TD1 : Révisions.

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Quelques rappels importants

Exercice 1. (Développement limité)
Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes, à l'ordre 5.

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_2(x) = -\ln(1-x), \quad f_3(x) = \tan(x), \quad f_4(x) = \arctan(x).$$

Exercice 2. (Intégration)
a/ Montrer que, pour tout $E > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{E^2 + x^2} = \frac{\pi}{E}.$$

b/ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, à support compact (il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x > A$), et non nulle. Montrer que pour tout $s > 0$, il existe une constante C_s tel que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x^s} = C_s \int_0^{\infty} f(tx) t^{s-1} \mathrm{d}t.$$

Exercice 3. (Séries)
Les séries suivantes sont-elles convergentes, et si oui, quelles sont les limites ?

$$S_1 := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}, \quad S_2 := \sum_{n \geq 1} \mathrm{e}^{-n}, \quad S_3 := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n+1}, \quad S_4 := \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Des problèmes plus sérieux

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

a/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, croissante avec $f(-\infty) = 0$ et $f(\infty) = 1$.
b/ Soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ la suite de polynômes définies par récurrence par

$$P_0(X) = 1, \quad \text{puis} \quad P_{n+1}(X) = X^3 P_n'(X) - 3nX^2 P_n(X) + 2P_n(X).$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

c/ En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.
d/ En utilisant la formule de Taylor, montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{t^{3(n+1)}} P_{n+1}(t) \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

e/ Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x)f(1-x)$ est une fonction non nulle, C^∞ à support compact.

Exercice 5. (La fonction Γ)
On définit la fonction $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

a/ Montrer que l'intégrale est bien définie ssi $x > 0$.
b/ En faisant une intégration par partie, montrer que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

c/ Montrer que $\Gamma(1) = 1$, puis que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d/ Soit $0 < x < 1$. Avec un changement de variable, montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\Gamma(1-x) = t \int_0^\infty (tu)^{-x} \mathrm{e}^{-tu} \mathrm{d}u.$$

En déduire que (on pourra utiliser le théorème de Fubini)

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{u^{-x}}{1+u} \mathrm{d}u.$$

e/ Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, puis que $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *(on pourra poser $u = y^2$)*
f/ En déduire l'intégrale de la Gaussienne *(on pourra poser $t = y^2$ dans la définition de Γ)*

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y = \sqrt{\pi}.$$

Avec des matrices

Exercice 6. (Série de Neumann)
On pose $\|x\|_{\mathbb{R}^n} := (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

a/ Montrer que $\| \cdot \|_{\mathrm{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On l'appelle la norme d'opérateur.*
b/ Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|AB\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{op}} \|B\|_{\mathrm{op}}$. En déduire que $\|A^n\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{op}}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
c/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(\mathbb{I}_n - A)(1 + A + A^2 + \cdots + A^n) = \mathbb{I}_n - A^{n+1}.$$

d/ Montrer que si $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$, alors la série *de Neumann* $B := \mathbb{I}_n + A + A^2 + \cdots$ est normalement convergente.
e/ En déduire que si $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$, alors $\mathbb{I}_n - A$ est inversible, et que $B = (\mathbb{I}_n - A)^{-1}$.

Exercice 7.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} A^n.$$

a/ Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$, la série $f(s) := \exp(sA)$ est normalement convergente.
b/ Montrer que $f(s+t) = f(s)f(t)$.
c/ Montrer que $f(\varepsilon) = \mathbb{I}_d + \varepsilon A + o(\varepsilon)$.
d/ En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x, avec $f'(x) = Af(x)$.