

Partiel (L2) Mathématiques fondamentales.

(Université PSL - CPES2) 9 juin 2022 *D. Gontier & S. Wolf*

Trois heures ($\sim 1h30$ chaque partie). Sans document.

1 page recto-verso, 6 exercices indépendants.

Rédiger la partie Analyse et la partie Algèbre sur des feuilles différentes.

Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.

Partie Algèbre

Exercice 1. Autour des isométries

Cet exercice contient deux parties indépendantes.

1. On pose

$$M := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

- On a $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
 - M représente dans la base canonique une réflexion orthogonale.
 - M représente dans la base canonique une rotation d'angle $\pm 2\pi/3$ (l'angle proposé est ici non-orienté).
 - M représente dans la base canonique une rotation d'axe $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (l'axe proposé est ici non-orienté).
2. Soient $n \geq 1$ et $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ où \mathbb{R}^n est muni de sa structure canonique euclidienne.
- A-t-on nécessairement $(f + g)/2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$? On suppose dans la suite de l'exercice que $(f + g)/2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.
 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(x), g(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|f(x)\| \|g(x)\|$.
 - Conclure que $f = g$. *Indication* : Cauchy-Schwarz!
-

Exercice 2. Matrices symétriques

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $X^T A X \leq X^T B X$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que, si $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\text{sp}(C) \subset \mathbb{R}_*^+$.

- Question de cours.* Montrer qu'il existe $B_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B = B_1^2$.
 - Justifier que $\det A \geq 0$, $\text{tr}(A) \geq 0$ et $\text{tr}(A) \leq \text{tr}(B)$.
 - Dans cette question *seulement*, on suppose que $B = I_n$. Montrer que $\det A \leq \det B$. *Indication* : on pourra montrer que le spectre de A est inclus dans $[0, 1]$.
 - Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(B_1 X)^T A' (B_1 X) \leq (B_1 X)^T (B_1 X)$ où $A' := B_1^{-1} A B_1^{-1}$. En utilisant la question précédente, en déduire que $\det A \leq \det B$.
-

Exercice 3. Adjoint d'un endomorphisme

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f + f^* = 2\text{Id}$. L'objectif de cet exercice est de donner quelques propriétés satisfaites par f . Les questions 2., 3. et 4. sont indépendantes entre elles.

- Question de cours.* Montrer que $\ker(f)^\perp = \text{im}(f^*)$.
- Montrer que $\ker(f) \subset \text{im}(f^*)$ et en déduire que f est inversible.
- Montrer que $\text{sp}(f) \subset \{1\}$. A-t-on $f = \text{Id}$? *Indication pour la première partie* : si $\lambda \in \text{sp}(f)$ et x est un vecteur propre associé à λ , on pourra calculer de deux manières $\langle f^*(x), x \rangle$.
- Montrer que $E = \ker(f - \text{Id}) \oplus^\perp \text{im}(f - \text{Id})$.

Partie Analyse

Exercice 4. Analyse : Dérivabilité sous le signe intégrale

Pour $t \geq 0$, on pose $F(t) = \int_0^\infty \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} dx$.

a/ Montrer que pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

b/ Montrer que la fonction F est de classe C^1 , et que $F'(t) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+t^2x^2)(1+x^2)}$.

c/ Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a

$$\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{t^2-1} \left(\frac{t^2}{1+t^2x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right).$$

d/ En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a $F'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{t+1}$.

e/ On admet que la formule précédente est valide en $t = 1$ aussi (c'est vrai car F' est continue). Montrer que

$$F(t) = \frac{\pi}{2} \ln(1+t).$$

Exercice 5. Analyse : séries de Fourier

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, et soit f_α la fonction 2π -périodique définie sur $(-\pi, \pi)$ par $f_\alpha(t) := e^{i\alpha t}$.

a/ Montrer que f est C^1 par morceaux. Que vaut le point milieu $\frac{1}{2} [f(\pi^+) + f(\pi^-)]$?

b/ On pose $c_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^\pi f(t) e^{-int} dt$ le n -ème coefficient de Fourier de f . Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{\alpha - n} \sin(\alpha\pi).$$

c/ Montrer que : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha - n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\alpha\pi)}$.

d/ Montrer que (on pourra regarder en $t = \pi$)

$$\pi \frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}. \quad (*)$$

Exercice 6. Analyse : Développement en produit infini

Cet exercice est la suite du précédent, mais peut se traiter séparément. On pourra admettre la formule (*).

Dans la suite, on fixe $0 < \varepsilon < 1$.

a/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) := \frac{2x}{x^2 - n^2}$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge normalement sur $[0, 1 - \varepsilon]$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} \quad (\text{convergence uniforme sur } [0, 1 - \varepsilon]).$$

b/ Montrer que, pour tout $y \in [0, 1 - \varepsilon]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_0^y u_n(x) = \log \left(1 - \frac{y^2}{n^2} \right)$.

c/ Montrer que, pour tout $y \in [0, 1 - \varepsilon]$, on a (on pourra dériver...)

$$\int_0^y \left(\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} \right) = \ln \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \right).$$

d/ En déduire que, pour tout $y \in [0, 1 - \varepsilon]$, on a

$$\sin(\pi y) = \pi y \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{n^2} \right).$$

e/ En déduire que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) = \frac{2}{\pi}.$$
