TD2 : Séries entières (rayon de convergence). Corrections

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Échauffement

Exercice 1.
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Montrer que pour tout $0 < r < R$, il existe $0 < \alpha < 1$ et $C \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| r^n \leq C\alpha^n.$$

Solution
Soit r_0 tel que $r < r_0 < R$. On pose $\alpha := r/r_0 < 1$. On a

$$|a_n|r^n = |a_n|r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n = (|a_n|r_0^n)\,\alpha^n \leq C\alpha^n.$$

Dans la dernière inégalité, on a utilisé le fait que $r_0 < R$, donc que la suite $|a_n|r_0^n$ est bornée.

Calcul de rayon de convergence

Exercice 2.
Pour les séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n\geq 0} \alpha^n z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \alpha^{n^2} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} n^n z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n,$$

Solution
On rappelle que le rayon de convergence R est tel que si $r < R$, la suite $|a_n|r^n$ est bornée, et si $r > R$, elle diverge.

- La suite (r^n/n) est bornée ssi $r \leq 1$, donc $R = 1$.
- La suite $(r^n/n!)$ est toujours bornée pour tout $r \geq 0$ (elle tend même vers 0). Donc $R = \infty$.
- La suite $r^n\alpha^n = (\alpha r)^n$ est bornée ssi $\alpha r \leq 1$. Donc $R = \frac{1}{\alpha}$.
- On a $r^n\alpha^{n^2} = \exp(n^2 \log(\alpha) + n\log(r))$. On distingue plusieurs cas :

— Si $\alpha < 1$, alors $\log(\alpha) < 0$, et la suite est toujours bornée pour tout $r \geq 0$ (elle tend vers 0). On a $R = \infty$ dans ce cas.
— Si $\alpha > 1$, alors $\log(\alpha) > 0$, et la suite diverge toujours pour tout $r > 0$. On a $R = 0$ dans ce cas.
— Si $\alpha = 1$, on obtient la suite r^n qui est bornée ssi $r \leq 1$, et $R = 1$ dans ce cas.

- On a $n^n r^n = \exp(n\log(n) + n\log(r)) \to \infty$ pour tout $r > 0$, donc $R = 0$.
- On utilise la formule de Stirling, qui dit que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

On obtient

$$\frac{n^n}{n!}r^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\mathrm{e}^n r^n.$$

La suite est bornée ssi $r \leq \mathrm{e}^{-1}$, donc $R = \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 3.
Même question que précédemment :

$$\sum_{n\geq 0} \ln\left(1 + \sin(\frac{1}{n})\right) z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(2n)!} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} 2^{\sqrt{n}} z^n.$$

Solution

• On calcule un équivalent de la suite qui apparaît, lorsque $n \to \infty$. On trouve

$$\ln\left(1+\sin(\tfrac{1}{n})\right) r^n \sim \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) r^n \sim \tfrac{1}{n} r^n$$

qui est bornée ssi $r \leq 1$. Donc $R = 1$.

• On utilise de nouveau la formule de Stirling. On trouve

$$\frac{n!}{(2n)!} r^n \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} r^n \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{4^n} r^n.$$

Cette suite est bornée (elle tend vers 0) pour tout $r \geq 0$, donc $R = \infty$.

• On a $2^{\sqrt{n}} r^n = \exp\left(n \ln(r) + \sqrt{n}\ln(2)\right)$, qui est bornée ssi $r < 1$. Donc $R = 1$.

Exercice 4.

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ dans le cas où :
a/ La suite (a_n) converge vers $l > 0$.
b/ La suite (a_n) est périodique.

Solution

a/ Si $a_n \to \ell > 0$, on a $|a_n| r^n \sim \ell r^n$, qui est bornée ssi $r \leq 1$ (car $\ell \neq 0$). Donc $R = 1$.

b/ Si (a_n) est une suite périodique, alors la suite a_n est bornée. Si $r \leq 1$, la suite $a_n r^n$ est aussi bornée. Au contraire, si L est la période de a_n, et si $a_{n_0} \neq 0$ (suite non nulle), alors, pour tout $r > 1$, on a

$$|a_{n_0 + kL}| r^{n_0 + kL} = |a_{n_0}| r^{n_0 + kL} \xrightarrow{k \to \infty} \infty,$$

et la suite n'est pas bornée. Ainsi, $R = 1$ (et $R = \infty$ si (a_n) est la suite nulle).

