Examen (L2) Mathématiques fondamentales.

27 mars 2020 *D. Gontier & S. Wolf*

Deux heures. Tous les documents sont autorisés.
1 page recto-verso, 4 exercices indépendants.
Le sujet est volontairement long, n'hésitez pas à sauter les questions !
Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.

Exercice 1. Algèbre : échauffement
Dire en une phrase si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Soit

$$A := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est orthogonale ;
2. La matrice A est symétrique définie positive ;
3. La matrice A représente dans la base canonique une projection orthogonale ;
4. L'équation $B^3 = A$ admet une solution.

Exercice 2. Analyse : séries entières
a/ Montrer que la fonction

$$\psi(x) := \frac{2}{2-x}$$

est développable en série entière. Quelle est la série entière correspondante ? Quel est le rayon de convergence ?

b/ On note $S(x)$ la série entière correspondante, et $R \geq 0$ son rayon de convergence.
Vrai ou Faux ? (on justifiera rapidement les réponses)
b1/ S converge uniformément vers ψ sur $[-R, R]$.
b2/ S converge simplement vers ψ sur $(-R, R)$.
b3/ On a $S(R) = \psi(R)$.
b4/ On a $S(-R) = \psi(-R)$.

c/ Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\psi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - \psi(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$$

d/ *(plus difficile)* En déduire que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n} = \frac{2\sin\theta}{5 - 4\cos\theta}.}$$

Exercice 3. Algèbre
On fixe $n \geq 1$. On note $\mathcal{B} := (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^T la matrice transposée de A et $A(i,j)$ le coefficient de A en position (i,j). On notera indifféremment la matrice A et l'endomorphisme canoniquement associé à A. On note $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On note $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs. On admet que $(\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe. En particulier, le produit de deux matrices de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un élément de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ et l'inverse d'une matrice de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un élément de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Question préliminaire. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^T M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On souhaite montrer qu'il existe une matrice $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = T^T T$. On note ϕ_A le produit scalaire défini par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire $\phi_A(x,y) = x^T A y$.

a) Soit $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = T^T T$. Montrer que la famille $(T^{-1}e_1, \cdots, T^{-1}e_n)$ est orthonormale pour ϕ_A.

b) En s'aidant de la question précédente, montrer qu'il existe une matrice $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = T^T T$.

3. Un exemple. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. On admet que $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. Trouver par la méthode de votre choix $T \in \mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = T^T T$.

4. Une application.

a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A(i,i) \geq T(i,i)^2 > 0.$$

b) En déduire que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} A(i,i).$$

c) Montrer l'inégalité suivante, notée (1) : si $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors

$$|\det(M)| \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} M(i,j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

d) *(plus difficile)* Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $M_1, \cdots, M_n$ les vecteurs colonnes de M. Montrer qu'il y a égalité dans (1) si, et seulement, si $(M_1, \cdots, M_n)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ pour $(\cdot,\cdot)$. Interpréter géométriquement.

Exercice 4. Analyse : série de Fourier

Soit f la fonction 2π-périodique, qui vaut $f(x) = \mathrm{e}^x$ sur $[0, 2\pi)$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x.$$

a/ Montrer que *(on rappelle que* $\sinh(x) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$*)*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^\pi \sinh(\pi) \left(\frac{1}{1 - \mathrm{i}n} \right).$$

b/ On pose

$$S_N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Vrai ou faux ? (on justifiera *rapidement* les réponses)

b1/ S_N est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b2/ la suite (S_N) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

b3/ la suite (S_N) converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

b4/ la suite (S_N) converge vers f dans $L^2(0, 2\pi)$.

c/ Montrer que *(on prendra $x = 0$ par exemple)*

$$\mathrm{e}^\pi \cosh(\pi) = \frac{1}{\pi} \mathrm{e}^\pi \sinh(\pi) \left(\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{1 - \mathrm{i}n} \right).$$

d/ *(plus difficile)* En déduire que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\tanh(\pi)} - 1 \right).}$$