LSO

Outils Mathématiques pour la finance

Examen - Lundi 7 Mars 2022- durée 2h

— Sans document. Sans appareil électronique (calculatrice, téléphone etc)
— Recommandation : lisez tout le sujet avant de composer.

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.
$$x'(t) = \cos(t)\, x(t), \qquad x(0) = 1.$$

2.
$$x'(t) = t\, x(t) + t, \qquad x(0) = 1.$$

3.
$$x'(t) = t\, x(t)^2, \qquad x(0) = 1.$$

Exercice 2

On considère le système différentiel de dimension 2 :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

et sa condition initiale à la date $t = 0$, (x_0, y_0). Pour chacune des matrices A suivantes, donner les solutions du système et dessiner les portraits de phase

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3

On considère une population de poissons dans un lac. La quantité de poissons dans le lac à l'instant t, mesurée en une certaine unité de mesures, est notée $x(t)$. On suppose tout d'abord que cette population satisfait à l'équation suivante :

$$x'(t) = x(t)(1 - x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale de l'équation (2).
2. Déterminer la ligne de phase de cette équation. En déduire la limite de $x(t)$ quand $t \to +\infty$, dans le cas où $x_0 > 0$.

3. Résoudre cette équation par la méthode des variables séparées (on pourra utiliser que $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$) ou par changement de variable (on pourra poser $y(t) = x(t)^{-1}$) .

On suppose maintenant que cette population de poissons est pêchée à raison d'un taux p par unité de temps. L'évolution de $x(t)$ est alors donnée par

$$x'(t) = x(t)(1 - x(t)) - p, \;\; x(0) = x_0 \tag{2}$$

pour un $p \geq 0$ fixé.

4. Déterminer les équilibres et la ligne de phase pour (2). On distinguera suivant que $p > \frac{1}{4}$, $p < \frac{1}{4}$ ou $p = \frac{1}{4}$.
5. Le régulateur doit fixer un quota de pêche, ce qui revient à choisir le paramètre p. Son objectif étant de maximiser la quantité de poissons pêchés (donc p), tout en garantissant que la population de poissons ne va pas s'éteindre. Quel p doit-il choisir ? (la réponse pourra dépendre de la population actuelle x_0).

Exercice 4

Cet exercice présente une version en temps continu du modèle économique de Samuelson. Dans une économie, on note $Y(t)$ le revenu à la date t, $C(t)$ la consommation et $I(t)$ l'investissement. On suppose que Y, C et I sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$Y(t) \;=\; C(t) + I(t)\,; \quad C(t) \;=\; \frac{1}{1+\nu}\left(Y(t) - Y'(t)\right) \quad \text{et} \quad I(t) \;=\; \beta C'(t)\,. \tag{3}$$

où β et ν sont des constantes strictement positives données.

1. Montrez que le revenu vérifie : $Y''(t) = \dfrac{\beta - 1}{\beta} Y'(t) - \dfrac{\nu}{\beta} Y(t)$.
2. On note $Z :\; t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{pmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix}$. Montrez que

$$Z'(t) \;=\; AZ(t)\,, \quad \text{où } A \text{ est la matrice } \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\nu}{\beta} & \dfrac{\beta-1}{\beta} \end{pmatrix} \tag{4}$$

3. Dans cette question, on suppose que les paramètres vérifient : $0 < \beta < 1 + 2\nu - 2\sqrt{\nu^2 + \nu}$
   (a) Justifiez que A admet deux valeurs propres strictement négatives $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.
   (b) Déterminez les solutions de l'EDO (4) (à des constantes près à déterminer en fonction des conditions initiales).
   (c) Dessinez le portrait de phase de l'EDO (4).
   (d) Que peut-on dire de la $\lim_{t \to +\infty} Y(t)$?
4. Dans cette question on suppose que $\beta = 1$, $Y(0) = y_0 > 0$ et $Y'(0) = 0$.
   (a) Justifiez que $\left(\mathbb{R}_+, Z : \mapsto \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}\right)$ est l'unique solution maximale de :

$$Z'(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu & 0 \end{pmatrix} Z(t),\;\; t \geq 0\,, \quad \text{avec} \;\; Z(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

   (b) Montrez que $Y(t) = y_0 \cos(\sqrt{\nu} t)$
   (c) Dessinez le portrait de phase de l'EDO (5)