \left| \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \varepsilon_C \right| \geq \frac{A}{2}n^a \right\},$$

ce qui implique

$$\mu_{n,T}^+ \left(|m| \geq An^a \right) \leq \phi_{n,p,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \geq \frac{A}{2}n^a \right) + \mathbb{P} \left(\left| \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \varepsilon_C \right| \geq \frac{A}{2}n^a \right).$$

D'une part, le nombre de sommets reliés au bord étant une variable croissante, nous avons

$$\forall p \leq p_0 \quad \phi_{n,p,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \geq \frac{A}{2}n^a \right) \leq \phi_{n,p_0,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \geq \frac{A}{2}n^a \right).$$

D'autre part, en conditionnant par rapport à $\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C|^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \varepsilon_C \right| \geq \frac{A}{2}n^a \right) &\leq \phi_{n,p,2}^1 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C|^2 > 2n^{a+1/2} \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\left| \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \varepsilon_C \right| \geq \frac{A}{2}n^a \mid \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C|^2 \leq 2n^{a+1/2} \right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hoeffding (voir [Hoe63]), nous avons

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \varepsilon_C \right| \geq \frac{A}{2}n^a \mid \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C|^2 \leq 2n^{a+1/2} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{A^2 n^{2a}}{16n^{a+1/2}} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{A^2}{16}n \right),$$

où nous avons utilisé le fait que $a > 3/2$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \mu_{n,T}^+ \left(|m| \geq An^a \right) &\leq \phi_{n,p_0,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \geq \frac{A}{2}n^a \right) \\ &\quad + \phi_{n,p,2}^1 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C|^2 > 2n^{a+1/2} \right) + 2 \exp \left(-\frac{A^2}{16}n \right). \end{aligned}$$

En prenant le supremum sur $T \geq T_0$, il vient

$$\begin{aligned} \sup_{T \geq T_0} \mu_{n,T}^+ \left(|m| \geq An^a \right) &\leq \phi_{n,p_0,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \geq \frac{A}{2}n^a \right) \\ &\quad + \sup_{p \leq p_0} \phi_{n,p,2}^1 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C|^2 > 2n^{a+1/2} \right) + 2 \exp \left(-\frac{A^2}{16}n \right). \end{aligned}$$

Il suffit alors de combiner les estimées exponentielles des lemmes 51 et 55 pour obtenir le résultat. $\square$

2 Décroissance exponentielle en température sous-critique

L'objectif de cette partie est de démontrer l'estimée suivante :

Lemme 56. *Pour tout réel $a < 2$, nous avons*

$$\forall T_0 < T_c \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{T \leq T_0} \ln \mu_{n,T}^+ \left(m \leq An^a \right) < 0.$$

Remarquons que, par rapport à (2.12), nous avons remplacé $|m|$ par m . Pour une température $T < T_c$ fixée, cette décroissance exponentielle découle du théorème 5.2 dans [Cer06]. Mais nous avons besoin d'un contrôle uniforme sur tout segment inclus dans $[0, T_c)$. Nous obtenons cette uniformité en passant au modèle de FK-percolation. Dans ce modèle, le nombre de sommets reliés au bord est une variable croissante donc une estimée à un paramètre $p > p_c(q)$ fixé suffit pour obtenir une estimée uniforme. Pour obtenir un contrôle uniforme du volume des clusters non reliés au bord, nous utilisons un argument de dualité pour déduire ce contrôle des résultats de la section précédente sur le régime $p < p_c(q)$.

2.1 Contrôle du cluster du bord

Nous énonçons maintenant le pendant du lemme 51 en régime surcritique :

Lemme 57. *Nous avons la majoration suivante :*

$$\forall q \geq 1 \quad \forall p > p_c(q) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \phi_{n,p,q}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \leq \frac{\theta(p)n^2}{2} \right) < 0.$$

Démonstration. Ce résultat découle du théorème 5.5 de [Cer06], qui le démontre pour p supérieur au dual du seuil de décroissance exponentielle des connexions, qui est égal à $p_c(q)$ d'après le lemme 50. $\square$

2.2 Contrôle de la taille des clusters

Nous démontrons ici un analogue du lemme 54 pour le régime surcritique $p > p_c(q)$, et concernant cette fois-ci la taille des clusters qui ne touchent pas le bord. Rappelons que $\mathcal{C}_n^-$ désigne l'ensemble des clusters ouverts dans la boîte $\Lambda(n)$ qui ne touchent pas le bord de cette boîte. Nous voulons une estimation uniforme sur tout segment inclus dans $(p_c(q), 1]$ de la variable

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_n^- : |C| \geq n} |C| = \left| \left\{ x \in \Lambda(n) \setminus \mathcal{M}_n : |C(x)| \geq n \right\} \right|.$$

Pour cela, nous utilisons la dualité (voir paragraphe 2.6 de l'introduction) pour transformer les grands clusters qui ne touchent pas le bord en contours de grande longueur dans la configuration duale, ce qui nous permettra d'utiliser le contrôle donné par le lemme 54 sur la taille des clusters dans le régime $p < p_c(q)$. C'est pour cette raison que nous avons formulé le lemme 54 avec $\mathcal{C}_n$ et non avec $\mathcal{C}_n^-$, alors qu'un contrôle des clusters ne touchant pas le bord aurait suffi pour l'application dans le lemme 49.

Lemme 58. *Nous avons l'estimation suivante :*

$$\forall q \geq 1 \quad \forall p_0 > p_c(q) \quad \forall A > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{p \geq p_0} \ln \phi_{n,p,q}^1 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^- : |C| \geq n} |C| \geq An^2 \right) < 0.$$

Démonstration. Soient $q \geq 1$, $p \geq p_0 > p_c(q)$, $A > 0$ et $n \geq 2$. Considérons l'ensemble

$$B = \left\{ C \in \mathcal{C}_n^- : |C| \geq n \right\}.$$

Pour tout cluster $C \in B$, nous considérons sa frontière « extérieure » $\partial^{ext}C$, comme définie dans l'introduction. Comme les clusters $C \in B$ ne touchent pas le bord de la boîte, toutes les arêtes de $\partial^{ext}C$ sont des arêtes intérieures à la boîte $\Lambda(n)$, c'est-à-dire que $\partial^{ext}C \subset \mathbb{E}_n^{int}$, où $\mathbb{E}_n^{int}$ est défini par (1.1). Considérons le dual $(\partial^{ext}C)^*$ de cette frontière (voir paragraphe 2.6 de l'introduction pour la définition

des arêtes duales). Cet ensemble $(\partial^{ext}C)^*$ forme un chemin fermé connexe qui entoure C (voir figure 6.2), ce qui implique que

$$\left| (\partial^{ext}C)^* \right| = |\partial^{ext}C| \geq 1 + \text{diam } C \geq \sqrt{|C|} \geq \sqrt{n}. \quad (6.13)$$

Définissons maintenant l'ensemble d'arêtes

$$F = \bigcup_{C \in B} \partial^{ext}C.$$

Une même arête pouvant relier au plus deux clusters différents, nous avons

$$|F| \geq \frac{1}{2} \sum_{C \in B} |\partial^{ext}C|.$$

En combinant cela avec (6.13), il vient

$$|F| \geq \frac{1}{2} \sum_{C \in B} \sqrt{|C|} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{C \in B} |C|}. \quad (6.14)$$

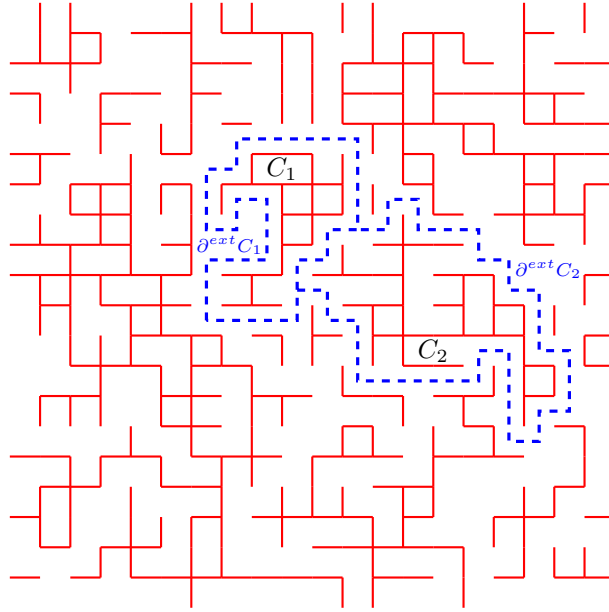


FIGURE 6.2 – Construction des contours duaux extérieurs des clusters de grand volume qui ne touchent pas le bord de la boîte.

Nous considérons alors la configuration duale ω^* associée à ω , telle que définie en section 2.6 de l'introduction. Les arêtes de F sont toutes fermées dans ω , donc les arêtes de F^* sont toutes ouvertes dans ω^* . D'après l'équation (6.14), nous avons

$$\sum_{C \in B} |C| \geq An^2 \Rightarrow |F^*| = |F| \geq \frac{\sqrt{A}}{2} n.$$

De plus, les composantes connexes de F^* sont des unions de $(\partial^{ext}C)^*$ pour un certain nombre de clusters $C \in B$, ce qui implique, étant donné (6.13), qu'elles contiennent toutes au moins $\sqrt{n}$ sommets. Nous avons donc

$$\sum_{C \in B} |C| \geq An^2 \Rightarrow \omega^* \in \mathcal{D}_{n-1} \left(\frac{\sqrt{A}}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right),$$

où $\mathcal{D}_{n-1}$ est l'événement défini dans le lemme 54. Nous avons donc, par la propriété de dualité (cf. proposition 10),

$$\phi_{n,p,q}^1 \left(\sum_{C \in B} |C| \geq An^2 \right) \leq \phi_{n-1,p^*,q}^0 \left(\mathcal{D}_{n-1} \left(\frac{\sqrt{A}}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \right),$$

et donc le résultat découle de l'estimation donnée par le lemme 54. $\square$

2.3 Passage au modèle d'Ising

Nous démontrons à présent notre résultat de décroissance exponentielle uniforme sur tout segment inclus dans $[0, T_c)$ dans le modèle d'Ising.

Preuve du lemme 56. Soit $a < 2$, soit $T_0 < T_c$ et soit $A > 0$. De même que dans la section précédente, nous prenons $T \leq T_0$ et nous posons $p = 1 - e^{-2/T}$ et $p_0 = 1 - e^{-2/T_0}$. Nous avons alors $p \geq p_0 > p_c(2)$. Soit ω une configuration distribuée suivant $\phi_{n,p,2}^1$ et soient $(\varepsilon_C)_{C \subset \Lambda(n)}$ i.i.d. de loi uniforme sur $\{-, +\}$ et indépendantes de ω . Nous construisons une configuration de spin σ comme en (6.12). Nous avons alors

$$\mu_{n,T}^+ \left(m \leq An^a \right) \leq \phi_{n,p,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \leq \frac{n^2 \theta(p_0)}{2} \right) + \mathbb{P} \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \varepsilon_C \leq -\frac{\theta(p_0)n^2}{2} + An^a \right).$$

Étant donné que $a < 2$, nous avons, à partir d'un certain rang,

$$\frac{\theta(p_0)n^2}{2} - An^a \geq \frac{\theta(p_0)n^2}{4}.$$

La variable $|\mathcal{M}_n|$ étant croissante, nous avons donc, à partir d'un certain rang,

$$\mu_{n,T}^+ \left(m \leq An^a \right) \leq \phi_{n,p_0,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \leq \frac{\theta(p_0)n^2}{2} \right) + \mathbb{P} \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \varepsilon_C \leq -\frac{\theta(p_0)n^2}{4} \right).$$

Dans le second terme, nous décomposons la somme en séparant les clusters de volume supérieur à n de ceux plus petits :

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \varepsilon_C = \sum_{\substack{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega) \\ |C| \geq n}} |C| \varepsilon_C + \sum_{\substack{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega) \\ |C| < n}} |C| \varepsilon_C.$$

Pour la première somme, nous écrivons simplement

$$\mathbb{P} \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega) : |C| \geq n} |C| \varepsilon_C \leq -\frac{\theta(p_0)n^2}{8} \right) \leq \phi_{n,p,2}^1 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega) : |C| \geq n} |C| \geq \frac{\theta(p_0)n^2}{8} \right).$$

Pour contrôler la seconde somme, nous remarquons que

$$\sum_{\substack{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega) \\ |C| < n}} |C|^2 \leq n \times \sum_{\substack{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega) \\ |C| < n}} |C| \leq n |\Lambda(n)| = n^3,$$

ce qui implique, grâce à l'inégalité de Hoeffding, que

$$\mathbb{P} \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega) : |C| < n} |C| \varepsilon_C \leq -\frac{\theta(p_0)n^2}{8} \right) \leq \exp \left[-\frac{2}{4n^3} \left(\frac{\theta(p_0)n^2}{8} \right)^2 \right] = \exp \left(-\frac{\theta(p_0)^2 n}{128} \right).$$

Nous avons donc, à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} \mu_{n,T}^+ \left(m \leq An^a \right) &\leq \phi_{n,p_0,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \leq \frac{\theta(p_0)n^2}{2} \right) \\ &\quad + \phi_{n,p,2}^1 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega) : |C| \geq n} |C| \geq \frac{\theta(p_0)n^2}{8} \right) + \exp \left(-\frac{\theta(p_0)^2 n}{128} \right). \end{aligned}$$

En prenant le supremum pour $T \leq T_0$, nous obtenons, toujours à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} \sup_{T \leq T_0} \mu_{n,T}^+ \left(m \leq An^a \right) &\leq \phi_{n,p_0,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \leq \frac{\theta(p_0)n^2}{2} \right) \\ &\quad + \sup_{p \geq p_0} \phi_{n,p,2}^1 \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega) : |C| \geq n} |C| \geq \frac{\theta(p_0)n^2}{8} \right) + \exp \left(-\frac{\theta(p_0)^2 n}{128} \right). \end{aligned}$$

