TD1 : Révisions (+ corrections).

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Quelques rappels importants

Exercice 1. (Développement limité)
Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes, à l'ordre 5.

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_2(x) = -\ln(1-x), \quad f_3(x) = \tan(x), \quad f_4(x) = \arctan(x).$$

Solution

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5) \\
f_2(x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5). \\
f_3(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5). \\
f_4(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Pour f_3, on utilise le fait que tan est impaire, donc il n'y a que des termes "impairs" qui apparaissent. Avec $\tan'(0) = 1$, on cherche a et b tel que $\tan(x)\cos(x) = \sin(x)$ à l'ordre 5, c'est à dire

$$\left(x + ax^3 + bx^5\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) + o(x^5) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

On trouve

$$\begin{cases} a - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3!} & \text{(termes en } x^3) \\ b - \frac{a}{2} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{5!} & \text{(termes en } x^5). \end{cases} \quad \text{donc} \quad a = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \quad \text{puis} \quad b = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{5 \cdot 24} = \frac{2}{15}.$$

Remarque : il n'y a pas de formules «simples» pour le développement limité de tan.

Pour $f_4 = \arctan$, on peut dériver f_4, et obtenir

$$f_4'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

On trouve le résultat en intégrant, et en remarquant que $f_4(0) = 0$.

Exercice 2. (Intégration)
a/ Montrer que, pour tout $E > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{E^2 + x^2} = \frac{\pi}{E}.$$

b/ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, à support compact (il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x > A$), et non nulle. Montrer que pour tout $s > 0$, il existe une constante C_s tel que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x^s} = C_s \int_0^{\infty} f(tx) t^{s-1} \mathrm{d}t.$$

Solution

a/ Pour commencer, on peut «sortir» le E par dilatation. On fait le changement de variable $y = x/E$, de sorte que $x = Ey$, puis $\mathrm{d}x = E\mathrm{d}y$, et on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{E^2 + x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Edy}{E^2(1+y^2)} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{E} \left[\arctan(y)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{E}.$$

b/ On fixe $x > 0$, et on fait le changement de variable $y = xt$, de sorte que $t = y/x$ puis $\mathrm{d}t = \mathrm{d}y/x$. On obtient

$$\int_0^\infty f(tx)t^{s-1}\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(y)\frac{y^{s-1}}{x^{s-1}}\frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{1}{x^s}\underbrace{\left(\int_0^\infty f(y)y^{s-1}\mathrm{d}y\right)}_{=:C_s}.$$

La quantité C_s est finie, car l'intégrande est continue et à support compact.

Exercice 3. (Séries)
Les séries suivantes sont-elles convergentes, et si oui, quelles sont les limites ?

$$S_1 := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}, \quad S_2 := \sum_{n\geq 1}\mathrm{e}^{-n}, \quad S_3 := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n+1}, \quad S_4 := \sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Solution

• Pour S_1, on fait une décomposition en éléments simples de

$$X \mapsto \frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}. \qquad \text{(mettre au même dénominateur pour le vérifier).}$$

Cela donne, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^N\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1.$$

On a reconnu une **somme télescopique**. Pour séparer la somme en deux à la deuxième égalité, on est passé par un paramètre $N > 0$. La somme infinie $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ ne converge pas... Ainsi, on a montré que $S_1 = 1$.

- Pour S_2, on reconnait une série géométrique, de raison $e^{-1} < 1$, et de premier terme e^{-1}. Ainsi,

$$S_2 = \sum_{n>1}^\infty \mathrm{e}^{-n} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{e}}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}.$$

- Pour S_3, on a que le terme générale est équivalent à $\frac{1}{2n}$ lorsque $n \to \infty$, donc la série diverge.
- Pour S_4, on remarque que

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n).$$

En sommant de $n = 2$ à N, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^N \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^N \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n) = \sum_{n=3}^{N+1}\ln(n) + \sum_{n=1}^{N-1}\ln(n) - 2\sum_{n=2}^N\ln(n)\\ &= \ln(N+1) - \ln(2) + \ln(1) - \ln(N) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} -\ln(2).\end{aligned}$$

