LSO

Outils Mathématiques pour la finance

Examen - Vendredi 14 Mai 2021- durée 2h

— Sans document. Sans appareil électronique (calculatrice, téléphone etc)
— Recommandation : lisez tout le sujet avant de composer.

Exercice 1

On considère une équation différentielle de la forme

$$x'(t) = -ax(t)^2 + bx(t), \tag{1}$$

où a, b sont des constantes réelles strictement positives.

1. Tracer la ligne de phase de l'équation (1) et en déduire la limite lorsque $t \to \infty$ de la solution correspondant à une condition initiale $x(0) = x_0 > 0$.
2. Montrer que si y et z sont solutions des équations suivantes :

$$y'(t) = by(t), \qquad z'(t) = ay(t), \tag{2}$$

   alors $x(t) = \frac{y(t)}{z(t)}$ est solution de l'équation (1) (sur tout intervalle où z ne s'annule pas).
3. Déterminer les solutions y et z de (2) (à des constantes près).
4. En déduire la solution de l'équation (1) satisfaisant la condition initiale $x(0) = x_0 > 0$.
5. On suppose dans cette question que $b = 0$. Résoudre directement l'équation (1) avec la méthode des variables séparées.

Exercice 2

1. On considère le système différentiel de dimension 2 :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

   et sa condition initiale à la date $t = 0$, (x_0, y_0). Pour chacune des matrices A suivantes, donner les solutions du système et dessiner les portraits de phase

   (a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. On considère l'équation différentielle scalaire $y''(t) = -y'(t) + 2y(t)$. On note (y_0, y'_0) la condition initiale de cette équation en $t = 0$.
   a) Mettre cette EDO sous forme d'un système différentiel de dimension 2.
   b) Donner la solution du système en fonction de la condition initiale.

Exercice 3

On considère le système

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t)\, e^{x(t)^2+y(t)^2}, & x(0) = x_0 \\ y'(t) = x(t)\, e^{x(t)^2+y(t)^2}, & y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de la solution du système (3).
2. On suppose donnée une solution $(x(\cdot), y(\cdot))$ à ce système. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \;\; x(t)^2 + y(t)^2 = x_0^2 + y_0^2.$$
3. On suppose $(x_0, y_0) = (R_0, 0)$ pour un $R_0 > 0$ donné. Montrer que la solution de (3) est de la forme
$$x(t) = R_0 \cos(\omega_0 t), \quad y(t) = R_0 \sin(\omega_0 t), \quad t \in \mathbb{R},$$
pour un ω_0 à déterminer.
4. Déterminer le ou les équilibres du système (3), et dessiner le portrait de phase associé au système (3).

Exercice 4

Le modèle de Bass (1969) étudie la diffusion d'un nouveau produit au sein d'une population. On considère une population de taille de N. On note $U(t)$ le nombre total d'usagers de ce nouveau produit à la date t. Le modèle de Bass propose la dynamique suivante :

$$U'(t) = a(N - U(t)) + \gamma\, U(t)(N - U(t)), \; t \geq 0 \;\text{ avec } U(0) = 0\,. \tag{4}$$

où a et γ sont deux constantes positives. La constantes a est appelée *coefficient d'innovation* et la constante γ est appelée *coefficient d'imitation*.

1. Justifiez que (4) admet une unique solution.
2. On suppose $\gamma > 0$ et $a > 0$. Déterminez les points d'équilibres de (4), tracez son diagramme de phase et en déduire $\lim_{t\to\infty} U(t)$.
3. On pose $X(t) = \left(U(t) + \dfrac{a}{\gamma}\right)^{-1}$.
   a) Montrez que X est l'unique solution du problème de Cauchy
   $$X'(t) = -(a + \gamma N)X(t) + \gamma, \; t \geq 0 \;\text{ avec } X(0) = \frac{\gamma}{a}\,. \tag{5}$$
   b) Déterminez l'expression explicite de $U(t)$ en fonction de t et de N, a et γ.
4. Une variante du modèle de Bass considère un nouveau service proposé par deux entreprises $i = 1$ et $i = 2$. On note $U_i(t)$ le nombre total d'usagers inscrits auprès de l'entreprise i à la date t, et on suppose que
   $$\begin{cases} U_1'(t) = a_1\,(N - U_1(t) - U_2(t))\,, t \geq 0 \;\text{ avec } U_1(0) = 0 \\ U_2'(t) = a_2\,(N - U_1(t) - U_2(t))\,, t \geq 0 \;\text{ avec } U_2(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$
   a) Justifiez que (6) admet une unique solution.
   b) On note $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$. Quelle est l'EDO satisfaite par la fonction U ?
   c) Déterminez l'expression explicite de $U_1(t)$ et $U_2(t)$ en fonction de t, N, a_1 et a_2.