Combinant cela avec les estimées exponentielles des lemmes 57 et 58, nous obtenons bien le résultat annoncé. $\square$

3 Quelques estimées en FK-percolation quasi-surcritique

Nous démontrons dans cette section la proposition 11, c'est-à-dire que la propriété $\mathcal{FSS}(s)$ est vérifiée pour tout exposant $s < 8/41$. Il nous faut donc prouver que pour tout $s \in (0, 8/41)$, pour tous $K, \delta > 0$ et pour toute suite de réels $p_n \in [0, 1]$ vérifiant

$$p_n - p_c(2) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{K}{n^s}, \quad (6.15)$$

nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n,p_n,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \leq (1 + \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n)| \right) = 1, \quad (6.16a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n,p_n,2}^1 \left(\max_{C \in \mathcal{C}_n} |C| \leq n^{s+1/2} \right) = 1, \quad (6.16b)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n,p_n,2}^1 \left(|\mathcal{M}_n \cap \Lambda(n_1)| \geq (1 - \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n_1)| \right) = 1, \quad (6.16c)$$

où $n_1 = \lfloor 5n/6 \rfloor$. Nous commençons par rappeler la formule suivante, qui découle des calculs exacts d'Onsager [Ons44] et Yang [Yan52] :

$$\theta(p) \stackrel{p \downarrow p_c(2)}{\sim} \left[8 \left(\frac{p}{p_c(2)} - 1 \right) \right]^{1/8}. \quad (6.17)$$

Preuve de la proposition 11. Soit s tel que $0 < s < 8/41$, soient $K, \delta > 0$ et soient $p_n \in [0, 1]$ des réels vérifiant (6.15). Puisque

$$5 + \frac{1}{8} = \frac{41}{8} < \frac{1}{s},$$

nous pouvons choisir un réel a' vérifiant

$$5 < a' < \frac{1}{s} - \frac{1}{8}. \quad (6.18)$$

Preuve de (6.16a) : Nous appliquons le théorème 2 de [CM11] avec $a', p = p_n$ et δ . Soit $c = c(a', \delta)$ la constante donnée par ce théorème. La condition

$$n > c(p_n - p_c(2))^{-a'}$$

est vérifiée à partir d'un certain rang puisque

$$(p_n - p_c(2))^{-a'} = O(n^{a's}) = o(n).$$

Nous en déduisons, d'après le théorème 2 de [CM11], que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(p_n - p_c(2))^{2a'+1/4} n^2} \ln \phi_{n, p_n, 2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| > (1 + \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n)| \right) < 0.$$

Or, d'après l'encadrement (6.18) nous avons

$$2a' + \frac{1}{4} < \frac{2}{s},$$

ce qui implique, en utilisant l'équivalent de $p_n - p_c(2)$ donné par (6.15), que

$$(p_n - p_c(2))^{2a'+1/4} n^2 \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} K^{2a'+1/4} \times n^{2-(2a'+1/4)s} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Nous avons donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| > (1 + \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n)| \right) = 0,$$

ce qui démontre (6.16a).

Preuve de (6.16b) : Nous souhaitons appliquer le théorème 1 de [CM11] avec le même paramètre a' que ci-dessus, et avec $M = \lfloor n^{s/2+1/4} \rfloor$. Nous disons qu'un cluster $C \subset \Lambda(n)$ « traverse » une boîte $B \subset \Lambda(n)$ s'il existe dans $C \cap B$ un chemin du bord inférieur vers le bord supérieur de B et un chemin du bord gauche vers le bord droit de B (cette formulation est en fait un peu plus forte que celle de l'article, qui demande juste que C intersecte toutes les faces de B , mais la preuve fonctionne de façon identique avec notre définition). Nous avons déjà vérifié plus haut que la condition $n > c(p_n - p_c(2))^{-a'}$ du théorème est satisfaite à partir d'un certain rang. Pour ce qui est de la condition sur M , nous avons d'une part $M \leq n$ car $s/2 + 1/4 < 1$, et d'autre part,

$$\frac{\ln n}{p_n - p_c(2)} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} (\ln n)n^s = o(M), \quad (6.19)$$

puisque $s < s/2 + 1/4$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 1 de [CM11], qui nous fournit une constante $K_1 > 0$ telle qu'à partir d'un certain rang,

$$\phi_{m_n, p_n, 2}^1(\mathcal{E}_n^C) \leq \exp \left(-K_1(p_n - p_c(2))M \right),$$

où la probabilité considérée est la mesure FK dans une boîte de taille $m_n = \lfloor 6n/5 \rfloor$, et où $\mathcal{E}_n$ est l'événement « il existe dans la boîte $\Lambda(n)$ un cluster C_0 qui traverse toute sous-boîte de $\Lambda(n)$ de diamètre M ». Or, d'après (6.19), nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n - p_c(2))M = +\infty,$$

ce qui nous donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{m_n, p_n, 2}^1(\mathcal{E}_n) = 1. \quad (6.20)$$

Nous souhaitons maintenant récupérer la conditions aux bords usuelle sur la boîte $\Lambda(n)$, au lieu de la boîte agrandie $\Lambda(m_n)$. D'après la propriété d'imbrication des mesures FK (proposition 8), nous avons

$$\phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{E}_n) = \phi_{m_n, p_n, 2}^1 \left(\mathcal{E}_n \mid \omega = 1 \text{ sur } \mathbb{E}_{m_n} \setminus \mathbb{E}_n \right). \quad (6.21)$$

L'événement $\mathcal{E}_n$ étant croissant, l'inégalité FKG (proposition 9) entraîne que

$$\phi_{m_n, p_n, 2}^1 \left(\mathcal{E}_n \mid \omega = 1 \text{ sur } \mathbb{E}_{m_n} \setminus \mathbb{E}_n \right) \geq \phi_{m_n, p_n, 2}^1(\mathcal{E}_n).$$

En combinant cela avec (6.20) et (6.21), nous avons donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{E}_n) = 1. \quad (6.22)$$

Si cet événement $\mathcal{E}_n$ est réalisé, alors tout chemin ouvert de diamètre supérieur ou égal à M est inclus dans C_0 , puisque dans le cas contraire, il y aurait une boîte de côté M que C_0 ne traverse pas. De plus, ce cluster C_0 touche le bord $\partial\Lambda(n)$, donc cela entraîne que tous les chemins ouverts de diamètre supérieur ou égal à M sont reliés au bord car inclus dans M . Nous avons donc l'implication

$$\mathcal{E}_n \Rightarrow \max_{C \in \mathcal{C}_n^-} \text{diam } C \leq M - 1.$$

Le diamètre d'un cluster étant relié à son volume par la relation

$$|C| \leq (1 + \text{diam } C)^2,$$

nous en déduisons que

$$\mathcal{E}_n \Rightarrow \max_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C| \leq M^2 \leq n^{s+1/2},$$

et donc l'équation (6.22) implique (6.16b).

Preuve de (6.16c) : Nous souhaitons appliquer le théorème 3 de [CM11] dans la petite boîte $\Lambda(n_1)$, avec la condition aux bords qui est appliquée aux bords de la boîte $\Lambda(n)$. Avec encore le même paramètre a' , nous avons

$$a's \left(1 + \frac{1}{8a'}\right) = a's + \frac{s}{8} < 1 - \frac{s}{8} + \frac{s}{8} = 1,$$

et donc nous pouvons choisir un réel α tel que

$$a's < \alpha < \frac{8a'}{8a' + 1}.$$

Soit $c = c(a', \alpha)$ la constante donnée par le théorème appliqué avec a' , α et δ . La condition requise $n^\alpha(p_n - p_c(2))^{a'} > c$ est vérifiée à partir d'un certain rang puisque

$$n^\alpha(p_n - p_c(2))^{a'} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} K^{a'} \times n^{\alpha - a's} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Rappelons que $\mathcal{C}_{n_1}$ désigne l'ensemble des clusters ouverts dans la sous-boîte $\Lambda(n_1)$. Le théorème 3 de [CM11] nous assure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1 \left(\max_{C \in \mathcal{C}_{n_1}} |C| \geq (1 - \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n_1)| \right) = 1.$$

En combinant cela avec (6.16b), il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1 \left(\max_{C \in \mathcal{C}_{n_1}} |C| \geq (1 - \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n_1)| \text{ et } \max_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C| \leq n^{s+1/2} \right) = 1. \quad (6.23)$$

Or, d'après l'équivalent de $\theta(p)$ donné par (6.17), nous avons

$$(1 - \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n_1)| \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} (1 - \delta) \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{8}{p_c(2)}\right)^{1/8} n^{2-s/8}.$$

Comme $s < 4/3$, nous avons $2 - s/8 > s + 1/2$ et donc, à partir d'un certain rang, nous avons

$$(1 - \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n_1)| > n^{s+1/2}.$$

Ainsi, si l'événement dans (6.23) est réalisé, alors il y a dans la petite boîte $\Lambda(n_1)$ un cluster contenant strictement plus de $n^{s+1/2}$ sommets, qui doit donc être relié au bord de la grande boîte $\Lambda(n)$. Nous avons donc l'implication

$$\max_{C \in \mathcal{C}_{n_1}} |C| \geq (1 - \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n_1)| \quad \text{et} \quad \max_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C| \leq n^{s+1/2} \Rightarrow |\mathcal{M}_n \cap \Lambda(n_1)| \geq (1 - \delta)\theta(p_n) |\Lambda(n_1)| ,$$

et donc le résultat découle de (6.23). $\square$

4 Minoration de la fonction de partition

4.1 Heuristique

Nous démontrons maintenant une minoration de la fonction de partition Z_n de notre modèle. Nous prenons $a \in (31/16, 2)$ qui vérifie les hypothèses $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$, et nous commençons par réécrire Z_n sous la forme

$$Z_n = \sum_{\sigma \in \{-, +\}^{\Lambda(n)}} \mu_{n, T_n(\sigma)}^+(\sigma) = \sum_{b=-n^2}^{n^2} \mu_{n, b^2/n^{2a}}^+(m=b) . \quad (6.24)$$

Recherche du point fixe b_n : Pour minorer Z_n , nous recherchons une valeur de b_n pour laquelle, à la température $T_n = b_n^2/n^{2a}$, la magnétisation est exactement égale à b_n avec probabilité assez grande. Si nous choisissons b_n tel que b_n/n^a ne converge pas vers la température critique T_c , alors nous ne pourrions pas obtenir une décroissance moins rapide que les décroissances démontrées dans les régimes surcritique (en section 1) et sous-critique (en section 2). Nous devons donc choisir b_n tel que $b_n \sim n^a \sqrt{T_c}$. Par le couplage d'Edwards-Sokal (voir section 3.2), le modèle d'Ising à la température $T = b_n^2/n^{2a}$ peut se construire à partir du modèle de FK-percolation avec paramètres $q = 2$ et $p = \varphi_n(b_n)$, où φ_n est la fonction définie par

$$\varphi_n : b \in \{-n^2, \dots, n^2\} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{2n^{2a}}{b^2}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.25)$$

Rappelons que, pour toute configuration de percolation $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$, l'ensemble des sommets reliés au bord de la boîte est noté $\mathcal{M}_n(\omega)$. Nous appellerons cet ensemble le « cluster du bord ». L'idée est de choisir b_n tel que, sous la loi $\phi_{n, \varphi_n(b_n), 2}^1$, le nombre de sommets reliés au bord soit typiquement d'ordre b_n , puis de contrôler la magnétisation des clusters qui ne touchent pas le bord. Une stratégie naturelle est alors de minorer la probabilité d'avoir, d'une part, $|\mathcal{M}_n(\omega)| = b_n$, et d'autre part, que contribution des autres clusters soit nulle, de façon à atteindre une magnétisation exactement égale à b_n . Pour obtenir une configuration de percolation ω telle que $|\mathcal{M}_n(\omega)| = b_n$, il est plus simple de minorer d'abord la probabilité que $|\mathcal{M}_n|$ soit compris entre b_n et λn^a , avec $\lambda > \sqrt{T_c}$, puis de fermer des arêtes pour atteindre exactement b_n . Nous définissons donc b_n vérifiant

$$\theta(\varphi_n(b_n)) |\Lambda(n)| \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \mu n^a, \quad \text{avec} \quad \sqrt{T_c} < \mu < \lambda.$$

D'après l'équivalent de $\theta(p)$ donné par (6.17), nous avons besoin de

$$\varphi_n(b_n) - p_c(2) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{p_c(2)}{8} \left(\frac{\mu}{n^{2-a}} \right)^8 .$$

Nous avons alors, sous l'hypothèse $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, \varphi_n(b_n), 2}^1 \left(b_n \leq |\mathcal{M}_n| \leq \lambda n^a \right) = 1. \quad (6.26)$$

Astuce du découpage à mi-chemin : Partant d'une configuration réalisant l'encadrement (6.26), une idée naturelle est de fermer un ensemble d'arêtes pour déconnecter $|\mathcal{M}_n| - b_n$ sommets du bord et obtenir ainsi $|\mathcal{M}_n| = b_n$.