Des problèmes plus sérieux

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon.}\end{cases}$$

a/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, croissante avec $f(-\infty) = 0$ et $f(\infty) = 1$.
b/ Soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ la suite de polynômes définies par récurrence par

$$P_0(X) = 1, \quad \text{puis} \quad P_{n+1}(X) = X^3 P_n'(X) - 3nX^2 P_n(X) + 2P_n(X).$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

c/ En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.
d/ En utilisant la formule de Taylor, montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{t^{3(n+1)}} P_{n+1}(t) \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

e/ Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x)f(1-x)$ est une fonction non nulle, C^∞ à support compact.

Solution

a/ f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme composée de fonctions C^∞ sur leur domaine de définition. Il ne reste qu'à regarder ce qui se passe en 0. On trouve $f(0^-) = f(0^+) = f(0) = 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$. Le fait que f soit croissant avec $f(\infty) = 1$ se vérifie facilement.

b/ Montrons le résultat par récurrence. Pour $n = 0$, on a $P_0(X) = 1$ et

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{P_0(x)}{x^0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, de sorte que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{x^{3n} P_n'(x) - P_n(x) 3nx^{3n-1}}{x^{6n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \left(\frac{2}{x^3} \right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3(n+1)}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \end{aligned}$$

d'après la définition de P_{n+1}. Ceci montre le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c/ On peut faire le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, et on voit que la limite de $f^{(n)}(x)$ en 0^+ est aussi

$$\lim_{u \to \infty} u^{3n} P_n(\tfrac{1}{u}) \mathrm{e}^{-u^2} = 0,$$

On a donc $f^{(n)}(0^-) = f^{(n)}(0^+) = 0$, et $f^{(n)}$ peut se prolonger par continuité en 0 avec $f^{(n)}(0) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que f est C^∞.

d/ D'après la formule de Taylor avec reste intégrale, on a, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2} f''(0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{n+1}(t) \mathrm{d}s.$$

En utilisant que $f^{(k)}(0) = 0$ et la formule de $f^{(n)}$ trouvée à la question b/ et valide pour tout $x > 0$, on trouve le résultat.

e/ Soit $g(x) = f(x)f(1-x)$. g est C^∞ comme composée de fonctions C^∞. De plus, pour tout $x < 0$, on a $f(x) = 0$, et donc $g(x) = 0$, et pour tout $x > 1$, on a $f(1-x) = 0$, donc $g(x) = 0$ aussi. g est nulle sur $\mathbb{R} \setminus (0,1)$, et (strictement) positive sur $]0,1[$.

Exercice 5. (La fonction Γ)
On définit la fonction $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

a/ Montrer que l'intégrale est bien définie ssi $x > 0$.
b/ En faisant une intégration par partie, montrer que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

c/ Montrer que $\Gamma(1) = 1$, puis que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d/ Soit $0 < x < 1$. Avec un changement de variable, montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\Gamma(1-x) = t \int_0^\infty (tu)^{-x} \mathrm{e}^{-tu} \mathrm{d}u.$$

En déduire que (on pourra utiliser le théorème de Fubini)

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{u^{-x}}{1+u} \mathrm{d}u.$$

e/ Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, puis que $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *(on pourra poser $u = y^2$)*
f/ En déduire l'intégrale de la Gaussienne *(on pourra poser $t = y^2$ dans la définition de Γ)*

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y = \sqrt{\pi}.$$

Solution

a/ L'intégrande $f(t) := t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est positive, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et vérifie $t^2 f(t) \to 0$, donc f est toujours intégrable en $+\infty$. On étudie maintenant son comportement en 0. On a

$$f(t) \sim t^{x-1} \qquad \text{quand } t \to 0^+.$$

La fonction t^α est intégrable en 0 ssi $\alpha > -1$. On en déduit que f est intégrable ssi $x > 0$.