Exercice 5. Critère de d'Alembert

a/ Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n^5 + n}(n-1)2^n z^n$.
b/ Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} 3^n z^{2n+1}$.

Solution

a/ On pose $a_n := (-1)^{n^5+n}(n-1)2^n$. Pour tout $n > 2$, $a_n \neq 0$. De plus, on a

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n 2^{n+1}}{(n-1)2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2.$$

Donc $R = \frac{1}{2}$. On peut aussi remarquer que la suite $|a_n| r^n = (n-1)(2r)^n$ est bornée ssi $2r < 1$, et conclure comme avant que $R = \frac{1}{2}$.

b/ On fait attention qu'il y a beaucoup de termes nulles dans cette série entière, et qu'on ne peut pas appliquer d'Alembert directement. Un moyen est d'écrire

$$\sum_{n \geq 0} 3^n z^{2n+1} = z \sum_{n \geq 0} 3^n (z^2)^n = z \sum_{n \geq 0} 3^n x^n,$$

où on a posé $x = z^2$. La dernière somme est une série entière avec $b_n = 3^n$. Par le critère de d'Alembert (par exemple), elle a un rayon de convergence $R_b = 1/3$. Ainsi, la série converge si $|z|^2 < 1/3$, et diverge si $|z|^2 > 1/3$, donc $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 6.

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Quel est le rayon de convergence des séries entières suivantes (ici, $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\sum_{n \geq 0} a_n \alpha^n z^n, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^{2n+1}.$$

Solution

• On a $\sum a_n \alpha^n z^n = \sum a_n (\alpha z)^n$. On reconnaît une dilatation. Le rayon de convergence est $R/|\alpha|$ ($+\infty$ si $\alpha = 0$).

• On pose $x = z^2$, et on a $\sum a_n z^{2n} = \sum a_n x^n$. On en déduit que la série converge si $|z|^2 < R$, et diverge si $|z|^2 > R$, donc le nouveau rayon de convergence est $\sqrt{R}$.

• On a, en posant encore $x = z^2$, $\sum a_n z^{2n+1} = z \sum a_n x^n$. La série converge si $|z|^2 < R$ et diverge si $|z|^2 > R$. Donc le rayon de convergence est $\sqrt{R}$.

Des petits problèmes

Exercice 7. (Théorème des zéros isolés)

a/ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec un rayon de convergence $R > 0$. On suppose qu'il existe $0 < \delta < R$ tel que

$$\forall |x| < \delta, \quad \sum a_n x^n = 0.$$

Montrer que (a_n) est la suite nulle (et donc que $R = +\infty$).

b/ Soit $S(x) := \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que $S(-x) = S(x)$ pour tout $x \in (-R, R)$ ssi $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

a/ La fonction $f(x) := \sum a_n x^n$ est C^∞ sur $(-R, R)$, et s'annule sur $(-\delta, \delta)$. En particulier, on doit avoir $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, on sait que $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$, et donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b/ Soit $S(x) = \sum a_n x^N$ une SE de rayon R, et soit $f(x) = S(x) - S(-x)$. La fonction f est DSE comme somme de fonction DSE, avec un rayon de convergence $\geq R$, et on a

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n (-x)^n = 2 \sum_{m \geq 0} a_{2m+1} x^{2m+1}.$$

(tous les termes paires s'en vont). L'hypothèse que $S(-x) = S(x)$ implique que f est la fonction nulle. On en déduit que $a_{2m+1} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ d'après la question a/.

Exercice 8.

