Examen (L2) Mathématiques fondamentales.

10 juin 2021 *D. Gontier & S. Wolf*

Trois heures. Sans document.
1 page recto-verso, 5 exercices indépendants.
Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.
Rédiger les parties Algèbre et Analyse sur deux copies séparées !

Exercice 1. Analyse : séries de Fourier
Soit $0 < h < \pi$, et soit f la fonction 2π-périodique définie, sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < h \\ 0 & \text{si} \quad h < |x| < \pi \end{cases} .$$

On note (comme d'habitude)

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t.$$

a/ Dessiner la fonction f, et montrer qu'elle est C^1 par morceaux.
b/ Montrer que

$$c_0 := \frac{2h}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{Z}^* \quad c_n = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(nh)}{n}.$$

c/ Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nh)}{n^2} = \frac{h}{2}(\pi - h).$$

d/ Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{n} = \frac{1}{2}(\pi - h).$$

Exercice 2. Analyse : intégration terme à terme

Pour $n \geq 1$, on pose

$$a_n := -\int_0^1 x^n \log(1-x) \mathrm{d}x.$$

a/ Montrer que la suite a_n est bien définie, qu'elle est positive, et qu'elle tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.
b/ On cherche maintenant un équivalent de a_n. On pose

$$u_{n,k} := \frac{1}{k} \int_0^1 x^n x^k \mathrm{d}x.$$

Montrer que

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k}.$$

c/ En déduire qu'il existe deux constantes α et β (à déterminer), telles que

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{n+k+1} \right).$$

d/ Montrer que

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Trouver un équivalent de a_n lorsque $n \to \infty$.
e/ Est-ce que la série $\sum a_n$ converge ?

Tourner la page...

Exercice 3. Algèbre : étude d'un automorphisme orthogonal sur $\mathbb{R}^3$
On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et de l'orientation fixée par la base canonique. On pose

$$A := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

et on note f l'endomorphisme défini dans la base canonique par A.

a/ Justifier que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ et calculer $\det(f)$.

b/ Question de cours : montrer que le spectre réel de f est inclus dans $\{\pm 1\}$.

c/ Justifier que f est diagonalisable en base orthonormée et en déduire que f est une réflexion.

d/ Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que f soit la réflexion par rapport à $\{x\}^\perp$.

Exercice 4. Algèbre : étude d'un endomorphisme auto-adjoint sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Soit $n \geq 1$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique dont on rappelle qu'il est défini par $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N)$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_{a,b} : M \mapsto aM + bM^T$. On a que $\phi_{a,b} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

a/ On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques). Montrer que

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \tag{1}$$

b/ Justifier que $\phi_{a,b}$ est un endomorphisme auto-adjoint. En déduire que $\phi_{a,b}$ est diagonalisable en base orthonormée.

c/ Trouver le spectre et les sous-espaces propres de $\phi_{a,b}$. On pourra montrer que (1) est une décomposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en sous-espaces propres.

d/ Application : donner la trace de $\phi_{a,b}$.

Exercice 5. Algèbre : sur l'équation $f^2 = f^*$
Soit E un espace euclidien. Dans cet exercice, on fixe $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

a/ Question de cours : on suppose dans cette question que f est un projecteur. Montrer que f est un projecteur orthogonal si, et seulement si, f est auto-adjoint.

b/ Montrer que si f est un projecteur orthogonal, alors $f^2 = f^*$.

c/ On suppose réciproquement que $f^2 = f^*$.
c1/ Justifier que pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $(g^*)^2 = (g^2)^*$.
c2/ Montrer que $f^4 = f$.
c3/ Montrer que f^3 est un projecteur orthogonal.

d/ Montrer par un exemple que, si $f^2 = f^*$, alors f n'est pas nécessairement un projecteur orthogonal. On pourra penser à la classification des isométries en dimension 2.