b/ En posant $u(t) = t^x$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-t}$, on a

$$(uv)' = u'v + uv' = xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t} - t^x \mathrm{e}^{-t}.$$

En intégrant entre 0 et ∞, et en remarquant que $(uv)(\infty) = 0$ et $(uv)(0) = 0$, on trouve

$$0 = (uv)(\infty) - uv(0) = \int_0^\infty (uv)'(t)\mathrm{d}t = x \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x) - \Gamma(x+1),$$

ce qui montre le résultat.

c/ On a

$$\Gamma(1) = \int^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty = 1.$$

Avec la relation $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, on trouve par une récurrence directe que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d/ Si $x < 1$, on a $1 - x > 0$, et $\Gamma(1-x)$ est bien défini d'après la question a/. On fait le changement de variable $t = uy$ avec y fixé, de sorte que $\mathrm{d}t = y\mathrm{d}u$. On trouve

$$\Gamma(1-x) = \int_0^\infty t^{-x}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty (uy)^{-x}\mathrm{e}^{-uy} y \mathrm{d}u,$$

On obtient le résultat en remplaçant y par t.

On calcule maintenant $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ en utilisant la question précédente (valide pour tout t) et le théorème de Fubini (l'intégrande est positive). On obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \left(t \int_0^\infty (tu)^{-x}\mathrm{e}^{-tu}\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} u^{-x} \mathrm{e}^{-tu} \mathrm{d}u\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty u^{-x} \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(1+u)}\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{u^{-x}}{1+u}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

e/ On prend $x = \frac{1}{2}$ dans la question précédente, et on fait le changement de variable $u = y^2$, de sorte que $\mathrm{d}u = 2y\mathrm{d}y$. On trouve

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}(1+u)} = \int_0^\infty \frac{2y\mathrm{d}y}{y(1+y^2)} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\left[\arctan(u)\right]_0^\infty = \pi.$$

Ainsi, on a $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. En utilisant que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on trouve $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

f/ En utilisant la première définition de $\Gamma(\frac{1}{2})$, et en faisant le changement de variable $t = y^2$, de sorte que $\mathrm{d}t = 2y\mathrm{d}y$, on trouve

$$\sqrt{\pi} = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{y}\mathrm{e}^{-y^2} 2y\mathrm{d}y = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y.$$

Avec des matrices

Exercice 6. (Série de Neumann)
On pose $\|x\|_{\mathbb{R}^n} := (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

a/ Montrer que $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On l'appelle la norme d'opérateur.*
b/ Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|AB\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}$. En déduire que $\|A^n\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{op}}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
c/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(\mathbb{I}_n - A)(1 + A + A^2 + \cdots + A^n) = \mathbb{I}_n - A^{n+1}.$$

d/ Montrer que si $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$, alors la série *de Neumann* $B := \mathbb{I}_n + A + A^2 + \cdots$ est normalement convergente.
e/ En déduire que si $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$, alors $\mathbb{I}_n - A$ est inversible, et que $B = (\mathbb{I}_n - A)^{-1}$.

Solution
a/ On a facilement $\|\lambda A\|_{\mathrm{op}} = |\lambda|\ \|A\|_{\mathrm{op}}$ et $\|A\|_{\mathrm{op}} = 0 \implies A = 0$. Montrons l'inégalité triangulaire. Comme $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ est une norme, on obtient que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\|(A+B)\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \|A\mathbf{x} + B\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} \le \|A\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} + \|B\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|A+B\|_{\mathrm{op}} &= \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\|(A+B)\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}} \le \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}} + \frac{\|B\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}} \\ &\le \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}} + \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\|B\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}} = \|A\|_{\mathrm{op}} + \|B\|_{\mathrm{op}}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b/ Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. Si $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, on a

$$\frac{\|AB\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|}\frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}.$$

Si $B\mathbf{x} = 0$, alors $AB\mathbf{x} = 0$, et l'inégalité est encore vérifiée. En prenant le maximum sur tous les $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, on obtient $\|AB\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}$.