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

Soit R_c le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n b_n z^n$.

a/ Montrer que $R_c \geq R_a R_b$. *Indice : on pourra écrire $r = r_a r_b$...*

b/ A-t-on toujours égalité ? *Indice : on pourra considérer $\sum_{n \geq 0} z^{2n}$ et $\sum_{n \geq 0} z^{2n+1}$.*

Solution

a/ Soit $r < R_a R_b$. Alors il existe $r_a < R_a$ et $r_b < R_b$ tel que $r = r_a r_b$. On a

$$|a_n b_n| r^n = |a_n| r_a^n \cdot |b_n| r_b^n.$$

Comme $r_a < R_a$, la suite $|a_n| r_a^n$ est bornée. Idem pour $|b_n| r_b^n$. On en déduit que la suite $|a_n b_n| r^n$ est bornée, et donc que $r < R_c$ Ceci étant vrai pour tout $r < R_a R_b$, on a $R_a R_b \leq R_c$.

b/ Non, si $a_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = 0$, on a $a_n b_n = 0$ tout le temps, donc $R_c = \infty$.

Exercice 9.

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a \in [0, \infty]$. On pose

$$b_n := \frac{a_n}{1 + |a_n|}.$$

Soit R_b le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$.

a/ Montrer que $R_b \geq \max\{1, R_a\}$.

b/ On suppose $R_b > 1$. Montrer que $R_b = R_a$.
c/ En déduire que $R_b = \max\{1, R_a\}$.

Solution

a/ On a $1 + |a_n| \geq \max\{1, |a_n|\}$, et donc

$$|b_n| \leq |a_n| \qquad \text{et} \qquad |b_n| \leq 1.$$

En particulier, $|b_n| r^n \leq r^n$, qui est bornée si $r \leq 1$ et $|b_n| r^n \leq |a_n| r^n$, qui est bornée si $r > R_a$. Ainsi $R_b \geq 1$ et $R_b \geq R_a$, donc $R_b \geq \max\{1, R_a\}$.

b/ Si $R_b > 1$, alors la série $\sum |b_n|$ est convergente, et, en particulier, $b_n \to 0$. On a

$$|b_n|(1 + |a_n|) = |a_n|, \qquad \text{et donc} \qquad |a_n| = \frac{|b_n|}{1 - |b_n|} \sim |b_n|.$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc équivalentes. On en déduit $R_a = R_b$.

c/ On sait que $R_b \geq \max\{1, R_a\}$. Supposons $R_b > \max\{1, R_a\}$. En particulier, $R_b > 1$. D'après la question b/, on a $R_b = R_a$, contradiction. Ainsi, on a égalité $R_b = \max\{1, R_a\}$.

Exercice 10. (Somme de séries entières)
Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

a/ Soit R_c le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$. Montrer que $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$.
b/ A-t-on toujours $R_c = \min\{R_a, R_b\}$. *Indice : on pourra considérer $a_n = -b_n$...*
c/ Montrer que si $R_a < R_b$, alors $R_c = R_a$.

Solution

a/ Soit $r < R_a$ et $r < R_b$. Alors les suites $a_n r^n$ et $b_n r^n$ sont bornées, donc la suite $(a_n + b_n) r^n$ aussi. En particulier $R_c > r$. Ceci étant vrai pour tout $r < \min\{R_a, R_b\}$, on en déduit que $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$.

b/ Prenons la suite $a_n = 1$ et $b_n = -1$, c'est à dire $A(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $B(x) = -A(x) = \dfrac{-1}{1-x}$. Alors $R_a = R_b = 1$, mais $c_n := a_n + b_n = 0$, donc $C(x) = 0$ avec $R_c = +\infty$.

c/ Supposons que $R_a < R_b$. D'après la question a/, on a $R_c \geq R_a$. Supposons que l'inégalité est stricte, et que $R_c > R_a$. On a $c_n = a_n + b_n$, donc $a_n = c_n - b_n$. En appliquant la question a/ avec $A = C - B$, on trouve $R_a \geq \min\{R_c, R_b\}$. Ceci contredit le fait que $R_a < R_b$ et $R_a < R_c$. Ainsi, si $R_a \neq R_b$, alors $R_c = \min\{R_a, R_b\}$.

Pour aller plus loin (hors programme)

Dans cette partie, on étudie les séries de type $\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \sin(n\alpha)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $s \geq 0$.