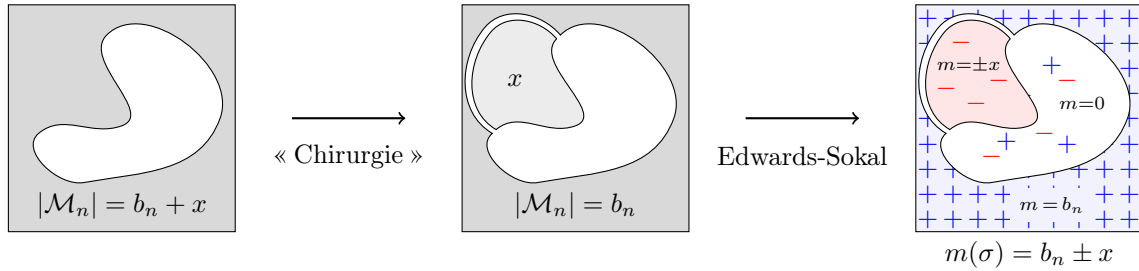


FIGURE 6.3 – Une stratégie qui semble naturelle est, s'il y a $b_n + x$ sommets reliés au bord, de déconnecter un morceau de taille x pour obtenir $|\mathcal{M}_n| = b_n$. Mais dans ce cas, le morceau retiré vient compliquer la tâche lorsqu'il s'agit de contrôler la magnétisation dans le modèle d'Ising, donc nous procédons autrement.

Mais un problème apparaît ensuite pour contrôler les fluctuations de la magnétisation des clusters qui ne touchent pas le bord, parce que le l'ensemble ainsi découpé et déconnecté du bord contient un nombre de sommets d'ordre n^a . Même si cet ensemble n'est pas nécessairement en un seul cluster, sa contribution à la magnétisation risque d'être difficile à compenser. L'approche que nous proposons ici est donc de découper un ensemble deux fois moins grand que ce dont nous avons besoin pour atteindre $|\mathcal{M}_n| = b_n$, puis de forcer l'ensemble des sommets ainsi déconnectés du bord à choisir un spin négatif. Ainsi, la magnétisation qui provient du cluster du bord et de cet ensemble de sommets déconnectés vaudra b_n (ou $b_n + 1$), et il ne restera plus qu'à forcer la somme des magnétisations des autres clusters qui ne touchent pas le bord à être nulle.

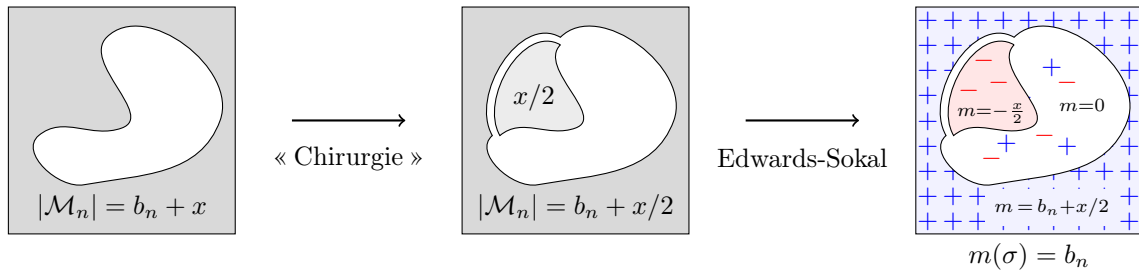


FIGURE 6.4 – Stratégie de minoration de Z_n , avec la chirurgie mise en œuvre en section 4.4 et le coloriage forcé de la section 4.5.

Construction du découpage : Comment trouver un ensemble d'arêtes dont la fermeture déconnecte du bord exactement

$$\left\lfloor \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| - b_n}{2} \right\rfloor$$

sommets, et qui ne soit pas trop grand, pour il ne soit pas « trop cher » de forcer la fermeture de ces arêtes? L'idée est de considérer une sous-boîte de côté $n_1 = \lfloor 5n/6 \rfloor$, et d'utiliser à nouveau l'hypo-

thèse $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$ qui nous assure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, \varphi_n(b_n), 2}^1 \left(|\mathcal{M}_n \cap \Lambda(n_1)| \geq \nu n^a \right) = 1, \quad \text{avec} \quad \nu < \left(\frac{5}{6} \right)^2 \mu.$$

Si ν vérifie aussi

$$\nu > \frac{\lambda - \sqrt{T_c}}{2},$$

alors nous avons, avec probabilité convergeant vers 1,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_n \setminus \Lambda(n_1)| &= |\mathcal{M}_n| - |\mathcal{M}_n \cap \Lambda(n_1)| \leq \frac{|\mathcal{M}_n|}{2} + \frac{\lambda n^a}{2} - \nu n^a \\ &\leq \frac{|\mathcal{M}_n|}{2} + \frac{\sqrt{T_c}}{2} n^a \simeq \frac{|\mathcal{M}_n| + b_n}{2}, \end{aligned}$$

ce qui signifie qu'il suffit de déconnecter la petite boîte $\Lambda(n_1)$ pour parcourir « la moitié du chemin » qui sépare $|\mathcal{M}_n|$ de b_n . Dans ce qui suit, nous choisirons comme paramètres $\lambda = 4$, $\mu = 3$ et $\nu = 2$. Grâce au principe des tiroirs, nous montrerons que déconnecter cette sous-boîte du bord coûte $O(n^{a-1})$ arêtes (cela sera fait dans le lemme 63). Mais en faisant cela, nous avons peut-être trop découpé, donc nous utilisons le résultat géométrique démontré au chapitre 4 pour ajuster le découpage et ainsi obtenir le résultat souhaité, pour un coût de $O(n^{a/2})$ arêtes.

Contrôle des fluctuations de la magnétisation : Nous construisons ensuite une configuration d'Ising à partir de la configuration de percolation obtenue par le découpage. Forcer l'ensemble des sommets que nous avons déconnectés du bord à choisir un spin négatif ne coûte que $2^{-O(n^{a/2})}$, parce que cet ensemble est constitué d'au plus $O(n^{a/2})$ clusters. Pour ce qui est des autres clusters qui ne touchaient déjà pas le bord avant l'étape de découpage, nous avons une borne N sur leur taille, donnée par l'hypothèse $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$. Cela nous permet de montrer qu'avec probabilité suffisante, la magnétisation provenant de ces clusters se situera dans l'intervalle $[-N, N]$. Pour annuler cette contribution, nous forcerons le spin des clusters de taille 1, en montrant qu'avec grande probabilité, nous disposons d'au moins N tels clusters. Tout cela nous permettra de construire une configuration d'Ising de magnétisation exactement égale à b_n , avec un petit détail de parité que nous esquiverons en forçant b_n à avoir la bonne parité dès le départ, la magnétisation étant forcément de même parité que $|\Lambda(n)|$.

Toutes ces étapes, dont la preuve est détaillée ci-dessous, nous permettront d'obtenir la minoration suivante :

Lemme 59. *Pour tout réel $a \in (31/16, 2)$ tel que la propriété $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$ est vérifiée, nous avons*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{(\ln n)n^\rho} > -\infty,$$

où ρ est donné par

$$\rho = \max \left(\frac{a}{2}, \frac{33}{2} - 8a \right).$$

4.2 Le prix à payer pour fermer des arêtes

Nous commençons par énoncer un lemme utile pour estimer la probabilité d'un événement construit en fermant des arêtes.

Lemme 60. *Soient $n \geq 1$, $p \in]0, 1[$, $q \geq 1$ et $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n}$. Soit H une application quelconque qui à toute configuration $\omega \in \mathcal{A}$ associe un ensemble d'arêtes $H(\omega) \subset \mathbb{E}_n$. Considérons l'application*

$$\psi: \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n} \\ \omega \longmapsto \omega_{H(\omega)} \end{cases}$$

qui à toute configuration ω associe la configuration obtenue à partir de ω en fermant les arêtes de $H(\omega)$.
Posant

$$N = \max_{\omega \in \mathcal{A}} |H(\omega)| ,$$

nous avons

$$\phi_{n,p,q}^1(\psi(\mathcal{A})) \geq \phi_{n,p,q}^1(\mathcal{A}) \left[\frac{1}{3|\Lambda(n)|} \left(1 \wedge \frac{1-p}{p} \right) \right]^N .$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme 6.3 de [CP00]. Il suffit de remarquer que, pour toute configuration $\omega \in \psi(\mathcal{A})$, nous avons

$$|\psi^{-1}(\{\omega\})| \leq \left| \left\{ H \subset \mathbb{E}_n : |H| \leq N \right\} \right| \leq 1 + |\mathbb{E}_n|^N \leq (3|\Lambda(n)|)^N ,$$

et le résultat découle alors du lemme sus-cité. $\square$

Démonstration. Voici une preuve alternative, avec une construction dynamique, qui donne une constante différente. Soient $n \geq 1$, $p \in]0, 1[$, $q \geq 1$, $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n}$ et $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{E}_n)$. Pour toute arête $e = \{x, y\}$, nous définissons l'événement

$$K(e) = \left\{ x \xleftrightarrow{\omega_e} y \right\} = \left\{ x \text{ et } y \text{ sont reliés par un chemin ouvert n'utilisant pas l'arête } e \right\} .$$

Soit ω_0 une configuration de percolation distribuée suivant $\phi_{n,p,q}^1$. Soient $e_1, \dots, e_N \in \mathbb{E}_n$ des arêtes aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\mathbb{E}_n$, et indépendantes de ω_0 , et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in [0, 1]$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ et indépendantes de ω_0 et des e_i . Définissons par récurrence, pour $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\omega_j : \begin{cases} e \neq e_j \mapsto \omega_{j-1}(e) \\ e_j \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } (\omega_{j-1} \in K(e_j) \text{ et } \alpha_j < p) \text{ ou } (\omega_{j-1} \notin K(e_j) \text{ et } \alpha_j < \frac{p}{p+q(1-p)}) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Montrons par récurrence que ω_j est distribuée suivant $\phi_{n,p,q}^1$ pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$. C'est vrai pour $j = 0$ par construction. Soit $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que ω_{j-1} suit la loi $\phi_{n,p,q}^1$. Soit $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$ une configuration de percolation fixée. Nous avons

$$\mathbb{P}(\omega_j = \omega) = \sum_{e \in \mathbb{E}_n} \mathbb{P}(e_j = e \text{ et } \omega_j = \omega) .$$

Distinguons quatre cas, suivant que $\omega \in K(e)$ ou non et suivant la valeur de $\omega(e)$. Si par exemple $e \in \mathbb{E}_n$ est telle que $\omega \in K(e)$ et $\omega(e) = 1$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(e_j = e \text{ et } \omega_j = \omega) &= \mathbb{P}\left(e_j = e \text{ et } \alpha_j < p \text{ et } \forall f \neq e \quad \omega_{j-1}(f) = \omega(f)\right) \\ &= \frac{1}{|\mathbb{E}_n|} \times p \times \left(\phi_{n,p,q}^1(\omega) + \phi_{n,p,q}^1(\omega_e)\right) \\ &= \frac{p}{|\mathbb{E}_n|} \left(1 + \frac{1-p}{p}\right) \phi_{n,p,q}^1(\omega) \\ &= \frac{1}{|\mathbb{E}_n|} \phi_{n,p,q}^1(\omega) . \end{aligned}$$

Nous montrons de façon similaire que dans les trois autres cas, nous avons aussi

$$\mathbb{P}(e_j = e \text{ et } \omega_j = \omega) = \frac{1}{|\mathbb{E}_n|} \phi_{n,p,q}^1(\omega) ,$$

et donc nous avons bien $\mathbb{P}(\omega_j = \omega) = \phi_{n,p,q}^1(\omega)$, et nous en déduisons par récurrence que ω_j est distribuée suivant $\phi_{n,p,q}^1$ pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$. Considérons à présent l'événement

$$\mathcal{G} = \left\{ \omega_0 \in \mathcal{A} \text{ et } \{e_1, \dots, e_N\} = H(\omega_0) \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, N\} \quad \alpha_j \geq p \right\}.$$

Si cet événement est réalisé, alors nous avons $\omega_N = (\omega_0)_{H(\omega_0)} = \psi(\omega_0)$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \phi_{n,p,q}^1(\psi(\mathcal{A})) &= \mathbb{P}(\omega_N \in \psi(\mathcal{A})) \\ &\geq \mathbb{P}(\omega_0 \in \mathcal{A} \text{ et } \omega_N = \psi(\omega_0)) \\ &\geq \mathbb{P}(\mathcal{G}) \\ &\geq \phi_{n,p,q}^1(\mathcal{A}) \times \left(\frac{1}{|\mathbb{E}_n|} \right)^N (1-p)^N, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme (mais avec une constante différente de celle obtenue avec l'autre démonstration). $\square$

4.3 Construction du point fixe et estimées préalables

Nous passons maintenant à la construction du paramètre b_n . Nous définissons (voir section 4.1 pour l'heuristique conduisant à cette définition)

$$b'_n = n^a \sqrt{2} \left[-\ln \left(1 - p_c(2) - \frac{3^8 p_c(2)}{8n^{16-8a}} \right) \right]^{-1/2},$$

ainsi que

$$b_n = \begin{cases} \lfloor b'_n \rfloor & \text{si } \lfloor b'_n \rfloor \equiv n^2 \pmod{2}, \\ \lfloor b'_n \rfloor - 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de telle sorte que

$$b_n \equiv n^2 \pmod{2}. \quad (6.27)$$

Notre objectif à terme étant de minorer la probabilité, à la température $T = b_n^2/n^{2a}$, que la magnétisation dans le modèle d'Ising vaille exactement b_n , nous avons besoin que b_n soit de même parité que $|\Lambda(n)| = n^2$, d'où la définition ci-dessus. Nous posons aussi $p_n = \varphi_n(b_n)$, où la fonction φ_n est celle définie par (6.25). Rappelons que, si ω est une configuration de percolation sur la boîte $\Lambda(n)$, alors $\mathcal{C}_n^-(\omega)$ désigne l'ensemble des clusters de ω qui ne touchent pas le bord $\partial\Lambda(n)$, et $\mathcal{C}_n^-(1, \omega)$ désigne le sous-ensemble de ces clusters qui ne contiennent qu'un seul sommet. L'objet de la présente section est de démontrer le résultat suivant, qui est une conséquence directe des hypothèses $\mathcal{FSS}(16-8a)$.

