

# Partiel (L2) Mathématiques fondamentales. (Analyse)

23 février 2023 D. Gontier & S. Wolf

---

Deux heures. Sans document.

1 page recto-verso, 6 exercices indépendants.

Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.

---

## Exercice 1. Analyse : séries entières 1

a/ Calculer le développement en série entière de la fonction suivante, et donner son rayon de convergence (avec une justification rapide)

$$f(x) := \frac{x^2}{1-x}.$$

b/ Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{x(x-1)}$ .

c/ Calculer

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

## Exercice 2. Analyse : séries entières 2

Le but de cet exercice est de calculer le développement en série entière de  $f(x) = e^x \sin(x)$ .

a/ Montrer que  $f$  est développable en série entière, avec

$$e^x \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} \right) x^n.$$

Quel est le rayon de convergence ?

b/ Montrer que (un dessin suffit...)

$$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

c/ En déduire que

$$e^x \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{n!} x^n.$$

## Exercice 3. Analyse : séries entières 3

On rappelle que  $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ .

1/ Montrer que (on pourra dériver l'expression...)

$$\int_0^x \frac{s - \arctan(s)}{s^2} ds = \frac{\arctan(x)}{x} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - 1.$$

2/ En déduire que (on pourra poser  $x = z^2$ )

$$\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \ln(1+x) - 1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{2n+1} \frac{x^n}{n}.$$