Partiel (L2) Mathématiques fondamentales. (Corrections)

9 juin 2022 *D. Gontier & S. Wolf*

Trois heures. Sans document.
1 page recto-verso, 6 exercices indépendants.
Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.

Exercice 1. Analyse : Dérivabilité sous le signe intégrale

Pour $t \geq 0$, on pose

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x.$$

a/ Montrer que pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b/ Montrer que la fonction F est de classe C^1, et que

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+t^2x^2)(1+x^2)}.$$

c/ Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a

$$\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{t^2-1}\left(\frac{t^2}{1+t^2x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right).$$

d/ En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a

$$F'(t) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{t+1}.$$

e/ On admet que la formule précédente est valide en $t = 1$ aussi (c'est vrai car F' est continue). Montrer que

$$F(t) = \frac{\pi}{2}\ln(1+t).$$

---

a/ Soit $f(t,x) := \dfrac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}$. Pour tout $t \geq 0$, la fonction $f(t,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. En 0, on a

$$\lim_{x \to 0^+} f(t,x) = \frac{t}{(1+x^2)} < \infty,$$

donc cette fonction admet un prolongement par continuité en 0. De plus, en $+\infty$, on a $f(t,x) = O(x^{-3})$, donc la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après le critère de Riemann.

b/ On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$. On a déjà montré que $x \mapsto f(t,x)$ était intégrable. On a

$$\partial_t f(t,x) = \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)}.$$

En tant que fonction de x, cette fonction est continue sur $[0,\infty)$, et est intégrable en $+\infty$ (car elle décroit comme $O(x^{-4})$). De plus, on a la majoration

$$|\partial_t f(t,x)| \leq \frac{1}{1+x^2} =: \phi(x),$$

qui est intégrable. Le théorème de dérivation s'applique. On en déduit que F est de classe C^1, et que

$$F'(t) = \int_0^\infty \partial_t f(t,x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)}\mathrm{d}t.$$

c/ C'est une décomposition en élément simple. Il suffit de réduire au même dénominateur.

d/ On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)}\mathrm{d}t &= \frac{1}{t^2-1}\left(t^2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+t^2x^2} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)\\ &= \frac{1}{t^2-1}\left(t\,[\arctan(tx)]_0^\infty - [\arctan(tx)]_0^\infty\right)\\ &= \frac{1}{(t-1)(t+1)}\frac{\pi}{2}(t-1) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t}.\end{aligned}$$

e/ On obtient

$$F(t) = \int_0^t F'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\pi}{2}\frac{1}{s+1}\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}\left[\ln(1+s)\right]_0^t = \frac{\pi}{2}\ln(1+t).$$

Exercice 2. Analyse : séries de Fourier

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, et soit f_α la fonction 2π-périodique définie sur $(-\pi, \pi)$ par $f_\alpha(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$.

a/ Montrer que f est C^1 par morceaux. Que vaut le point milieu $\frac{1}{2}\left[f(\pi^+) + f(\pi^-)\right]$?
b/ On pose $c_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$ le n-ème coefficient de Fourier de f. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-1)^n}{\alpha - n}\sin(\alpha\pi).$$

c/ Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\alpha\pi)}.$$

d/ Montrer que *(on pourra regarder en $t = \pi$)*

$$\pi\frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}. \qquad (*).$$

---

a/ f est de classe C^∞ sur $(-\pi, \pi)$, et 2π-périodique, donc est C^1 par morceaux. On a

$$\frac{1}{2}(f(\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2}(f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\pi}) = \cos(\alpha\pi).$$

b/ On a, comme $\alpha \neq \mathbb{Z}$, que

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-n)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-n)t}}{\mathrm{i}(\alpha-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\mathrm{i}(\alpha-n)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-n)\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-n)\pi}\right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(\alpha-n)}\sin((\alpha-n)\pi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-1)^n}{\alpha-n}\sin(\alpha\pi). \end{aligned}$$

c/ Comme f est C^1 par morceaux, on peut utiliser Parseval. On obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f|^2$$

avec $\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 = 2\pi$, et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{4}{2\pi}\frac{1}{(\alpha-n)^2}\sin^2(\alpha\pi) = \frac{2}{\pi}\sin^2(\alpha\pi)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\alpha-n)^2}.$$

Le résultat suit.

d/ Comme f est C^1 par morceaux, on peut appliquer le théorème de Dirichlet. On obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right).$$

En $t = \pi$, et en utilisant la première question, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{2}{2\pi}\frac{1}{\alpha-n}\sin(\alpha\pi) = \cos(\alpha\pi).$$

On isole le terme $n = 0$, et on regroupe les terme n et $-n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n}\right]\right) = \frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right).$$

Exercice 3. Analyse : Développement en produit infini

Cet exercice est la suite du précédent, mais peut se traiter séparément. On pourra admettre la formule (*). Dans la suite, on fixe $0 < \varepsilon < 1$.

a/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) := \frac{2x}{x^2-n^2}$. Montrer que $\sum_{n=1}^\infty u_n$ converge normalement sur $[0, 1-\varepsilon]$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2x}{x^2-n^2} = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} \quad \text{(convergence uniforme sur } [0, 1-\varepsilon]).$$

b/ Montrer que, pour tout $y \in [0, 1-\varepsilon]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^y u_n(x) = \log\left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right).$$

c/ Montrer que, pour tout $y \in [0, 1-\varepsilon]$, on a *(on pourra dériver...)*

$$\int_0^y \left(\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right).$$

d/ En déduire que, pour tout $y \in [0, 1-\varepsilon]$, on a

$$\sin(\pi y) = \pi y \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right).$$

e/ En déduire que

$$\prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

---

a/ On a, en utilisant que pour $x \in [0, 1-\varepsilon]$, on a $|x| \le 1$, et $0 < n^2 - x^2 \le n^2 - (1-\varepsilon)^2$ que

$$\max_{x \in [0, 1-\varepsilon]} |u_n(x)| \le \frac{2}{n^2 - (1-\varepsilon)^2},$$

qui est sommable en n. Donc $\sum u_n$ est ACV. Elle converge donc uniformément (donc simplement) vers une limite ψ. D'après l'exercice précédente, elle converge simplement vers (...). Par unicité de la limite, on a bien le résultat.

b/ On reconnait que $\frac{2x}{x^2-n^2}$ est de la forme u'/u avec $u(x) = x^2 - n^2$. Cela donne

$$\int_0^y u_n(x) = \left[\ln(n^2 - x^2)\right]_0^y = \ln(n^2 - y^2) - \ln n^2 = \ln\left(\frac{n^2 - y^2}{n^2}\right) = \ln\left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right).$$

c/ On a

$$\left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)' = -\frac{\sin(\pi y)}{\pi y^2} + \pi \frac{\cos(\pi y)}{\pi y} = \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\left(-\frac{1}{y} + \pi \frac{\cos(\pi y)}{\sin(\pi y)}\right).$$

On obtient

$$\ln\left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)' = -\frac{1}{y} + \pi \frac{\cos(\pi y)}{\sin(\pi y)}.$$

En intégrant entre 0 et π, on obtient

$$\int_0^y \left(-\frac{1}{x} + \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}\right) \mathrm{d}x = \left[\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)\right]_0^y = \ln \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}$$

d/ Comme on a convergence uniforme, on peut intégrer (*) terme à terme en x. Cela donne

$$\ln \frac{\sin(\pi y)}{\pi y} = \sum_{n=1}^\infty \ln\left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right).$$

En passant à l'exponentielle, on obtient

$$\frac{\sin(\pi y)}{\pi y} = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right).$$