Lemme 61. *Soit $a \in (31/16, 2)$. Posant $n_1 = \lfloor 5n/6 \rfloor$, nous définissons l'événement*

$$\mathcal{G}_n = \left\{ |\mathcal{M}_n| \leq 4n^a, \quad |\mathcal{M}_n \cap \Lambda(n_1)| \geq 2n^a \text{ et } \max_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C| \leq n^{33/2-8a} \leq |\mathcal{C}_n^-(1)| - 1 \right\}. \quad (6.28)$$

Si les conditions $\mathcal{FSS}(16-8a)$ sont vérifiées, alors nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n,p_n,2}^1(\mathcal{G}_n) = 1.$$

Nous allons procéder en plusieurs étapes, en contrôlant d'abord le cluster du bord, puis la taille des clusters qui ne touchent pas le bord. Mais avant cela, vérifions que notre définition de b_n nous donne la bonne vitesse de convergence vers le point critique :

Lemme 62. *Pour tout réel $a > 16/9$, nous avons les estimées suivantes :*

$$b_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} n^a \sqrt{T_c}, \quad (6.29)$$

$$p_n - p_c(2) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3^8 p_c(2)}{8n^{16-8a}}, \quad (6.30)$$

$$\theta(p_n) |\Lambda(n)| \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} 3n^a. \quad (6.31)$$

Démonstration. L'équivalent (6.29) découle directement de la définition de b_n et de la relation (1.2) entre la température critique T_c et le point critique $p_c(2)$. Pour montrer (6.30), remarquons d'une part que, par décroissance de la fonction φ_n sur $\{0, \dots, n^2\}$, nous avons

$$p_n = \varphi_n(b_n) \geq \varphi_n(b'_n) = p_c(2) + \frac{3^8 p_c(2)}{8n^{16-8a}}.$$

D'autre part, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} p_n - \left(p_c(2) + \frac{3^8 p_c(2)}{8n^{16-8a}} \right) &\leq \varphi_n(b'_n - 2) - \varphi_n(b'_n) \\ &= \exp\left(-\frac{2n^{2a}}{b_n'^2}\right) - \exp\left(-\frac{2n^{2a}}{(b'_n - 2)^2}\right) \\ &\leq \frac{2n^{2a}}{(b'_n - 2)^2} - \frac{2n^{2a}}{b_n'^2} \\ &= \frac{2n^{2a} (4b'_n - 4)}{(b'_n - 2)^2 b_n'^2}. \end{aligned}$$

En combinant cela avec l'équivalent de b_n donné par (6.29), nous obtenons, en utilisant le fait que $a > 16/9$,

$$p_n - p_c(2) - \frac{3^8 p_c(2)}{8n^{16-8a}} = O\left(\frac{1}{n^a}\right) = o\left(\frac{1}{n^{16-8a}}\right).$$

Nous avons donc bien (6.30), et (6.31) en découle, en utilisant l'équivalent de $\theta(p)$ donné par (6.17). $\square$

Nous démontrons maintenant que les conditions $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$ impliquent bien le résultat sur l'événement $\mathcal{G}_n$.

Preuve du lemme 61. Soit $a \in (31/16, 2)$, tel que les hypothèses $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$ soient satisfaites. Ainsi, les trois conditions (6.16a), (6.16b) et (6.16c) sont vérifiées avec $s = 16 - 8a$. D'après la condition (6.16a) appliquée avec $\delta = 1/6$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \leq \frac{7}{6} \theta(p_n) |\Lambda(n)| \right) = 1. \quad (6.32)$$

Or, d'après l'équivalent de $\theta(p_n) |\Lambda(n)|$ donné en (6.31), nous savons qu'à partir d'un certain rang,

$$\theta(p_n) |\Lambda(n)| < \frac{8}{7} \times 3n^a,$$

ce qui implique que

$$\frac{7}{6} \theta(p_n) |\Lambda(n)| < \frac{7}{6} \times \frac{8}{7} \times 3n^a = 4n^a.$$

En injectant cela dans (6.32), nous obtenons bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1 \left(|\mathcal{M}_n| \leq 4n^a \right) = 1. \quad (6.33)$$

De la condition (6.16b), nous déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1 \left(\max_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C| \leq n^{33/2-8a} \right) = 1, \quad (6.34)$$

puisque

$$16 - 8a + \frac{1}{2} = \frac{33}{2} - 8a.$$

Il faut maintenant montrer qu'il y a dans la sous-boîte $\Lambda(n_1)$ au moins $2n^a$ sommets reliés au bord de la grande boîte $\Lambda(n)$. D'après la condition (6.16c) appliquée avec $\delta = 1/50$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1 \left(|\mathcal{M}_n \cap \Lambda(n_1)| \geq \frac{49}{50} \theta(p_n) |\Lambda(n_1)| \right) = 1. \quad (6.35)$$

Or nous avons, d'après l'équivalent de $\theta(p_n) |\Lambda(n)|$ donné par (6.31),

$$\frac{49}{50} \theta(p_n) |\Lambda(n_1)| \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{49}{50} \theta(p_n) \frac{25}{36} |\Lambda(n)| = \frac{49}{72} \theta(p_n) |\Lambda(n)| \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{49}{24} n^a.$$

En remarquant que $49/24 > 2$ et en injectant cela dans (6.35), nous obtenons bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1 \left(|\mathcal{M}_n \cap \Lambda(n_1)| \geq 2n^a \right) = 1. \quad (6.36)$$

Enfin, nous démontrons une minoration du nombre de clusters de taille 1 qui ne touchent pas le bord de la boîte. Ces clusters nous seront utiles au moment du passage au modèle d'Ising (en section 4.5), pour ajuster précisément la valeur de la magnétisation en choisissant les spins de ces clusters. D'après le théorème 3.21 de [Gri06], la mesure de percolation FK est dominée stochastiquement par la mesure de percolation Bernoulli correspondante, c'est-à-dire que nous avons $\phi_{n, p_n, 2}^1 \preceq \phi_{n, p_n, 1}^1$. Rappelons que $|\mathcal{C}_n^-(1)|$ désigne le nombre de clusters de taille 1 qui ne touchent pas le bord. Cette variable étant décroissante, nous avons

$$\phi_{n, p_n, 2}^1 \left(|\mathcal{C}_n^-(1)| \geq 1 + n^{33/2-8a} \right) \geq \phi_{n, p_n, 1}^1 \left(|\mathcal{C}_n^-(1)| \geq 1 + n^{33/2-8a} \right). \quad (6.37)$$

En considérant la moitié des sommets de l'intérieur de la boîte, nous posons

$$U_n = U_n(\omega) = \sum_{\substack{x \in \Lambda(n) \setminus \partial \Lambda(n) \\ \|x\|_1 \equiv 0 \pmod{2}}} \mathbb{1}_{C(x)=\{x\}}, \quad (6.38)$$

qui est tel que $|\mathcal{C}_n^-(1)| \geq U_n$. En prenant l'espérance, nous en déduisons que

$$\phi_{n, p_n, 1}^1(U_n) \geq \left[\frac{(n-2)^2}{2} \right] (1-p)^4 \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2(1-p)^4}{2}.$$

Nous avons donc, en utilisant le fait que $a > 31/16 > 29/16$,

$$1 + n^{33/2-8a} = o(n^2) = o\left(\phi_{n, p_n, 1}^1(U_n)\right).$$

Or, sous la mesure $\phi_{n, p_n, 1}^1$, les variables qui apparaissent dans la somme (6.38) sont indépendantes, donc d'après l'inégalité de Hoeffding ([Hoe63]), nous avons

$$\phi_{n, p_n, 1}^1 \left(U_n < 1 + n^{33/2-8a} \right) \leq \exp \left(- \frac{2(\phi_{n, p_n, 1}^1(U_n) - 1 - n^{33/2-8a})^2}{\lceil (n-2)^2/2 \rceil} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Étant donné que $|\mathcal{C}_n^-(1)| \geq U_n$, il en découle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 1}^1 \left(|\mathcal{C}_n^-(1)| < 1 + n^{33/2-8a} \right) = 0.$$

D'après (6.37), cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1 \left(|\mathcal{C}_n^-(1)| \geq 1 + n^{33/2-8a} \right) = 1. \quad (6.39)$$

Il suffit alors de combiner (6.33), (6.34), (6.36) et (6.39), pour obtenir le lemme 61. $\square$

4.4 Découpage du cluster du bord

Nous passons maintenant à l'étape de découpage de $\mathcal{M}_n$, à partir d'une configuration réalisant l'événement $\mathcal{G}_n$. Plus précisément, nous démontrons le lemme suivant :

Lemme 63. *Soit $K > 0$. Considérons l'événement*

$$\mathcal{R}_n = \left\{ \begin{array}{l} \exists H \subset \mathbb{E}_n, \quad |H| \leq K n^{a/2}, \quad |\mathcal{M}_n(\omega_H)| = \left\lfloor \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n}{2} \right\rfloor \\ \text{et} \quad \max_{C \in \mathcal{C}_n} |C| \leq n^{33/2-8a} \leq |\mathcal{C}_n^-(1)| - 1 \end{array} \right\}. \quad (6.40)$$

Pour tout réel $a \in (31/16, 2)$ vérifiant $\mathcal{FSS}(16-8a)$, avec p_n défini comme en section 4.3, il existe $K > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{R}_n) = 1.$$

Démonstration. Soit $a \in (31/16, 2)$ vérifiant $\mathcal{FSS}(16-8a)$. Soient $n \geq 12$ et $n_1 = \lfloor 5n/6 \rfloor$, et soit p_n défini comme en section 4.3. Soit $\omega : \mathbb{E}_n \rightarrow \{0, 1\}$ une configuration réalisant l'événement $\mathcal{G}_n$ défini par 6.28. Nous allons construire un ensemble d'arêtes $H \subset \mathbb{E}_n$ tel que

$$|\mathcal{M}_n(\omega_H)| = \left\lfloor \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n}{2} \right\rfloor.$$

Rappelons que $\mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega)]$ désigne l'ensemble des arêtes de $\mathbb{E}_n$ qui relient deux sommets de $\mathcal{M}_n(\omega)$. Considérons, pour $j \geq 1$, l'ensemble $E_j = \partial^e \Lambda(j)$ des arêtes qui délimitent la frontière de la boîte $\Lambda(j)$. Si $j, k \in \mathbb{N}$ sont tels que $|j - k| \geq 2$, alors les ensembles d'arêtes E_j et E_k sont disjoints. Nous en déduisons par le principe des tiroirs de Dirichlet qu'il existe un entier $j(\omega)$ tel que

$$n_1 \leq 2j(\omega) \leq n - 2 \quad \text{et} \quad |E_{2j(\omega)} \cap \mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega)]| \leq \frac{|\mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega)]|}{L_n},$$

où

$$L_n = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + 1 \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{12}.$$

Choisissons un tel $j(\omega)$ et posons $H_0(\omega) = E_{2j(\omega)} \cap \mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega)]$. Rappelons que, d'après la définition (6.28) de l'événement $\mathcal{G}_n$, nous avons $|\mathcal{M}_n(\omega)| \leq 4n^a$, ce qui entraîne que

$$|H_0(\omega)| \leq \frac{2|\mathcal{M}_n(\omega)|}{L_n} \leq \frac{8n^a}{L_n}.$$

Encore du fait que $\omega \in \mathcal{G}_n$, nous savons que

$$|\mathcal{M}_n(\omega)| \geq |\mathcal{M}_n(\omega) \cap \Lambda(n_1)| \geq 2n^a > b_n + 1,$$

à partir d'un certain rang, puisque $b_n + 1 \sim n^a \sqrt{T_c}$ avec $\sqrt{T_c} < 2$. Nous en déduisons qu'à partir d'un certain rang,

$$|\mathcal{M}_n(\omega)| > \left\lfloor \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n}{2} \right\rfloor.$$

Nous pouvons alors considérer une partie $H_1(\omega) \subset H_0(\omega)$, maximale au sens de l'inclusion parmi les parties vérifiant

$$|\mathcal{M}_n(\omega_{H_1(\omega)})| \geq \left\lfloor \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n}{2} \right\rfloor. \quad (6.41)$$

Comme les arêtes de $H_0(\omega)$ séparent les sommets de $\Lambda(n_1)$ du bord de la boîte $\partial\Lambda(n)$, nous avons

$$|\mathcal{M}_n(\omega_{H_0(\omega)})| \leq |\mathcal{M}_n(\omega)| - |\mathcal{M}_n(\omega) \cap \Lambda(n_1)| \leq |\mathcal{M}_n(\omega)| - 2n^a.$$

Or, du fait que ω réalise l'événement $\mathcal{G}_n$, nous avons $|\mathcal{M}_n(\omega)| \leq 4n^a$, d'où

$$|\mathcal{M}_n(\omega_{H_0(\omega)})| \leq \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)|}{2} + \frac{4n^a}{2} - 2n^a = \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)|}{2} < \left\lceil \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n}{2} \right\rceil.$$

Nous en déduisons que l'inclusion $H_1(\omega) \subset H_0(\omega)$ est stricte, et donc par maximalité de $H_1(\omega)$, il existe une arête e vérifiant

$$e \in H_0(\omega) \setminus H_1(\omega) \quad \text{et} \quad |\mathcal{M}_n(\omega_{H_1(\omega) \cup \{e\}})| < \left\lceil \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n}{2} \right\rceil. \quad (6.42)$$

Ainsi, la fermeture de l'arête e dans la configuration $\omega_{H_1(\omega)}$ fait diminuer strictement le nombre $|\mathcal{M}_n|$ de sommets reliés au bord, donc l'une des extrémités de e , que nous noterons v , se retrouve déconnectée du bord $\partial\Lambda(n)$ à la fermeture de l'arête e dans la configuration $\omega_{H_1(\omega)}$. Notons C_v le cluster de v dans la configuration $\omega_{H_1(\omega) \cup \{e\}}$, et notons E_v l'ensemble des arêtes de $\mathbb{E}[C_v]$ qui sont ouvertes dans la configuration $\omega_{H_1(\omega) \cup \{e\}}$. Puisque C_v est le morceau qui a été déconnecté par la fermeture de l'arête e dans $\omega_{H_1(\omega)}$, nous avons

$$|C_v| = |\mathcal{M}_n(\omega_{H_1(\omega)})| - |\mathcal{M}_n(\omega_{H_1(\omega) \cup \{e\}})|. \quad (6.43)$$

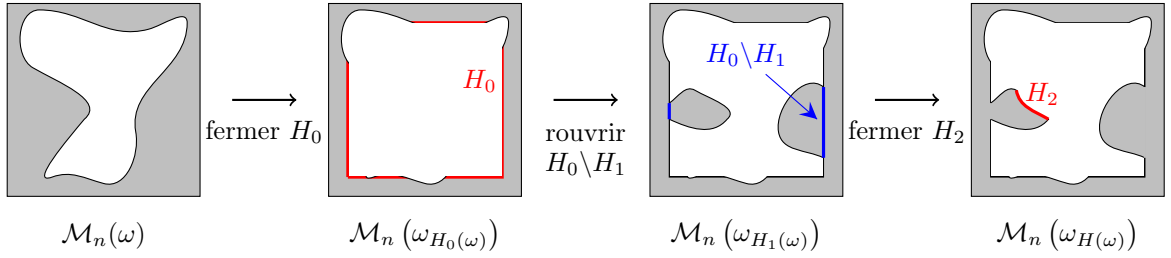


FIGURE 6.5 – Détail de l'opération de « chirurgie » permettant de faire passer le nombre de sommets reliés au bord de $|\mathcal{M}_n| = b_n + x$ à $|\mathcal{M}_n| = b_n + x/2$.