Exercice 11.
On commence par étudier la suite $u_n := \sin(n\alpha)$.
a/ Montrer que si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, alors $u_n = 0$.
b/ Montrer que si $\alpha \in \pi(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$, alors (u_n) est périodique non nulle.
c/ On suppose maintenant que $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$. On introduit la fonction $f(x) := \sin^2(x) + \sin^2(x + \alpha)$.
c1/ Montrer que f est continue et 2π-périodique.
c2/ Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f(x) \geq c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c3/ En déduire que la suite (u_n) ne tend pas vers 0.

Solution

a/ Si $\alpha = \pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\sin(n\alpha) = \sin(n\pi k) = 0$. Sont $u_n := \sin(n\alpha) = 0$ est la suite nulle.

b/ Si $\alpha = \pi \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ premier entre eux, alors $u_n = \sin(\pi \frac{np}{q})$. En particulier,

$$u_{n+2q} = \sin\left(\pi \frac{(n+2q)p}{q}\right) = \sin\left(\pi \frac{np}{q} + 2\pi\right) = \sin\left(\pi \frac{np}{q}\right) = u_n.$$

Ceci montre que la suite u_n est $2q$–périodique. De plus, on a $u_1 = \sin\left(\pi\frac{p}{q}\right) \neq 0$, donc (u_n) n'est pas la suite nulle.

c1/ Soit $f(x) := \sin^2(x) + \sin^2(x+\alpha)$. f est C^∞ comme composée de fonctions C^∞, et on a $f(x+\pi) = f(x)$, donc f est π–périodique.

c2/ Par périodicité de f, on a

$$c := \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \inf_{x\in[0,\pi]} f(x) = \min_{x\in[0,\pi]} f(x).$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé que f est continue sur le compact $[0,\pi]$, donc atteint son minimum. Comme f est positive, on a $c \geq 0$. Supposons par l'absurde que $c = 0$. Alors il existe $x_* \in [0,\pi]$ tel que $f(x_*) = 0$. On en déduit que

$$\sin(x_*) = 0, \qquad \text{et} \quad \sin(\alpha + x^*) = 0.$$

La première égalité implique que $x_* \in \pi\mathbb{Z}$, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x^* = \pi k$ (en fait, comme $x_* \in [0, 2\pi]$, on doit avoir $k = 0$ ou $k = 1$), et la seconde implique que $x_* + \alpha \in \pi\mathbb{Z}$ est de la forme $x_* + \alpha = \pi q$ pour un certain $q \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $\alpha = \pi q - x_* = \pi(q-k) \in \pi\mathbb{Z}$. Ceci n'est pas possible si $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$. Dans ce cas, on a $c > 0$, et $f(x) \geq c > 0$ partout.

c3/ Supposons par l'absurde que (u_n) tend vers 0. Pour $\varepsilon := \sqrt{c}/3 > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. En particulier, pour $n \geq N$, on doit avoir $|u_n|^2 + |u_{n+1}|^2 < 2\varepsilon^2 = \frac{2}{3}c < c$. Par ailleurs, on a

$$|u_n|^2 + |u_{n+1}|^2 = \sin^2(n\alpha) + \sin^2(n\alpha + \alpha) = f(n\alpha) \geq c, \qquad \text{(d'après c2/).}$$

contradiction.

Exercice 12.
a/ Montrer que si $s > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} n^{-s}\sin(n\alpha)$ est convergente.
b/ Montrer que si $s = 0$ et $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, alors la série diverge grossièrement.

Solution

a/ Si $s > 1$, on a

$$\left|\frac{1}{n^s}\sin(n\alpha)\right| \leq \frac{1}{n^s},$$

et la série de droite est convergente. On en déduit que la série $\sum bn^{-s}\sin(n\alpha)$ est absolument convergente, donc convergente.

b/ Si $s = 0$. On a montré dans l'exercice précédent que si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, la suite $\sin(n\alpha)$ ne converge pas vers 0. En particulier, la série $\sum_n \sin(n\alpha)$ diverge grossièrement.

Exercice 13. (Une méthode d'Abel)
On suppose dans la suite $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et on pose $S_0 = 0$ et $S_n := \sum_{k=0}^n \sin(k\alpha)$.
a/ Montrer que *Indice : on pourra écrire que* $\sin(x) = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

En déduire que la suite (S_n) est bornée.
b/ Montrer que

$$\sum_{k=N}^{N+M} \frac{1}{k^s}\sin(k\alpha) = \sum_{k=N}^{N+M-1} S_k\left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right) + \frac{S_{N+M}}{(N+M)^s} - \frac{S_{N-1}}{N-1^s}.$$

c/ En déduire que pour tout $s > 0$, et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} n^{-s}\sin(n\alpha)$ est convergente.

