TD2 : Séries entières (rayon de convergence).

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Échauffement

Exercice 1.
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Montrer que pour tout $0 < r < R$, il existe $0 < \alpha < 1$ et $C \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| r^n \leq C\alpha^n.$$

Calcul de rayon de convergence

Exercice 2.
Pour les séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n\geq 0} \alpha^n z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \alpha^{n^2} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} n^n z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n,$$

Exercice 3.
Même question que précédemment :

$$\sum_{n\geq 0} \ln\left(1 + \sin(\frac{1}{n})\right) z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(2n)!} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} 2^{\sqrt{n}} z^n.$$

Exercice 4.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dans le cas où :
a/ La suite (a_n) converge vers $l > 0$.
b/ La suite (a_n) est périodique.

Exercice 5. Critère de d'Alembert
a/ Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n^5+n}(n-1)2^n z^n$.
b/ Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 3^n z^{2n+1}$.

Exercice 6.
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Quel est le rayon de convergence des séries entières suivantes (ici, $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\sum_{n\geq 0} a_n \alpha^n z^n, \quad \sum_{n\geq 0} a_n z^{2n}, \quad \sum_{n\geq 0} a_n z^{2n+1}.$$

Des petits problèmes

Exercice 7. (Théorème des zéros isolés)
a/ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec un rayon de convergence $R > 0$. On suppose qu'il existe $0 < \delta < R$ tel que

$$\forall |x| < \delta, \quad \sum a_n x^n = 0.$$

Montrer que (a_n) est la suite nulle (et donc que $R = +\infty$).
b/ Soit $S(x) := \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Montrer que $S(-x) = S(x)$ pour tout $x \in (-R, R)$ ssi $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.
Soit R_c le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n b_n z^n$.

a/ Montrer que $R_c \geq R_a R_b$. *Indice : on pourra écrire $r = r_a r_b$...*
b/ A-t-on toujours égalité ? *Indice : on pourra considérer $\sum_{n\geq 0} z^{2n}$ et $\sum_{n\geq 0} z^{2n+1}$.*

Exercice 9.
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a \in [0,\infty]$. On pose

$$b_n := \frac{a_n}{1+|a_n|}.$$

Soit R_b le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.
a/ Montrer que $R_b \geq \max\{1, R_a\}$.
b/ On suppose $R_b > 1$. Montrer que $R_b = R_a$.
c/ En déduire que $R_b = \max\{1, R_a\}$.

Exercice 10. (Somme de séries entières)
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

a/ Soit R_c le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n) z^n$. Montrer que $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$.
b/ A-t-on toujours $R_c = \min\{R_a, R_b\}$. *Indice : on pourra considérer* $a_n = -b_n$*...*
c/ Montrer que si $R_a < R_b$, alors $R_c = R_a$.

Pour aller plus loin (hors programme)

Dans cette partie, on étudie les séries de type $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}\sin(n\alpha)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $s \geq 0$.

Exercice 11.
On commence par étudier la suite $u_n := \sin(n\alpha)$.
a/ Montrer que si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, alors $u_n = 0$.
b/ Montrer que si $\alpha \in \pi(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$, alors (u_n) est périodique non nulle.
c/ On suppose maintenant que $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$. On introduit la fonction $f(x) := \sin^2(x) + \sin^2(x+\alpha)$.
c1/ Montrer que f est continue et 2π-périodique.
c2/ Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f(x) \geq c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c3/ En déduire que la suite (u_n) ne tend pas vers 0.

Exercice 12.
a/ Montrer que si $s > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} n^{-s}\sin(n\alpha)$ est convergente.
b/ Montrer que si $s = 0$ et $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, alors la série diverge grossièrement.

Exercice 13. (Une méthode d'Abel)
On suppose dans la suite $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et on pose $S_0 = 0$ et $S_n := \sum_{k=0}^n \sin(k\alpha)$.
a/ Montrer que *Indice : on pourra écrire que* $\sin(x) = \mathrm{Im}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

En déduire que la suite (S_n) est bornée.
b/ Montrer que

$$\sum_{k=N}^{N+M} \frac{1}{k^s}\sin(k\alpha) = \sum_{k=N}^{N+M-1} S_k\left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right) + \frac{S_{N+M}}{(N+M)^s} - \frac{S_{N-1}}{N-1^s}.$$

c/ En déduire que pour tout $s > 0$, et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} n^{-s}\sin(n\alpha)$ est convergente.

Exercice 14. (Une série entière)
Soit $s \geq 0$. On étudie la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} z^n$.

a/ Montrer que le rayon de convergence de la série est $R = 1$.
b/ On regarde ce qui se passe sur le cercle complexe $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C},\, |z| = 1\}$.
b1/ Dans le cas $s > 1$, montrer que la série converge pour tout $z \in \mathbb{S}$.
b2/ Dans le cas $0 < s < 1$, montrer que la série converge pour tout $z \in \mathbb{S} \setminus \{1\}$. Que se passe-t-il en $z = 1$?
b3/ Dans le cas $s = 0$, montrer que la série diverge pour tout $z \in \mathbb{S}$.