Notant

$$m = \left\lceil \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n}{2} \right\rceil - |\mathcal{M}_n(\omega_{H_1(\omega) \cup \{e\}})|,$$

il découle des équations (6.41), (6.42) et (6.43) que

$$1 \leq m \leq |C_v|.$$

D'après le lemme 31 que nous avons démontré au chapitre 4, il existe donc une partie $H_2(\omega) \subset E_v$ de cardinal

$$|H_2(\omega)| \leq K_0 \sqrt{|C_v|}$$

où K_0 est une constante fixée, telle que la composante connexe de v dans le graphe $(C_v, E_v \setminus H_2(\omega))$ contient exactement m sommets. Nous posons alors $H(\omega) = H_1(\omega) \cup H_2(\omega)$, qui est de cardinal

$$|H(\omega)| \leq |H_0(\omega)| + |H_2(\omega)| \leq \frac{8n^a}{L_n} + K_0 \sqrt{4n^a} = O(n^{a-1}) + O(n^{a/2}) = O(n^{a/2}).$$

Nous pouvons donc prendre $K > 0$ fixée (indépendante de n et de ω) telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{8n^a}{L_n} + K_0 \sqrt{4n^a} \leq K n^{a/2}.$$

Nous avons alors

$$|H(\omega)| \leq Kn^{a/2}.$$

Par ailleurs, par construction de H , nous avons

$$|\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| = |\mathcal{M}_n(\omega_{H_1(\omega) \cup \{e\}})| + m = \left\lfloor \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n}{2} \right\rfloor.$$

Nous avons ainsi démontré l'inclusion $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{R}_n$, et par conséquent le résultat découle du lemme 61. $\square$

Qu'obtient-on en fermant les arêtes de $H(\omega)$ pour $\omega \in \mathcal{R}_n$? Nous nous intéressons à présent au résultat de la fermeture des arêtes de H , et nous allons montrer que les configurations $\omega_{H(\omega)}$ réalisent l'événement

$$\mathcal{S}_n = \left\{ \begin{array}{l} \exists \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_n^- : |\mathcal{C}_0| \leq 2Kn^{a/2}, \quad |\mathcal{M}_n| - \sum_{C \in \mathcal{C}_0} |C| = b_n \\ \text{et} \quad \max_{C \in \mathcal{C}_n^- \setminus \mathcal{C}_0} |C| \leq n^{33/2-8a} \leq |\mathcal{C}_n^-(1) \setminus \mathcal{C}_0| \end{array} \right\}. \quad (6.44)$$

L'ensemble $\mathcal{C}_0$ correspond au « morceau » que nous découpons du cluster du bord pour parcourir la moitié du chemin qui sépare $|\mathcal{M}_n|$ de b_n , comme expliqué en section 4.1. Cet événement nous permettra en section 4.5 de construire une configuration d'Ising de magnétisation égale à b_n , via le couplage d'Edwards-Sokal, en forçant les clusters $C \in \mathcal{C}_0$ à choisir un signe négatif et en espérant une compensation des contributions des autres clusters. La condition qui apparaît dans l'événement $\mathcal{S}_n$ sur la taille des clusters qui ne sont pas dans $\mathcal{C}_0$ et sur le nombre de clusters de taille 1 nous permettra de contrôler cette contribution. Mais tout d'abord, nous démontrons l'estimée suivante :

Lemme 64. *Pour tout réel $a \in (31/16, 2)$ vérifiant $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$, avec p_n défini comme en section 4.3, il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln n)n^{a/2}} \ln \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{S}_n) > -\infty. \quad (6.45)$$

Pour construire une configuration réalisant cet événement $\mathcal{S}_n$, nous partons d'une configuration réalisant l'événement $\mathcal{R}_n$ et nous fermons les arêtes de l'ensemble H donné par la définition (6.40) de $\mathcal{R}_n$. Cela nous permet d'obtenir une minoration de la probabilité de l'événement $\mathcal{S}_n$, grâce au lemme 60 sur le prix à payer pour fermer des arêtes.

Preuve du lemme 64. Soit $a \in (31/16, 2)$ vérifiant $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$, soit p_n défini comme en section 4.3, et soit $K > 0$ donné par le lemme 63, tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{R}_n) = 1. \quad (6.46)$$

Soit ω une configuration qui réalise l'événement $\mathcal{R}_n$. Par définition de $\mathcal{R}_n$, nous pouvons prendre $H(\omega) \subset \mathbb{E}_n$ tel que

$$|H(\omega)| \leq Kn^{a/2} \quad \text{et} \quad |\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| = \left\lfloor \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n}{2} \right\rfloor.$$

De plus, quitte à réduire $H(\omega)$, nous pouvons supposer que $H(\omega) \subset \mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega)]$, ce qui nous assure que les clusters de ω qui ne touchent pas le bord restent intacts dans $\omega_{H(\omega)}$, et donc $\mathcal{C}_n^-(\omega) \subset \mathcal{C}_n^-(\omega_{H(\omega)})$. Nous voulons alors montrer que $\omega_{H(\omega)}$ réalise l'événement $\mathcal{S}_n$. Pour cela, il nous faut construire un ensemble $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_n^-(\omega_{H(\omega)})$ qui vérifie les conditions de la définition (6.44) de $\mathcal{S}_n$. Un candidat naturel est l'ensemble des sommets qui étaient reliés au bord dans la configuration ω , c'est-à-dire avant la fermeture des arêtes de $H(\omega)$, mais qui ne le sont plus dans la configuration $\omega_{H(\omega)}$. Nous posons donc

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\omega) = \mathcal{C}_n^-(\omega_{H(\omega)}) \setminus \mathcal{C}_n^-(\omega).$$

Comme nous avons pris $H(\omega) \subset \mathbb{E}[\mathcal{M}_n(\omega)]$, les clusters de $\mathcal{C}_0$ sont inclus dans $\mathcal{M}_n$, d'où

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ C \in \mathcal{C}_n^-(\omega_{H(\omega)}) : C \subset \mathcal{M}_n(\omega) \right\}.$$

Nous avons donc

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}_0} C = \mathcal{M}_n(\omega) \setminus \mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)}),$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| - \sum_{C \in \mathcal{C}_0} |C| &= |\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| - \left(|\mathcal{M}_n(\omega)| - |\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| \right) \\ &= 2 |\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| - |\mathcal{M}_n(\omega)|, \end{aligned}$$

En utilisant le fait que ω réalise l'événement $\mathcal{R}_n$, nous avons donc

$$|\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| - \sum_{C \in \mathcal{C}_0} |C| = 2 \left\lceil \frac{|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n}{2} \right\rceil - |\mathcal{M}_n(\omega)|.$$

Si $|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n$ est pair, alors nous avons

$$|\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| - \sum_{C \in \mathcal{C}_0} |C| = b_n,$$

et

$$|\mathcal{C}_n^-(1, \omega_{H(\omega)}) \setminus \mathcal{C}_0| = |\mathcal{C}_n^-(1, \omega)| \geq 1 + n^{33/2-8a}.$$

Supposons maintenant que $|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n$ est impair. Dans ce cas, nous avons

$$|\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| - \sum_{C \in \mathcal{C}_0} |C| = b_n + 1.$$

Nous avons donc besoin de rajouter un cluster de taille 1 dans $\mathcal{C}_0$. Par définition de $\mathcal{R}_n$, nous avons justement

$$|\mathcal{C}_n^-(1, \omega)| \geq n^{33/2-8a} + 1 \geq 1,$$

donc nous pouvons choisir un cluster $C_1 \in \mathcal{C}_n^-(1, \omega)$. Nous posons alors $\mathcal{C}'_0 = \mathcal{C}_0 \cup \{C_1\}$, et nous avons

$$|\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| - \sum_{C \in \mathcal{C}'_0} |C| = b_n.$$

Par ailleurs, nous avons (et c'est précisément pour cela que nous nous sommes donnés une marge de 1 entre la condition sur $|\mathcal{C}_n^-(1)|$ dans $\mathcal{R}_n$ et celle dans $\mathcal{S}_n$)

$$|\mathcal{C}_n^-(1, \omega_{H(\omega)}) \setminus \mathcal{C}'_0| = |\mathcal{C}_n^-(1, \omega) \setminus \{C_1\}| = |\mathcal{C}_n^-(1, \omega)| - 1 \geq n^{33/2-8a}.$$

Ainsi, si nous posons $\mathcal{C}'_0 = \mathcal{C}_0$ dans le cas où $|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n$ est pair, alors nous avons, quelle que soit la parité de $|\mathcal{M}_n(\omega)| + b_n$,

$$|\mathcal{M}_n(\omega_{H(\omega)})| - \sum_{C \in \mathcal{C}'_0} |C| = b_n \quad \text{et} \quad |\mathcal{C}_n^-(1, \omega_{H(\omega)}) \setminus \mathcal{C}'_0| \geq n^{33/2-8a}.$$

De plus, du fait que $\mathcal{C}_n^-(\omega_{H(\omega)}) \setminus \mathcal{C}'_0 \subset \mathcal{C}_n^-(\omega)$, nous avons

$$\max_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega_{H(\omega)}) \setminus \mathcal{C}'_0} |C| \leq \max_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \leq n^{33/2-8a}.$$

Enfin, comme la fermeture d'une seule arête peut au plus augmenter de 1 le nombre de clusters, nous avons $|\mathcal{C}_0| \leq |H(\omega)|$ et donc

$$|\mathcal{C}'_0| \leq |\mathcal{C}_0| + 1 \leq |H(\omega)| + 1 \leq Kn^{a/2} + 1 \leq 2Kn^{a/2},$$

quitte à augmenter la constante K pour avoir $K \geq 1$. Nous avons donc démontré que l'application

$$\psi: \begin{cases} \mathcal{R}_n \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{E}_n} \\ \omega \longmapsto \omega_{H(\omega)} \end{cases}$$

est à valeurs dans $\mathcal{S}_n$. D'après le lemme 60 sur le coût pour fermer des arêtes, nous avons donc

$$\begin{aligned} \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{S}_n) &\geq \phi_{n, p_n, 2}^1(\psi(\mathcal{R}_n)) \\ &\geq \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{R}_n) \left[\frac{1}{3n^2} \left(1 \wedge \frac{1-p_n}{p_n} \right) \right]^{2Kn^{a/2}} \\ &\geq \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{R}_n) \left(\frac{1-p_n}{3n^2} \right)^{2Kn^{a/2}}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{S}_n)}{(\ln n)n^{a/2}} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{R}_n)}{(\ln n)n^{a/2}} \\ &\quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2K}{\ln n} \left(\ln(1-p_n) - \ln 3 - 2 \ln n \right). \end{aligned}$$

Il découle de (6.46) que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{R}_n)}{(\ln n)n^{a/2}} = 0.$$

De plus, $p_n \rightarrow p_c(2) \in (0, 1)$ donc $1 - p_n$ est minoré par une constante strictement positive. Par conséquent, nous obtenons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{S}_n)}{(\ln n)n^{a/2}} \geq -4K > -\infty,$$

qui est bien la minoration recherchée. □

4.5 Passage au modèle d'Ising

Armé de l'estimation donnée par le lemme 64, nous sommes désormais en mesure de prouver notre minoration de la fonction de partition.

