Examen (L2) Mathématiques fondamentales.

(Université PSL - CPES2) 9 juin 2022 *D. Gontier & S. Wolf*

Trois heures ($\sim$ 1h30 chaque partie). Sans document.
1 page recto-verso, 6 exercices indépendants.
Rédiger la partie Analyse et la partie Algèbre sur des feuilles différentes.
Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.

Partie Algèbre

Exercice 1. Autour des isométries

Cet exercice contient deux parties indépendantes.

1. On pose
$$M := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier.
   (a) On a $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
   (b) M représente dans la base canonique une réflexion orthogonale.
   (c) M représente dans la base canonique une rotation d'angle $\pm 2\pi/3$ (l'angle proposé est ici non-orienté).
   (d) M représente dans la base canonique une rotation d'axe $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (l'axe proposé est ici non-orienté).
2. Soient $n \geq 1$ et $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ où $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure canonique euclidienne.
   (a) A-t-on nécessairement $(f+g)/2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$? On suppose dans la suite de l'exercice que $(f+g)/2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(x), g(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|f(x)\|\|g(x)\|$.
   (c) Conclure que $f = g$. *Indication* : Cauchy-Schwarz !

Exercice 2. Matrices symétriques

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $X^T AX \leq X^T BX$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que, si $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{sp}(C) \subset \mathbb{R}_*^+$.

1. *Question de cours.* Montrer qu'il existe $B_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B = B_1^2$.
2. Justifier que $\det A \geq 0$, $\mathrm{tr}(A) \geq 0$ et $\mathrm{tr}(A) \leq \mathrm{tr}(B)$.
3. Dans cette question *seulement*, on suppose que $B = I_n$. Montrer que $\det A \leq \det B$. *Indication :* on pourra montrer que le spectre de A est inclus dans $[0,1]$.
4. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(B_1X)^T A'(B_1X) \leq (B_1X)^T(B_1X)$ où $A' := B_1^{-1}AB_1^{-1}$. En utilisant la question précédente, en déduire que $\det A \leq \det B$.

Exercice 3. Adjoint d'un endomorphisme

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f + f^* = 2\mathrm{Id}$. L'objectif de cet exercice est de donner quelques propriétés satisfaites par f. Les questions 2., 3. et 4. sont indépendantes entre elles.

1. *Question de cours.* Montrer que $\ker(f)^\perp = \mathrm{im}(f^*)$.
2. Montrer que $\ker(f) \subset \mathrm{im}(f^*)$ et en déduire que f est inversible.
3. Montrer que $\mathrm{sp}(f) \subset \{1\}$. A-t-on $f = \mathrm{Id}$? *Indication pour la première partie* : si $\lambda \in \mathrm{sp}(f)$ et x est un vecteur propre associé à λ, on pourra calculer de deux manières $\langle f^*(x), x\rangle$.
4. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{im}(f - \mathrm{Id})$.

Partie Analyse

Exercice 4. Analyse : Dérivabilité sous le signe intégrale

Pour $t \geq 0$, on pose $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x$.

a/ Montrer que pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b/ Montrer que la fonction F est de classe C^1, et que $F'(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+t^2x^2)(1+x^2)}$.

c/ Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a

$$\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{t^2-1}\left(\frac{t^2}{1+t^2x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right).$$

d/ En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a $F'(t) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{t+1}$.

e/ On admet que la formule précédente est valide en $t = 1$ aussi (c'est vrai car F' est continue). Montrer que

$$F(t) = \frac{\pi}{2}\ln(1+t).$$

Exercice 5. Analyse : séries de Fourier

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et soit f_α la fonction 2π-périodique définie sur $(-\pi, \pi)$ par $f_\alpha(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$.

a/ Montrer que f est C^1 par morceaux. Que vaut le point milieu $\frac{1}{2}\left[f(\pi^+) + f(\pi^-)\right]$?

b/ On pose $c_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$ le n-ème coefficient de Fourier de f. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-1)^n}{\alpha - n}\sin(\alpha\pi).$$

c/ Montrer que : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\alpha\pi)}$.

d/ Montrer que *(on pourra regarder en $t = \pi$)*

$$\pi\frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}. \qquad (*).$$

Exercice 6. Analyse : Développement en produit infini

Cet exercice est la suite du précédent, mais peut se traiter séparément. On pourra admettre la formule (*). Dans la suite, on fixe $0 < \varepsilon < 1$.

a/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) := \frac{2x}{x^2-n^2}$. Montrer que $\sum_{n=1}^\infty u_n$ converge normalement sur $[0, 1-\varepsilon]$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} = \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} \quad \text{(convergence uniforme sur } [0, 1-\varepsilon]).$$

b/ Montrer que, pour tout $y \in [0, 1-\varepsilon]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\int_0^y u_n(x) = \log\left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right)$.

c/ Montrer que, pour tout $y \in [0, 1-\varepsilon]$, on a *(on pourra dériver...)*

$$\int_0^y \left(\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right).$$

d/ En déduire que, pour tout $y \in [0, 1-\varepsilon]$, on a

$$\sin(\pi y) = \pi y \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right).$$

e/ En déduire que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$
