Partiel (L2) Mathématiques fondamentales.

11 avril 2021 *D. Gontier & S. Wolf*

Deux heures. Sans document.
1 page recto-verso, 6 exercices indépendants.
Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.

Exercice 1. Analyse : séries entières

Soit $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $0 < R < \infty$.
On note R_1, R_2 et R_3 les rayons de convergence des séries entières

$$S_1(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}, \quad S_2(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \mathrm{e}^{\sqrt{n}} z^n, \quad S_3(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{n^2}.$$

a/ Montrer qu'il existe $0 < r_1 < r_2 < \infty$ tel que la suite $(a_n r_1^n)$ soit bornée, et telle que la suite $(a_n r_2^n)$ soit non bornée.

b/ Calculer R_1 (on justifiera la réponse).

c1/ Montrer que $R_2 \leq R$.
c2/ Montrer que $R_2 \geq R$ (*on pourra utiliser le nombre* r_1).

d1/ Montrer que pour tout $\rho < 1$, la suite $(a_n \rho^{n^2})$ est bornée (*on pourra utiliser le nombre* r_1)
d2/ Montrer que pour tout $\rho > 1$, la suite $(a_n \rho^{n^2})$ est non bornée (*on pourra utiliser le nombre* r_2).

Exercice 2. Algèbre : un produit scalaire
On pose $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$.

1. *Question de cours.* Donner le produit scalaire canonique sur E et vérifier qu'il définit bien un produit scalaire.
2. On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier brièvement que la famille (A, B, C) est libre puis orthonormaliser la famille (A, B).
3. Calculer la projection orthogonale de C sur $V := \mathrm{Vect}(A, B)$ et donner $d(C, V)$.

Exercice 3. Analyse : Encore des identités
On rappelle que la fonction $f(x) := \sqrt{1+x}$ est développable en série entière sur $(-1, 1)$, avec

$$\forall x \in (-1,1), \quad f(x) = S(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad \text{où} \quad a_n := \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

a/ Montrer que le rayon de convergence de S est $R = 1$.

b/ On rappelle la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. Calculer un équivalent de a_n lorsque $n \to \infty$.

c/ Montrer que

$$\sqrt{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

d/ Montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente. En déduire que

$$0 = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1}, \quad \text{puis que} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} = 1.$$

T.S.V.P

Exercice 4. Algèbre : avec des projections
Soit E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On note p (resp. q) la projection orthogonale sur F (resp. G).

1. *Question préliminaire.* Soit π un projecteur orthogonal. Justifier que pour tout $x \in E$, $\|x - \pi(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|\pi(x)\|^2$.
2. On suppose que $F \subset G$. Soit $x \in E$. Justifier que $\|x - q(x)\| \leq \|x - p(x)\|$ et en déduire que $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.
3. On suppose réciproquement que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$. Montrer que $F \subset G$.
4. Que peut-on dire si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| = \|q(x)\|$?

Exercice 5. Analyse : Théorème de Cauchy
Soit $S(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

a/ Soit $0 \leq r < R$, et soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $g_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par

$$g_n(\theta) := a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}.$$

a1/ Montrer que la série $\sum g_n$ convergence normalement sur $[0, 2\pi]$.
a2/ En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers $\theta \mapsto S(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}$.

b/ Montrer que

$$\int_0^{2\pi} S(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} \mathrm{d}\theta = \sum_{n \geq 0} \int_0^{2\pi} g_n(\theta) \mathrm{d}\theta.$$

c/ En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a_k = \dfrac{1}{r^k} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} S(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} \mathrm{d}\theta$.

d/ On suppose que $R = \infty$, et que S est une fonction bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $a_k = 0$ (*on pourra faire la limite $r \to \infty$...*).

Ceci montre le théorème de Cauchy suivant :

Théorème de Cauchy : *Si f est une fonction holomorphe (=SE) bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.*

Exercice 6. Algèbre : famille génératrice
Soit E un espace préhilbertien. On suppose qu'il existe une famille $e_1, ..., e_p$ de vecteurs non nuls de E et deux constantes $A, B > 0$ telles que

$$\forall x \in E, \quad A\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{p} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

1. Montrer que la famille $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice dans E. *Indication* : on pourra regarder $\{e_1, ..., e_p\}^{\perp}$.
2. Montrer par un exemple qu'elle n'est pas nécessairement libre.
3. On suppose que $A = B$. Soit $x \in E$.
   (a) Justifier que pour tout $y \in E$, $A\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$. *Indication* : on pourra utiliser l'identité de polarisation.
   (b) Montrer que $x = \dfrac{1}{A} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$.