Preuve du lemme 59. Soit $a \in (31/16, 2)$ tel que les postulats $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$ soient vérifiés. Soient p_n et b_n définis comme dans la section 4.3. Définissons aussi

$$T_n^* = \frac{2}{-\ln(1-p_n)} = \frac{b_n^2}{n^{2a}}.$$

Rappelons qu'en réécrivant Z_n sous la forme (6.24), nous avons vu qu'il suffisait de minorer la probabilité, sous la loi $\phi_{n, p_n, 2}^1$, que la magnétisation soit exactement égale à b_n . De même que dans la preuve des lemmes 49 et 56, nous utilisons le couplage d'Edwards-Sokal (voir section 3.2) pour déduire la minoration de Z_n de notre résultat en FK-percolation. Soit ω une configuration de percolation distribuée suivant $\phi_{n, p_n, 2}^1$, et soient $(\varepsilon_C)_{C \subset \Lambda(n)}$ des variables i.i.d. de loi uniforme sur $\{-, +\}$ et indépendantes

de ω . Soit σ la configuration de spin associée à ω et aux $(\varepsilon_C)_{C \subset \Lambda(n)}$ comme en (6.12). La configuration σ est alors distribuée suivant la loi μ_{n, T_n}^+ , et la magnétisation de cette configuration s'écrit

$$m(\sigma) = |\mathcal{M}_n(\omega)| + \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega)} |C| \varepsilon_C.$$

Pour toute configuration ω_0 réalisant l'événement $\mathcal{S}_n$, choisissons une partie $\mathcal{C}_0(\omega_0) \subset \mathcal{C}_n^-(\omega_0)$ vérifiant les propriétés dans la définition (6.44) de $\mathcal{S}_n$, c'est-à-dire que

$$|\mathcal{C}_0| \leq 2Kn^{a/2}, \quad |\mathcal{M}_n| - \sum_{C \in \mathcal{C}_0} |C| = b_n \quad \text{et} \quad \max_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega_0) \setminus \mathcal{C}_0} |C| \leq n^{33/2-8a} \leq |\mathcal{C}_n^-(1, \omega_0) \setminus \mathcal{C}_0|.$$

Cela nous permet de définir l'événement

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{S}_n \cap \left\{ \forall C \in \mathcal{C}_0 \quad \varepsilon_C = - \quad \text{et} \quad \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega_0) \setminus \mathcal{C}_0} |C| \varepsilon_C = 0 \right\}.$$

Remarquons que si $\mathcal{T}_n$ est réalisé, alors nous avons

$$m(\sigma) = \left(|\mathcal{M}_n(\omega)| - \sum_{C \in \mathcal{C}_0} |C| \right) + \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega_0) \setminus \mathcal{C}_0} |C| \varepsilon_C = b_n + 0 = b_n,$$

donc notre minoration (6.24) de la fonction de partition devient

$$Z_n \geq \mathbb{P}(m(\sigma) = b_n) \geq \mathbb{P}(\mathcal{T}_n). \quad (6.47)$$

Fixons une configuration $\omega_0 \in \mathcal{S}_n$, et raisonnons conditionnellement à l'événement $\{\omega = \omega_0\}$. Les variables $\mathcal{C}_n^- = \mathcal{C}_n^-(\omega_0)$, et $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\omega_0)$ sont donc désormais fixées. Nous avons

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_n \mid \omega = \omega_0) = \frac{1}{2^{|\mathcal{C}_0|}} \mathbb{P}\left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega_0) \setminus \mathcal{C}_0} |C| \varepsilon_C = 0 \right). \quad (6.48)$$

Posons $N = \lfloor n^{33/2-8a} \rfloor$. Rappelons que, d'après la définition (6.44) de l'événement $\mathcal{S}_n$, nous avons

$$\max_{C \in \mathcal{C}_n^-(\omega_0) \setminus \mathcal{C}_0} |C| \leq N \quad (6.49)$$

et

$$|\mathcal{C}_n^-(1) \setminus \mathcal{C}_0| \geq N,$$

c'est-à-dire qu'il existe au moins N clusters de taille 1 dans $\mathcal{C}_n^-(1) \setminus \mathcal{C}_0$. L'idée est donc de mettre de côté un ensemble de N tels clusters de taille 1, puis de contrôler la magnétisation des autres clusters de $\mathcal{C}_n^-(1) \setminus \mathcal{C}_0$ pour montrer qu'avec probabilité suffisante, celle-ci tombe dans l'intervalle $[-N, N]$. Nous pourrions alors nous servir de ces N clusters de taille 1 pour ajuster la valeur de la magnétisation et la forcer ainsi à atteindre exactement 0. Nous nous donnons donc un ensemble $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_n^-(1) \setminus \mathcal{C}_0$, de cardinal N .

Pour forcer la magnétisation des clusters de $\mathcal{C}_n^-(1) \setminus (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1)$ à tomber dans l'intervalle $[-N, N]$, nous trions ces clusters en fonction de leur taille. Ensuite, pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, nous contrôlons séparément la contribution venant des clusters de $\mathcal{C}_n^-(1) \setminus (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1)$ qui contiennent exactement j sommets. Ainsi, pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$, nous écrivons

$$S_j = \sum_{\substack{C \in \mathcal{C}_n^-(1) \setminus (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1) \\ |C| \leq j}} |C| \varepsilon_C = \sum_{i=1}^j \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-(i) \setminus (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1)} |C| \varepsilon_C.$$

L'inégalité (6.49) implique que

$$S_N = \sum_{C \in \mathcal{C}_n^- \setminus (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1)} |C| \varepsilon_C.$$

L'équation (6.48) devient ainsi

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_n \mid \omega = \omega_0) = \frac{1}{2^{|\mathcal{C}_0|}} \mathbb{P}\left(S_N + \sum_{C \in \mathcal{C}_1} \varepsilon_C = 0\right). \quad (6.50)$$

D'après la formule de Stirling, nous avons

$$\binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}},$$

donc nous pouvons fixer $K_2 > 0$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} \geq \frac{K_2}{\sqrt{2k}}.$$

Quitte à diminuer K_2 , nous pouvons supposer que $K_2 \leq 1$. Démontrons alors par récurrence sur j que pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$,

$$\mathbb{P}(|S_j| \leq N) \geq \left(\frac{K_2}{2n}\right)^j. \quad (6.51)$$

Le résultat est évident pour $j = 0$ vu que $S_0 = 0$. Soit $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que (6.51) soit vérifiée au rang $j - 1$. Posons

$$B_j = \mathcal{C}_n^-(j) \setminus (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1),$$

de telle sorte que

$$S_j = S_{j-1} + j \sum_{C \in B_j} \varepsilon_C.$$

Si l'ensemble B_j est vide, alors l'hypothèse de récurrence implique directement l'inégalité (6.51), puisque nous avons pris $K_2 \leq 1$. Nous supposons donc que B_j n'est pas vide. Si $|B_j|$ est pair, alors pour obtenir une contribution nulle des clusters $C \in B_j$ à la magnétisation, il suffit qu'exactement la moitié de ces clusters choisissent un spin $+$ et l'autre moitié un spin $-$. Nous avons donc dans ce cas

$$\mathbb{P}(|S_j| \leq N \mid |S_{j-1}| \leq N) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{C \in B_j} \varepsilon_C = 0\right) = \binom{|B_j|}{|B_j|/2} \frac{1}{2^{|B_j|}} \geq \frac{K_2}{\sqrt{|B_j|}} \geq \frac{K_2}{n}.$$

Supposons maintenant que $|B_j|$ est impair, et choisissons un cluster $C_0 \in B_j$. Pour contrôler S_j , nous allons exiger d'une part une contribution nulle de la part des clusters de $B_j \setminus \{C_0\}$, et d'autre part que le terme en surplus associé au cluster C_0 soit de signe opposé à S_{j-1} , ce qui permet d'assurer que $|S_j|$ reste dans l'intervalle $[-N, N]$. Considérons la fonction $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow \{-, +\}$ définie par

$$\eta(x) = -\text{sgn}(x) = \begin{cases} + & \text{si } x \leq 0, \\ - & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous écrivons donc, pour $|B_j|$ impair,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_j| \leq N \mid |S_{j-1}| \leq N) &\geq \mathbb{P}\left(\varepsilon_{C_0} = \eta(S_{j-1}) \text{ et } \sum_{C \in B_j \setminus \{C_0\}} \varepsilon_C = 0\right) \\ &= \frac{1}{2} \binom{|B_j| - 1}{(|B_j| - 1)/2} \frac{1}{2^{|B_j| - 1}} \\ &\geq \frac{K_2}{2n}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons bien l'hérédité, et donc la minoration (6.51) est vérifiée pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$, ce qui implique en particulier que

$$\mathbb{P}\left(|S_N| \leq N\right) \geq \left(\frac{K_2}{2n}\right)^N.$$

Nous allons maintenant utiliser les variables ε_C pour $C \in \mathcal{C}_1$, que nous avons mises de côté, pour compenser S_N et ainsi atteindre une magnétisation exactement égale à b_n . Cela n'est possible que si S_N a la même parité que le nombre N de clusters dans $\mathcal{C}_1$. Vérifions que c'est bien le cas, en écrivant

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{C \in \mathcal{C}_n^- \setminus (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1)} |C| \varepsilon_C \\ &\equiv \sum_{C \in \mathcal{C}_n^-} |C| + \sum_{C \in \mathcal{C}_0} |C| + |\mathcal{C}_1| \pmod{2} \\ &= |\Lambda(n)| - |\mathcal{M}_n| + \sum_{C \in \mathcal{C}_0} |C| + N. \end{aligned}$$

Or, du fait que ω_0 réalise l'événement $\mathcal{S}_n$, nous avons

$$|\mathcal{M}_n| - \sum_{C \in \mathcal{C}_0} |C| = b_n,$$

d'où

$$S_N \equiv n^2 - b_n + N \equiv N \pmod{2},$$

où nous avons utilisé l'équation (6.27) selon laquelle $b_n \equiv n^2 \pmod{2}$. Il n'y a donc pas de souci de parité, grâce à la précaution que nous avons prise au moment de définir b_n . Ainsi, $N - S_N$ est toujours pair. Pour tout $s \in \{0, \dots, N\}$, nous écrivons

$$\mathbb{P}\left(\sum_{C \in \mathcal{C}_1} \varepsilon_C = -S_N \mid S_N = N - 2s\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{C \in \mathcal{C}_1} \varepsilon_C = s - (N - s)\right) = \binom{N}{s} \frac{1}{2^N} \geq \frac{1}{2^N}.$$

Ceci étant vrai pour tout $s \in \{0, \dots, N\}$, et $N - S_N$ étant toujours pair, nous en déduisons que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{C \in \mathcal{C}_1} \varepsilon_C = -S_N \mid |S_N| \leq N\right) \geq \frac{1}{2^N}.$$

En injectant cela dans l'équation (6.50), nous obtenons alors que

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{T}_n \mid \omega = \omega_0\right) \geq \frac{1}{2^{|\mathcal{C}_0|}} \left(\frac{K_2}{4n}\right)^N \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2Kn^a/2} \left(\frac{K_2}{4n}\right)^{n^{33/2-8a}}.$$

Ceci étant vrai pour toutes les configurations ω_0 réalisant l'événement $\mathcal{S}_n$, nous obtenons que

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_n \mid \mathcal{S}_n) \geq \left(\frac{K_2}{8n}\right)^{2Kn^\rho},$$

où nous avons posé

$$\rho = \max\left(\frac{a}{2}, \frac{33}{2} - 8a\right).$$

Nous en déduisons que

$$\frac{\ln \mathbb{P}(\mathcal{T}_n \mid \mathcal{S}_n)}{(\ln n)n^\rho} \geq \frac{2K(\ln K_2 - \ln 8)}{\ln n} - 2K \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2K. \quad (6.52)$$

Revenant à la minoration (6.47) de Z_n , il vient

$$Z_n \geq \mathbb{P}(\mathcal{T}_n) = \mathbb{P}(\mathcal{T}_n | \mathcal{S}_n) \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{S}_n).$$

En combinant (6.52) avec la minoration (6.45) de $\phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{S}_n)$ obtenue à la section précédente, nous avons donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{(\ln n)n^\rho} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{P}(\mathcal{T}_n | \mathcal{S}_n)}{(\ln n)n^\rho} + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \phi_{n, p_n, 2}^1(\mathcal{S}_n)}{(\ln n)n^\rho} > -\infty,$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

5 Conclusion

Nous récapitulons à présent comment les différentes estimées obtenues se combinent pour obtenir notre résultat.

Preuve du théorème 11. Soit $a \in (31/16, 2)$ tel que les hypothèses $\mathcal{FSS}(16 - 8a)$ sont vérifiées, et soit $\varepsilon > 0$. Reprenant le calcul (2.10), nous avons

$$\mu_n(T_n \geq T_c + \varepsilon) \leq \frac{n^2 + 1}{Z_n} \sup_{T \geq T_c + \varepsilon} \mu_{n, T}^+(|m| \geq n^a \sqrt{T_c + \varepsilon}),$$

ce qui entraîne

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(T_n \geq T_c + \varepsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{T \geq T_c + \varepsilon} \ln \mu_{n, T}^+(|m| \geq n^a \sqrt{T_c + \varepsilon}) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{n}.$$

Or, d'après la minoration de Z_n obtenue au lemme 59, nous avons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{(\ln n)n^\rho} > -\infty,$$

où

$$\rho = \max\left(\frac{a}{2}, \frac{33}{2} - 8a\right).$$

La condition $a \in (31/16, 2)$ implique que $\rho < 1$, donc nous avons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_n}{n} \geq 0.$$