En prenant $B = A^n$, on obtient $\|A^{n+1}\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{op}}\|A^n\|_{\mathrm{op}}$, et par une récurrence immédiate, $\|A^n\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{op}}^n$.

c/ Il suffit de développer l'expression de gauche, et de remarquer que les termes se simplifient 2 par 2.

d/ Soit $\alpha := \|A\|_{\mathrm{op}} < 1$. On a $\|A^n\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{op}}^n = \alpha^n$, et la série $\sum \alpha^n$ est sommable (car $\alpha < 1$). Ainsi, la série $\sum A^n$ converge normalement. On pose

$$B = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=0}^N A^n \right) =: \sum_{n=0}^\infty A^n \qquad \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(pour aller plus loin, ici, on a utilisé que l'espace $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ était complet, donc la série partielle converge vers un élément $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour cette norme. C'est une définition possible des espaces complets : E est complet si toute suite normalement convergente est convergente).

e/ On a directement

$$(\mathbb{I}_n - A)B = \lim_{N\to\infty} (\mathbb{I}_n - A)\sum_{n=0}^{N} A^n = \lim_{N\to\infty} \mathbb{I}_n - A^{N+1} = \mathbf{b}_n.$$

Dans la dernière limite, on a utilisé le fait que $\|A^{N+1}\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{op}}^{N+1} = \alpha^{N+1} \to 0$ donc $A^{N+1} \to 0$.

Exercice 7.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

a/ Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$, la série $f(s) := \exp(sA)$ est normalement convergente.
b/ Montrer que $f(s+t) = f(s)f(t)$.
c/ Montrer que $f(\varepsilon) = \mathbb{I}_d + \varepsilon A + o(\varepsilon)$.
d/ En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x, avec $f'(x) = Af(x)$.

Solution

a/ On utilise encore la norme d'opérateurs de l'exercice précédent (on est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes). On trouve

$$\left\| \frac{1}{n!}(sA)^n \right\|_{\mathrm{op}} \le \frac{1}{n!} s^n \|A\|_{\mathrm{op}}^n =: u_n$$

La série u_n est convergente, donc la série définissant $\exp(A)$ est normalement convergente. De plus, on a montré que

$$\|\exp(sA)\|_{\mathrm{op}} \le \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!}(sA)^n \right\|_{\mathrm{op}} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n \|A\|_{\mathrm{op}}^n = \exp(\|sA\|_{\mathrm{op}}).$$

b/ On pose $f(s) = \exp(sA)$. On a

$$f(s+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(s+t)^n A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} s^k t^{n-k} A^k A^{n-k}.$$

En faisant le changement de variable $n_1 = k$ et $n_2 = (n-k)$, et en utilisant Fubini (la somme est normalement convergente), on obtient

$$f(s+t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!}(sA)^{n_1} \frac{1}{n_2!}(tA)^{n_2} = \exp(sA)\exp(tA) = f(s)f(t).$$

c/ On a

$$f(\varepsilon) = \mathbb{I}_n + \varepsilon A + \varepsilon^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \varepsilon^{n-2} A^n \right).$$

Pour tout $\varepsilon < 1$, on a $\|\frac{1}{n!}\varepsilon^{n-2} A^n\|_{\mathrm{op}} \le \frac{1}{n!}\|A\|_{\mathrm{op}}^n$. Ainsi,

$$\left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \varepsilon^{n-2} A^n \right\|_{\mathrm{op}} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|_{\mathrm{op}}^n \le \exp(\|A\|_{\mathrm{op}}).$$

Ce terme est uniformément borné pour tout $0 \le \varepsilon < 1$. On en déduit que $f(\varepsilon) = 1 + \varepsilon A + O(\varepsilon^2)$.

d/ On a

$$f(x+h) = f(x)f(\varepsilon) = f(x)\left[1 + hA + o(h)\right] = f(x) + f(x)Ah + o(h).$$

Le terme $h \mapsto f(x)Ah$ est linéaire et continue. Par définition, c'est la différentielle de f au point x. Autrement dit, $f'(x) = Af(x)$.
