LSO

Outils Mathématiques pour la finance

Examen - Lundi 20 Février 2023 - durée 2h

- Sans document. Sans appareil électronique (calculatrice, téléphone etc)
- Recommandation : lisez tout le sujet avant de composer.

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle de définition de la solution :

1.
$$x'(t) = t^2\, x(t), \qquad x(0) = 1.$$

2.
$$x'(t) = x(t) + e^t, \qquad x(0) = 1.$$

3.
$$x'(t) = x(t)^3, \qquad x(0) = 1.$$

Exercice 2

On considère le système différentiel de dimension 2 :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

et sa condition initiale à la date $t = 0$, (x_0, y_0). Pour chacune des matrices A suivantes, donner les solutions du système et dessiner les portraits de phase

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 3

On considère l'équation

$$x'(t) = rx(t)\,(1 - x(t)) - px(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

où $x_0 > 0$, $r > 0$ et $p \geq 0$ sont des paramètres fixés.

1. Justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale.
2. Déterminer les points d'équilibres de cette équation.

3. Dessiner la ligne de phase pour cette équation et en déduire le comportement quand le temps tend vers l'infini, selon la condition initiale. (On distinguera suivant les cas $p > r$, $p = r$ et $p < r$).
4. Résoudre explicitement l'équation (1). (On pourra utiliser le changement de variable $y(t) = 1/x(t)$)

On utilise maintenant l'équation (1) pour modéliser la quantité disponible d'une ressource à la date t. Le paramètre p correspond au taux de consommation de cette ressource par unité de temps, qui est choisi par l'agent. En revanche les paramètres $x_0 > 0$ et $r > 0$ sont fixés. On considère

$$c^* = \lim_{t\to\infty} px(t),$$

c'est-à-dire la limite à l'infini de la quantité consommée par unité de temps .

5. Sous quelle condition sur p a-t-on $c^* > 0$?
6. Quelle est la valeur de p à choisir pour maximiser c^* ?

Exercice 4

On note $P(t)$ le prix d'un bien. L'offre en ce bien est $O(t) = -\beta + bP(t)$, la demande est $D(t) = \alpha - aP(t)$ et le stock en réserve est $Q(t) = Q(0) + \int_0^t (O(u) - D(u))\, du$.

Ici $Q(0)$ est le niveau initial du stock ; α, β, a et b sont des paramètres strictement positifs.

On fait l'hypothèse que les marchands ajustent le prix $P(t)$ en fonction du stock en réserve :

$$P'(t) = -\lambda(Q(t) - \bar{Q}),$$

où $\lambda > 0$ est donné et $\bar{Q} \geq 0$ est un niveau de référence fixé.

On note $\bar{P} = (\alpha + \beta)/(a + b)$, $p(t) = P(t) - \bar{P}$ et $q(t) = Q(t) - \bar{Q}$.

1. Montrer que (p, q) est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{pmatrix} p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) - \bar{P} \\ Q(0) - \bar{Q} \end{pmatrix}, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ (a + b) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. Vérifier que la fonction $t \mapsto p(t)^2 + \frac{\lambda}{a+b} q(t)^2$ est constante.
3. Déterminer l'équation linéaire du second ordre à coefficients contants satisfaite par p.
4. On suppose dorénavant que $\lambda = a + b$.
   a) Montrer que la solution s'écrit

   $$(p(t), q(t)) = (c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t), d_1 \cos(\lambda t) + d_2 \sin(\lambda t)), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

   pour des constantes c_1, c_2, d_1, d_2 à déterminer en fonction des paramètres du modèle.
   b) En déduire que la solution de (2) est périodique et donner l'expression de la période des oscillations.
   c) Dessiner le portrait de phase de la solution de (2).