Nous avons donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(T_n \geq T_c + \varepsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{T \geq T_c + \varepsilon} \ln \mu_{n, T}^+(|m| \geq n^a \sqrt{T_c + \varepsilon}) < 0,$$

d'après le lemme 49. Nous démontrons de même que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(T_n \leq T_c - \varepsilon) < 0$$

en utilisant le lemme 56, ce qui achève la démonstration. $\square$

Bibliographie

- [ACC90] K. Alexander, J. T. Chayes, and L. Chayes. The Wulff construction and asymptotics of the finite cluster distribution for two-dimensional Bernoulli percolation. *Comm. Math. Phys.*, 131(1) :1–50, 1990.
- [ACCN88] M. Aizenman, J. T. Chayes, L. Chayes, and C. M. Newman. Discontinuity of the magnetization in one-dimensional $1/|x-y|^2$ Ising and Potts models. *J. Statist. Phys.*, 50(1-2) :1–40, 1988.
- [ADCKS15] Daniel Ahlberg, Hugo Duminil-Copin, Gady Kozma, and Vladas Sidoravicius. Seven-dimensional forest fires. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 51(3) :862–866, 2015.
- [Ald00] David J. Aldous. The percolation process on a tree where infinite clusters are frozen. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 128(3) :465–477, 2000.
- [AN84] Michael Aizenman and Charles M. Newman. Tree graph inequalities and critical behavior in percolation models. *J. Statist. Phys.*, 36(1-2) :107–143, 1984.
- [AST14] Daniel Ahlberg, Vladas Sidoravicius, and Johan Tykesson. Bernoulli and self-destructive percolation on non-amenable graphs. *Electron. Commun. Probab.*, 19 :no. 40, 6, 2014.
- [Bak96] Per Bak. *How nature works*. Copernicus, New York, 1996. The science of self-organized criticality.
- [BC89] Per Bak and Kan Chen. The physics of fractals. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 38(1-3) :5–12, 1989.
- [BCKS01] C. Borgs, J. T. Chayes, H. Kesten, and J. Spencer. The birth of the infinite cluster : finite-size scaling in percolation. *Comm. Math. Phys.*, 224(1) :153–204, 2001. Dedicated to Joel L. Lebowitz.
- [BCT90] Per Bak, Kan Chen, and Chao Tang. A forest-fire model and some thoughts on turbulence. *Physics letters A*, 147(5-6) :297–300, 1990.
- [BF09] Xavier Bressaud and Nicolas Fournier. On the invariant distribution of a one-dimensional avalanche process. *Ann. Probab.*, 37(1) :48–77, 2009.
- [BG93] Anton Bovier and Véronique Gayrard. The thermodynamics of the Curie-Weiss model with random couplings. *J. Statist. Phys.*, 72(3-4) :643–664, 1993.
- [BGR97] B. Bercu, F. Gamboa, and A. Rouault. Large deviations for quadratic forms of stationary Gaussian processes. *Stochastic Process. Appl.*, 71(1) :75–90, 1997.
- [BH57] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53 :629–641, 1957.
- [BHJ17] Sandeep Bhupatiraju, Jack Hanson, and Antal A. Járai. Inequalities for critical exponents in d -dimensional sandpiles. *Electron. J. Probab.*, 22 :Paper No. 85, 51, 2017.
- [BK89] R. M. Burton and M. Keane. Density and uniqueness in percolation. *Comm. Math. Phys.*, 121(3) :501–505, 1989.

- [Bol66] Ludwig Boltzmann. *Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie* : (vorgelegt in der Sitzung am 8. Februar 1866). Staatsdruckerei, 1866.
- [BR00] Stefan Bornholdt and Thimo Rohlf. Topological evolution of dynamical networks : Global criticality from local dynamics. *Physical Review Letters*, 84(26) :6114, 2000.
- [BR03] Stefan Bornholdt and Torsten Röhl. Self-organized critical neural networks. *Physical Review E*, 67(6) :066118, 2003.
- [BS93] Per Bak and Kim Sneppen. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. *Physical review letters*, 71(24) :4083, 1993.
- [BST12] Itai Benjamini, Oded Schramm, and Ádám Timár. On the separation profile of infinite graphs. *Groups Geom. Dyn.*, 6(4) :639–658, 2012.
- [BT89] Per Bak and Chao Tang. Earthquakes as a self-organized critical phenomenon. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 94(B11) :15635–15637, 1989.
- [BTW87] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality : An explanation of the 1/f noise. *Physical review letters*, 59(4) :381, 1987.
- [BW97] Leonid Berlyand and Jan Wehr. Non-Gaussian limiting behavior of the percolation threshold in a large system. *Comm. Math. Phys.*, 185(1) :73–92, 1997.
- [Can92a] Andrew Canning. A class of long range Ising spin models described by Curie-Weiss mean field theory. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 185(1-4) :254–260, 1992.
- [Can92b] Andrew Canning. Saddle-point mean-field theory for long-range Ising spin models in terms of the eigenvalues and eigenvectors of the interaction matrix. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 25(18) :4723, 1992.
- [Can93] Andrew Canning. Generalized long-range ferromagnetic Ising spin models. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 26(13) :3029, 1993.
- [CCG⁺89] J. T. Chayes, L. Chayes, G. R. Grimmett, H. Kesten, and R. H. Schonmann. The correlation length for the high-density phase of Bernoulli percolation. *Ann. Probab.*, 17(4) :1277–1302, 1989.
- [CCN85] J. T. Chayes, L. Chayes, and C. M. Newman. The stochastic geometry of invasion percolation. *Comm. Math. Phys.*, 101(3) :383–407, 1985.
- [CCN87] J. T. Chayes, L. Chayes, and C. M. Newman. Bernoulli percolation above threshold : an invasion percolation analysis. *Ann. Probab.*, 15(4) :1272–1287, 1987.
- [CDKS98] Kim Christensen, Raul Donangelo, Belita Koiller, and Kim Sneppen. Evolution of random networks. *Physical Review Letters*, 81(11) :2380, 1998.
- [CdML03] G Corso, ESB de Moraes, and LS Lucena. Dynamical evolution of a self-organized-critical percolation model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 320 :110–118, 2003.
- [CDS94] Siegfried Clar, Barbara Drossel, and Franz Schwabl. Scaling laws and simulation results for the self-organized critical forest-fire model. *Physical Review E*, 50(2) :1009, 1994.
- [Cer06] R. Cerf. *The Wulff crystal in Ising and percolation models*, volume 1878 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Lectures from the 34th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–24, 2004, With a foreword by Jean Picard.
- [CF19] Raphaël Cerf and Nicolas Forien. Some toy models of self-organized criticality in percolation. *arXiv : 1912.06639*, 2019.
- [CFO93] Kim Christensen, Henrik Flyvbjerg, and Zeev Olami. Self-organized critical forest-fire model : Mean-field theory and simulation results in 1 to 6 dimensions. *Physical review letters*, 71(17) :2737, 1993.
- [CFT15] Edward Crane, Nic Freeman, and Bálint Tóth. Cluster growth in the dynamical Erdős-Rényi process with forest fires. *Electron. J. Probab.*, 20 :no. 101, 33, 2015.

- [CG16] Raphaël Cerf and Matthias Gorny. A Curie-Weiss model of self-organized criticality. *Ann. Probab.*, 44(1) :444–478, 2016.
- [CKLW82] Richard Chandler, Joel Koplik, Kenneth Lerman, and Jorge F Willemsen. Capillary displacement and percolation in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 119 :249–267, 1982.
- [CM11] R. Cerf and R. J. Messikh. The 2D-Ising model near criticality : a FK-percolation analysis. *Probab. Theory Related Fields*, 150(1-2) :193–217, 2011.
- [Cop04] E. T. Copson. *Asymptotic expansions*, volume 55 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Reprint of the 1965 original.
- [CP00] Raphaël Cerf and Ágoston Pisztora. On the Wulff crystal in the Ising model. *Ann. Probab.*, 28(3) :947–1017, 2000.
- [CRY18] Edward Crane, Balazs Rath, and Dominic Yeo. Age evolution in the mean field forest fire model via multitype branching processes, 2018.
- [CSN09] Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, and Mark EJ Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, 51(4) :661–703, 2009.
- [DCGP14] Hugo Duminil-Copin, Christophe Garban, and Gábor Pete. The near-critical planar FK-Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 326(1) :1–35, 2014.
- [DCRT19] Hugo Duminil-Copin, Aran Raoufi, and Vincent Tassion. Sharp phase transition for the random-cluster and Potts models via decision trees. *Ann. of Math. (2)*, 189(1) :75–99, 2019.
- [DCS93] Barbara Drossel, Siegfried Clar, and Franz Schwabl. Exact results for the one-dimensional self-organized critical forest-fire model. *Physical review letters*, 71(23) :3739, 1993.
- [Dha90] Deepak Dhar. Self-organized critical state of sandpile automaton models. *Phys. Rev. Lett.*, 64(14) :1613–1616, 1990.
- [Dha99] Deepak Dhar. The abelian sandpile and related models. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 263(1-4) :4–25, 1999.
- [Dha06] Deepak Dhar. Theoretical studies of self-organized criticality. *Phys. A*, 369(1) :29–70, 2006.
- [DM20] Nabarun Deb and Sumit Mukherjee. Fluctuations in mean-field Ising models, 2020.
- [DMST98] M De Menech, AL Stella, and C Tebaldi. Rare events and breakdown of simple scaling in the abelian sandpile model. *Physical Review E*, 58(3) :R2677, 1998.
- [Dro00] Barbara Drossel. Scaling behavior of the abelian sandpile model. *Physical Review E*, 61(3) :R2168, 2000.
- [DS92] Barbara Drossel and Franz Schwabl. Self-organized critical forest-fire model. *Physical review letters*, 69(11) :1629, 1992.
- [DS12] Michael Damron and Artëm Sapozhnikov. Limit theorems for 2D invasion percolation. *Ann. Probab.*, 40(3) :893–920, 2012.
- [DSV09] Michael Damron, Artëm Sapozhnikov, and Bálint Vágvolgyi. Relations between invasion percolation and critical percolation in two dimensions. *Ann. Probab.*, 37(6) :2297–2331, 2009.
- [Dür06a] Maximilian Dürre. Existence of multi-dimensional infinite volume self-organized critical forest-fire models. *Electron. J. Probab.*, 11 :no. 21, 513–539, 2006.
- [Dür06b] Maximilian Dürre. Uniqueness of multi-dimensional infinite volume self-organized critical forest-fire models. *Electron. Comm. Probab.*, 11 :304–315, 2006.
- [DZ10] Amir Dembo and Ofer Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2010. Corrected reprint of the second (1998) edition.

- [Ell06] Richard S. Ellis. *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Reprint of the 1985 original.
- [ER59] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs. I. *Publ. Math. Debrecen*, 6 :290–297, 1959.
- [FCMS⁺96] Vidar Frette, Kim Christensen, Anders Mølle-Sørensen, Jens Feder, Torstein Jøssang, and Paul Meakin. Avalanche dynamics in a pile of rice. *Nature*, 379(6560) :49–52, 1996.
- [FKG71] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.*, 22 :89–103, 1971.
- [Flo41] Paul J Flory. Molecular size distribution in three dimensional polymers. i. gelation1. *Journal of the American Chemical Society*, 63(11) :3083–3090, 1941.
- [For20] Nicolas Forien. A planar Ising model of self-organized criticality. *arXiv : 2002.08337*, 2020.
- [FSS93] Nathalie Fraysse, Anne Sornette, and Didier Sornette. Critical phase transitions made self-organized : proposed experiments. *Journal de Physique I*, 3(6) :1377–1386, 1993.
- [GK91] Peter Grassberger and Holger Kantz. On a forest fire model with supposed self-organized criticality. *Journal of Statistical Physics*, 63(3-4) :685–700, 1991.
- [GM90] G. R. Grimmett and J. M. Marstrand. The supercritical phase of percolation is well behaved. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 430(1879) :439–457, 1990.
- [Gor14] M. Gorny. A Curie-Weiss model of self-organized criticality : the Gaussian case. *Markov Process. Related Fields*, 20(3) :563–576, 2014.
- [Gor15] Matthias Gorny. *A Curie-Weiss model of self-organized criticality*. Theses, Université Paris Sud - Paris XI, June 2015.
- [GPS18a] Christophe Garban, Gábor Pete, and Oded Schramm. The scaling limits of near-critical and dynamical percolation. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 20(5) :1195–1268, 2018.
- [GPS18b] Christophe Garban, Gábor Pete, and Oded Schramm. The scaling limits of the minimal spanning tree and invasion percolation in the plane. *Ann. Probab.*, 46(6) :3501–3557, 2018.
- [Gra93] Peter Grassberger. On a self-organized critical forest-fire model. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 26(9) :2081, 1993.
- [Gra02] Peter Grassberger. Critical behaviour of the Drossel-Schwabl forest fire model. *New Journal of Physics*, 4(1) :17, 2002.
- [Gri99] Geoffrey Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999.
- [Gri06] Geoffrey Grimmett. *The random-cluster model*, volume 333 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [HAL⁺20] S Helmrich, A Arias, G Lohead, TM Wintermantel, M Buchhold, S Diehl, and S Whitlock. Signatures of self-organized criticality in an ultracold atomic gas. *Nature*, pages 1–6, 2020.
- [Ham57] J. M. Hammersley. Percolation processes : Lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statist.*, 28 :790–795, 1957.
- [Ham59] J. M. Hammersley. Bornes supérieures de la probabilité critique dans un processus de filtration. In *Le calcul des probabilités et ses applications. Paris, 15-20 juillet 1958*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXXXVII, pages 17–37. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959.
- [Hen93] Christopher L Henley. Statics of a “self-organized” percolation model. *Physical Review Letters*, 71(17) :2741, 1993.
- [HG14] Janina Hesse and Thilo Gross. Self-organized criticality as a fundamental property of neural systems. *Frontiers in systems neuroscience*, 8 :166, 2014.

