Partiel (L2) Mathématiques fondamentales : Analyse

28 mars 2024 *D. Gontier*

Une heure. Sans document.
1 page recto, 3 exercices indépendants.

Exercice 1. Analyse : le log complexe

a/ Rappeler (sans preuve) les développements en séries entières et rayon de convergence de

$$-\log(1-z) \quad \text{et} \quad \arctan(z).$$

b/ En déduire que si $x \in (-1,1)$, on a

$$\mathrm{Re}\,[\log(1+\mathrm{i}x)] = \frac{1}{2}\log(1+x^2), \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,[\log(1+\mathrm{i}x)] = \arctan(x).$$

c/ Avec un dessin, justifier que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1+\mathrm{i}x = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec

$$r := \sqrt{1+x^2}, \quad \text{et} \quad \theta = \arctan(x).$$

Ceci montre que si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est sur l'axe $1+\mathrm{i}(-1,1)$, on a

$$\log(z) = \log(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \log(r) + \mathrm{i}\theta. \qquad \textit{(log complexe).} \qquad (*)$$

Autrement dit, la partie réelle est le log du module, et la partie imaginaire est l'argument. En fait, on peut montrer que cette égalité reste vraie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Exercice 2. Analyse, étude d'un série entière

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On veut étudier la série entière

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\alpha}}{n} x^n.$$

a/ Quel est le rayon de convergence R de la série ?
b/ Montrer que pour $z \in \mathcal{B}(0,R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$, on a

$$S(z) = -\log(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z).$$

c/ Soit $x \in (-R,R)$ un nombre réel. Montrer que (on pourra utiliser la relation $(*)$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n = -\log(|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}x|) = -\frac{1}{2}\log\left(1+x^2-2x\cos(\alpha)\right).$$

d/ On admet que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ est convergente (cf TD1). Montrer que,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n} = -\frac{1}{2}\log\left(2-2\cos(\alpha)\right) = -\log\left(2\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|\right).$$

Exercice 3. Calcul de π

a/ Dessiner un joli triangle équilatéral. Si la longueur des côtés est 1, quelle est la hauteur ? Montrer rapidement sur votre dessin que $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$.
b/ En déduire que

$$\boxed{\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.}$$

c/ Soit $R_N := 2\sqrt{3}\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$ le reste de la série. Montrer que $|R_N| \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{N3^N}$.

On trouve numériquement la suite suivante pour $S_L := 2\sqrt{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{L} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$

L	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	$\cdots$	*10*	*15*
S_L	**3.***4*	**3.***08*	**3.1***56*	**3.1***38*	**3.14***2*	**3.141***3*	$\cdots$	**3.14159***3*	**3.14159265***1*

On gagne environ une décimale tous les deux termes (ceci vient du fait que $\frac{1}{3^2} \approx 0.1$). Cette méthode donne (enfin) une méthode praticable pour calculer π numériquement.