Solution

a/ On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}\right) = \mathrm{Im}\ \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}\right).$$

On reconnaît une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 1$ (car $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$), de premier terme 1 et avec $N+1$ termes. Ainsi

$$S_n = \mathrm{Im}\ \left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(N+1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right) = \mathrm{Im}\ \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\frac{N+1}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\frac{N+1}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\frac{N+1}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}}\right) = \mathrm{Im}\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha N}\right) \frac{\sin\left(\alpha\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. = \sin(\alpha N)\frac{\sin\left(\alpha\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

On en déduit que S_n est bornée, avec

$$|S_n| \leq \frac{1}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

b/ On écrit que $\sin(n\alpha) = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{N+M} \frac{1}{k^s} \sin(k\alpha) &= \sum_{n=N}^{N+M} \frac{1}{k^s}\left(S_k - S_{k-1}\right) = \sum_{n=N}^{N+M} \frac{1}{k^s} S_k - \sum_{n=N}^{N+M} \frac{1}{k^s} S_{k-1} = \sum_{n=N}^{N+M} \frac{1}{k^s} S_k - \sum_{n=N-1}^{N+M-1} \frac{1}{(k+1)^s} S_k \\ &= \frac{1}{N^s} S_N - \frac{1}{(N+M-1)^s} S_{N+M+1} + \sum_{n=N}^{N+M-1} S_k \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right).\end{aligned}$$

c/ Montrons que le reste de la série est bornée, et tend vers 0 quand $N \to \infty$. Soit A un majorant de la suite (S_n). Pour commencer, on remarque que

$$\left| S_k \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right)\right| \leq A \left|\left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right)\right| = A\left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right).$$

En sommant sur k, on reconnait une série télescopique à droite. On en déduit que la série de droite est sommable, donc celle de gauche aussi. En particulier, on peut faire $M \to \infty$ dans l'expression de la question b/, et on trouve

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sin(k\alpha) = \frac{1}{N^s} S_N + \sum_{n=N}^{\infty} S_k \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right).$$

Lorsque $N \to \infty$, le membre de droite tend vers 0 (le reste d'une série convergente tend vers 0). On en déduit que $\sum_n \frac{1}{k^s} \sin(k\alpha)$ est une série convergente.

Exercice 14. (Une série entière)

Soit $s \geq 0$. On étudie la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} z^n$.

a/ Montrer que le rayon de convergence de la série est $R = 1$.

b/ On regarde ce qui se passe sur le cercle complexe $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

b1/ Dans le cas $s > 1$, montrer que la série converge pour tout $z \in \mathbb{S}$.

b2/ Dans le cas $0 < s < 1$, montrer que la série converge pour tout $z \in \mathbb{S} \setminus \{1\}$. Que se passe-t-il en $z = 1$?

b3/ Dans le cas $s = 0$, montrer que la série diverge pour tout $z \in \mathbb{S}$.

Solution

a/ La suite $\frac{1}{n^s} r^n$ est bornée ssi $r < 1$, donc $R = 1$.

b1/ On note $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, et on remarque que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} z^n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \cos(n\alpha) + \mathrm{i} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \sin(n\alpha).$$

Si $s > 1$, les séries sont convergentes (cf question 12a).

b2/ Si $0 < s < 1$, et $\alpha \neq 0$, on a $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On peut appliquer les résultats de l'exercice 13 (faite pour sin, mais marche aussi pour cos). On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} z^n$ converge. Si $z = 1 \in \mathbb{S}$, on a $\alpha = 0$, et $\frac{1}{n^s} z^n = \frac{1}{n^s}$ qui donne une série divergente.

b3/ Si $s = 0$, on a $\frac{1}{n^s} z^n = z^n$, qui ne tend pas vers 0 (elle reste de module 1). Donc la série associées diverge grossièrement.