- [HGS⁺14] Jorge Hidalgo, Jacopo Grilli, Samir Suweis, Miguel A Munoz, Jayanth R Banavar, and Amos Maritan. Information-based fitness and the emergence of criticality in living systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(28) :10095–10100, 2014.
- [Hoe63] Wassily Hoeffding. *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, volume 58. Springer, 1963.
- [HPS99] Olle Häggström, Yuval Peres, and Roberto H. Schonmann. Percolation on transitive graphs as a coalescent process : relentless merging followed by simultaneous uniqueness. In *Perplexing problems in probability*, volume 44 of *Progr. Probab.*, pages 69–90. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999.
- [HS90] Takashi Hara and Gordon Slade. Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 128(2) :333–391, 1990.
- [HSS⁺90] Glenn A Held, DH Solina, H Solina, DT Keane, WJ Haag, PM Horn, and G Grinstein. Experimental study of critical-mass fluctuations in an evolving sandpile. *Physical Review Letters*, 65(9) :1120, 1990.
- [Hut20] Tom Hutchcroft. Universality of high-dimensional spanning forests and sandpiles. *Probab. Theory Related Fields*, 176(1-2) :533–597, 2020.
- [IKP94] Eugene V Ivashkevich, Dmitri V Ktitarov, and Vyatcheslav B Priezzhev. Waves of topplings in an abelian sandpile. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 209(3-4) :347–360, 1994.
- [J03] Antal A. Járai. Invasion percolation and the incipient infinite cluster in 2D. *Comm. Math. Phys.*, 236(2) :311–334, 2003.
- [J18] Antal A. Járai. Sandpile models. *Probab. Surv.*, 15 :243–306, 2018.
- [Jen98] Henrik Jeldtoft Jensen. *Self-organized criticality : emergent complex behavior in physical and biological systems*, volume 10. Cambridge university press, 1998.
- [JR08] Antal A. Járai and Frank Redig. Infinite volume limit of the abelian sandpile model in dimensions $d \geq 3$. *Probab. Theory Related Fields*, 141(1-2) :181–212, 2008.
- [Kau93] Stuart A Kauffman. *The origins of order : Self-organization and selection in evolution*. Oxford University Press, USA, 1993.
- [Kes86] Harry Kesten. The incipient infinite cluster in two-dimensional percolation. *Probab. Theory Related Fields*, 73(3) :369–394, 1986.
- [Kis15] Demeter Kiss. Frozen percolation in two dimensions. *Probab. Theory Related Fields*, 163(3-4) :713–768, 2015.
- [KJ91] Stuart A Kauffman and Sonke Johnsen. Coevolution to the edge of chaos : coupled fitness landscapes, poised states, and coevolutionary avalanches. *Journal of theoretical biology*, 149(4) :467–505, 1991.
- [KLGP00] DV Ktitarov, S Lübeck, P Grassberger, and VB Priezzhev. Scaling of waves in the Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile model. *Physical Review E*, 61(1) :81, 2000.
- [KLS19a] Zakhar Kabluchko, Matthias Löwe, and Kristina Schubert. Fluctuations of the magnetization for Ising models on dense Erdős-Rényi random graphs. *J. Stat. Phys.*, 177(1) :78–94, 2019.
- [KLS19b] Zakhar Kabluchko, Matthias Löwe, and Kristina Schubert. Fluctuations of the magnetization for Ising models on Erdős-Rényi random graphs – the regimes of small p and the critical temperature, 2019.
- [KMS15] Demeter Kiss, Ioan Manolescu, and Vladas Sidoravicius. Planar lattices do not recover from forest fires. *Ann. Probab.*, 43(6) :3216–3238, 2015.
- [KNWZ89] Leo P Kadanoff, Sidney R Nagel, Lei Wu, and Su-min Zhou. Scaling and universality in avalanches. *Physical Review A*, 39(12) :6524, 1989.

- [Lig85] Thomas M. Liggett. *Interacting particle systems*, volume 276 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [LP01] Stefano Lise and Maya Paczuski. Self-organized criticality and universality in a nonconservative earthquake model. *Physical Review E*, 63(3) :036111, 2001.
- [MB11] Thierry Mora and William Bialek. Are biological systems poised at criticality? *Journal of Statistical Physics*, 144(2) :268–302, 2011.
- [MD92] Satya N Majumdar and Deepak Dhar. Equivalence between the abelian sandpile model and the $q \rightarrow 0$ limit of the potts model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 185(1-4) :129–145, 1992.
- [MDS92] WK Moßner, B Drossel, and F Schwabl. Computer simulations of the forest-fire model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 190(3-4) :205–217, 1992.
- [Men86] M. V. Menshikov. Coincidence of critical points in percolation problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 288(6) :1308–1311, 1986.
- [MMT98] Bruce D Malamud, Gleb Morein, and Donald L Turcotte. Forest fires : an example of self-organized critical behavior. *Science*, 281(5384) :1840–1842, 1998.
- [Mn18] Miguel A. Muñoz. *Colloquium : Criticality and dynamical scaling in living systems*. *Rev. Modern Phys.*, 90(3) :031001, 30, 2018.
- [Nag92] Sidney R Nagel. Instabilities in a sandpile. *Reviews of Modern Physics*, 64(1) :321, 1992.
- [OFC92] Zeev Olami, Hans Jacob S Feder, and Kim Christensen. Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. *Physical review letters*, 68(8) :1244, 1992.
- [Ons44] Lars Onsager. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev. (2)*, 65 :117–149, 1944.
- [Pis96] Agoston Pisztor. Surface order large deviations for Ising, Potts and percolation models. *Probab. Theory Related Fields*, 104(4) :427–466, 1996.
- [PJ02] Gunnar Pruessner and Henrik Jeldtoft Jensen. Broken scaling in the forest-fire model. *Physical Review E*, 65(5) :056707, 2002.
- [Pri94] Vyatcheslav B Priezzhev. Structure of two-dimensional sandpile. i. height probabilities. *Journal of statistical physics*, 74(5-6) :955–979, 1994.
- [Pri00] V. B. Priezzhev. The upper critical dimension of the abelian sandpile model. *J. Statist. Phys.*, 98(3-4) :667–684, 2000.
- [Pru12] Gunnar Pruessner. *Self-organised criticality : theory, models and characterisation*. Cambridge University Press, 2012.
- [PS20] Wesley Pegden and Charles K. Smart. Stability of Patterns in the Abelian Sandpile. *Ann. Henri Poincaré*, 21(4) :1383–1399, 2020.
- [RA96] Chris J Rhodes and Roy M Anderson. Power laws governing epidemics in isolated populations. *Nature*, 381(6583) :600–602, 1996.
- [Rao20] Aran Raoufi. Translation-invariant Gibbs states of the Ising model : general setting. *Ann. Probab.*, 48(2) :760–777, 2020.
- [Rát09] Balázs Ráth. Mean field frozen percolation. *J. Stat. Phys.*, 137(3) :459–499, 2009.
- [RS92] Philippe Ruelle and Siddhartha Sen. Toppling distributions in one-dimensional abelian sandpiles. *J. Phys. A*, 25(22) :L1257–L1264, 1992.
- [RT09] Balázs Ráth and Bálint Tóth. Erdős-Rényi random graphs + forest fires = self-organized criticality. *Electron. J. Probab.*, 14 :no. 45, 1290–1327, 2009.
- [SDCS00] Klaus Schenk, Barbara Drossel, Siegfried Clar, and Franz Schwabl. Finite-size effects in the self-organized critical forest-fire model. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 15(1) :177–185, 2000.

- [SDS02] Klaus Schenk, Barbara Drossel, and Franz Schwabl. Self-organized critical forest-fire model on large scales. *Physical Review E*, 65(2) :026135, 2002.
- [SM96] Ricard V Solé and Susanna C Manrubia. Extinction and self-organized criticality in a model of large-scale evolution. *Physical Review E*, 54(1) :R42, 1996.
- [Smi01] Stanislav Smirnov. Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(3) :239–244, 2001.
- [Sor92] Didier Sornette. Critical phase transitions made self-organized : a dynamical system feedback mechanism for self-organized criticality. *Journal de Physique I*, 2(11) :2065–2073, 1992.
- [Sor06] Didier Sornette. *Critical phenomena in natural sciences : chaos, fractals, selforganization and disorder : concepts and tools*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [SS89] Anne Sornette and D Sornette. Self-organized criticality and earthquakes. *EPL (Europhysics Letters)*, 9(3) :197, 1989.
- [SS11] Oded Schramm and Stanislav Smirnov. On the scaling limits of planar percolation. *Ann. Probab.*, 39(5) :1768–1814, 2011. With an appendix by Christophe Garban.
- [Sto43] Walter H Stockmayer. Theory of molecular size distribution and gel formation in branched-chain polymers. *The Journal of chemical physics*, 11(2) :45–55, 1943.
- [SW01] Stanislav Smirnov and Wendelin Werner. Critical exponents for two-dimensional percolation. *Math. Res. Lett.*, 8(5-6) :729–744, 2001.
- [SWdA⁺00] Sorin Solomon, Gerard Weisbuch, Lucilla de Arcangelis, Naeem Jan, and Dietrich Stauffer. Social percolation models. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 277(1-2) :239–247, 2000.
- [TDMS99] Claudio Tebaldi, Mario De Menech, and Attilio L Stella. Multifractal scaling in the Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile and edge events. *Physical review letters*, 83(19) :3952, 1999.
- [vdBB04] J. van den Berg and R. Brouwer. Self-destructive percolation. *Random Structures Algorithms*, 24(4) :480–501, 2004.
- [vdBB06] J. van den Berg and R. Brouwer. Self-organized forest-fires near the critical time. *Comm. Math. Phys.*, 267(1) :265–277, 2006.
- [vdBdLN12] Jacob van den Berg, Bernardo N. B. de Lima, and Pierre Nolin. A percolation process on the square lattice where large finite clusters are frozen. *Random Structures Algorithms*, 40(2) :220–226, 2012.
- [vdBJ05] J. van den Berg and A. A. Járai. On the asymptotic density in a one-dimensional self-organized critical forest-fire model. *Comm. Math. Phys.*, 253(3) :633–644, 2005.
- [vdBK85] J. van den Berg and H. Kesten. Inequalities with applications to percolation and reliability. *J. Appl. Probab.*, 22(3) :556–569, 1985.
- [vdBKN12] Jacob van den Berg, Demeter Kiss, and Pierre Nolin. A percolation process on the binary tree where large finite clusters are frozen. *Electron. Commun. Probab.*, 17 :no. 2, 11, 2012.
- [vdBKN18] Jacob van den Berg, Demeter Kiss, and Pierre Nolin. Two-dimensional volume-frozen percolation : deconcentration and prevalence of mesoscopic clusters. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 51(4) :1017–1084, 2018.
- [vdBN17a] Jacob van den Berg and Pierre Nolin. Boundary rules and breaking of self-organized criticality in 2D frozen percolation. *Electron. Commun. Probab.*, 22 :Paper No. 65, 15, 2017.
- [vdBN17b] Jacob van den Berg and Pierre Nolin. Two-dimensional volume-frozen percolation : exceptional scales. *Ann. Appl. Probab.*, 27(1) :91–108, 2017.
- [vdBT01] J. van den Berg and B. Tóth. A signal-recovery system : asymptotic properties, and construction of an infinite-volume process. *Stochastic Process. Appl.*, 96(2) :177–190, 2001.

- [WPC⁺16] Nicholas W Watkins, Gunnar Pruessner, Sandra C Chapman, Norma B Crosby, and Henrik J Jensen. 25 years of self-organized criticality : Concepts and controversies. *Space Science Reviews*, 198(1-4) :3–44, 2016.
- [WW83] David Wilkinson and Jorge F. Willemsen. Invasion percolation : a new form of percolation theory. *J. Phys. A*, 16(14) :3365–3376, 1983.
- [Yan52] C. N. Yang. The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model. *Phys. Rev. (2)*, 85 :808–816, 1952.
- [Zha95] Yu Zhang. The fractal volume of the two-dimensional invasion percolation cluster. *Comm. Math. Phys.*, 167(2) :237–254, 1995.

Titre : Autour de la criticité auto-organisée

Mots clés : criticité auto-organisée, mécanique statistique, percolation, modèle d'Ising

Résumé : De nombreux modèles physiques présentent un phénomène appelé transition de phase : il existe un point critique ou une courbe critique dans l'espace des paramètres qui sépare deux régimes distincts caractérisés par des propriétés macroscopiques très différentes. Le comportement de ces systèmes au point critique est particulièrement intéressant et fait apparaître des lois d'échelle qui sont souvent communes à tout un ensemble de systèmes très différents. Les physiciens Per Bak, Chao Tang et Kurt Wiesenfeld ont remarqué que ces comportements « critiques » sont étonnamment communs dans la nature, alors qu'ils ne devraient survenir que lorsque les paramètres se trouvent être précisément ajustés au point critique. Pour expliquer cela, ils ont montré que certains systèmes ont tendance à être natu-

rellement attirés vers des points ou des régimes critiques. Ces systèmes présentent un phénomène appelé « criticité auto-organisée ».

Cette thèse porte sur la construction de plusieurs modèles simples présentant ce phénomène. Pour cela, nous partons d'un modèle présentant une transition de phase et nous le modifions pour forcer un comportement « auto-critique ». Nous étudions notamment une variante d'un modèle construit par Matthias Gorny à partir du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé, en passant d'un modèle de type champ moyen à une interaction limitée à une certaine portée. Nous construisons également quelques modèles de criticité auto-organisée à partir de la percolation Bernoulli dans des boîtes finies, ainsi qu'à partir du modèle d'Ising en dimension 2.

Title : Around self-organized criticality

Keywords : self-organized criticality, statistical mechanics, percolation, Ising model

Abstract : Many models in physics present a phenomenon called phase transition : there is a critical point or a critical curve in the parameter space separating two distinct regions characterized by very different macroscopic properties. In such systems, the behaviour at the critical point is of particular interest and presents some scaling laws which appear to be universal across a wide range of different systems. The physicists Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld pointed out that these “critical” features are very common in nature, although they should only appear when the parameters happen to be finely tuned to the critical point. To explain this, they showed that some systems tend to be naturally attracted

by critical points or critical regimes. This phenomenon is called “self-organized criticality”.

The goal of this thesis is to construct several simple models which present this phenomenon. To achieve this, we consider a model with a phase transition and we modify it in order to obtain a “self-critical” behaviour. We study a modification of a model constructed by Matthias Gorny from the generalized Ising Curie-Weiss model, in which the mean-field Hamiltonian is replaced by a long-range interaction. Several other models of self-organized criticality are constructed from Bernoulli percolation in finite boxes, and from the planar Ising model.