# Partiel (L2) Mathématiques fondamentales.

**11 mai 2021** *D. Gontier & S. Wolf*

*Deux heures. Sans document.*
*1 page recto-verso, 5 exercices indépendants.*
*Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.*

---

**Exercice 1. Analyse : séries entières**

a/ Quel est le développement en série entière de $f(x) := \frac{1}{1+x}$ ? Quel est le rayon de convergence ?

b/ On note $S(x)$ la série entière correspondante, et $R \geq 0$ son rayon de convergence.
**Vrai ou Faux ? (on justifiera rapidement les réponses)**

b1/ $S$ converge uniformément vers $f$ sur $[0, R]$.
b2/ $S$ converge simplement vers $f$ sur $[0, R)$.
b3/ On a $S(R) = f(R)$.
b4/ On a $S(-R) = f(-R)$.

c/ Soit $\alpha > 0$. Montrer que, pour tout $0 \leq x < 1$, on a

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{\alpha n+1}}{\alpha n+1}. \tag{1}$$

d/ On introduit la série entière $\widetilde{S}(z) := \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{\alpha n+1}$. Quel est le rayon de convergence de $\widetilde{S}$ ?

e/ Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}.$$

f/ Calculer les sommes suivantes

$$A := \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad B := \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

---

**Exercice 2. Analyse : lancer de dés**

On considère deux dés à 4 faces (oui, on admet que c'est possible), tous les deux numérotés de 1 à 4.
Pour $1 \leq i \leq 4$, on note $p_i$ (resp. $q_i$) la probabilité d'obtenir $i$ en lançant le premier (resp. deuxième) dé.
On a donc $p_i \geq 0$, $q_j \geq 0$ et $\sum_{i=1}^4 p_i = \sum_{j=1}^4 q_j = 1$. On pose

$$P(X) := p_1 X + p_2 X^2 + p_3 X^3 + p_4 X^4, \quad \text{et} \quad Q(X) := q_1 X + q_2 X^2 + q_3 X^3 + q_4 X^4.$$

Enfin, on note $R(X) := P(X)Q(X) = r_2 X^2 + \cdots + r_8 X^8$.

a/ Montrer que $\sum_{k=2}^8 r_k = 1$.

b/ Justifier (rapidement) que la probabilité d'avoir $k$ en lançant les deux dés (et en sommant les résultats) est $r_k$.

c/ Factoriser $X + X^2 + X^3 + X^4$. Existe-il deux dés pipés tels qu'en jetant ces dés, on obtient les mêmes probabilités que pour des dés non pipés ($p_i = q_j = \frac{1}{4}$) ?

---

**Exercice 3. Algèbre : étude d'un produit scalaire**

Soit $E := \mathcal{C}^1([-1,1], \mathbb{R})$ et

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

a/ Justifier rapidement que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.

b/ Question de cours : expliquer le procédé de Gram-Schmidt à l'aide d'un dessin en dimension 2.

c/ On pose $u(t) := 1$ et $v(t) := 2t$ et on note $F := \mathrm{Vect}(u, v)$. Construire une base orthonormée de $F$.

d/ On pose $w(t) := 1 - t$. Donner, sans faire de calculs, la distance de $w$ à $F$.

---

**Exercice 4. Algèbre : orthogonal des matrices diagonales**
Soit $n \geq 1$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, dont on rappelle qu'il est défini, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par $\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(A^T B)$ où Tr désigne la trace. On note $E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$ les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On désigne par $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales réelles. L'objectif de cet exercice est de trouver $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})^\perp$.

a/ Calcul préliminaire : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Montrer que $\langle A, E_{i,j}\rangle = A_{i,j}$.

b/ Donner la dimension de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})^\perp$ puis décrire $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})^\perp$.

---

**Exercice 5. Algèbre : famille de vecteurs proche d'une base orthonormée**
Soit $E$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} := (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de $E$ et $(f_1, ..., f_n)$ une famille de $E$ telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \|e_k - f_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

a/ On note $F := \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$ et on suppose par l'absurde que $F \neq E$.
a1/ Justifier qu'il existe un vecteur $x \in F^\perp$ tel que $\|x\| = 1$.
a2/ On note $\pi_X$ la projection orthogonale sur $X := \mathrm{Vect}(x)$. On pose

$$A := \sum_{k=1}^{n} \|\pi_X(e_k)\|^2.$$

Montrer que $A = 1$.
a3/ En constatant que $\pi_X = \mathrm{Id} - \pi_{X^\perp}$, montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\|\pi_X(e_k)\| \leq \|e_k - f_k\|.$$

Aboutir alors à une contradiction. On conclut que $F = E$ *i.e* $(f_1, ..., f_n)$ est une base de $E$.

b/ Le résultat subsiste-t-il si on suppose, au lieu de (2), que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|e_k - f_k\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ? On se limitera au cas $n = 2$.